M. SARIAN E. CARAGHEORGHE D. D. BOIANGIU D. VOICULESCU
A. CODOBAN E. DECIU N. ENESCU
L. GHERMĂNESCU-IONESCU E. HAŞEGANU-ZAMFIRESCU ŞT. STAICU

PROBLEME de MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI – 1983

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI INVĂȚĂMINTULUI

M. SARIAN E. CARAGHEORGHE D. D. BOIANGIU D. VOICULESCU
A. CODOBAN E. DECIU N. ENESCU
L. GHERMĂNESCU-IONESCU E. HAȘEGANU-ZAMFIRESCU ȘT. STAICU

PROBLEME de MECANICĂ

Ediția a II-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI 1983

Lucrarea a fost analizată şi aprobată de colectivul Catedrei de mecanică, de Consiliul profesoral al Facultăţii de mecanică agricolă şi de Senatul Institutului politehnic din Bucureşti.

Contribuţia autorilor la prezenta lucrare este următoarea:

prof. ing. **MIHAIL SARIAN** şi *prof. ing.* **EMIL CARAGHEORGHE** — elaborarea capitolului 1 şi a subcapitolelor 2.A, 3.A, 4.A, 5.A, 6.A, 7.A, 8.A, 9.A, 10.A, 11.A, 12.A, 14.A, 15.A, 16.A, 17.A, 19.A;
prof. dr. ing. **DUMITRU D. BOIANGIU** — elaborarea capitolelor 21, 23, 26, a subcapitolelor 6.B, 9.B, 12.B, 14.B, 16.B şi participare la subcapitolul 10.B;
prof. dr. ing. **DUMITRU VOICULESCU** — elaborarea capitolelor 13 şi 18.
şef lucr. dr. ing. **ALEXANDRU CODOBAN** — elaborarea capitolului 25 şi participare la capitolul 26 şi subcapitolul 3.B;
conf. dr. ing. **EUGEN DECIU** — elaborarea capitolului 24 şi a subcapitolului 2.B şi participare la capitolul 26 şi subcapitolul 20.B;
conf. dr. ing. **NICOLAE ENESCU** — elaborarea capitolului 22 şi a subcapitolelor 8.B, 10.B, 15.B;
şef lucr. ing. **LUCIA GHERMĂNESCU-IONESCU** — elaborarea subcapitolelor 4.B şi 7.B;
şef lucr. ing. **ELIZA HAŞEGANU-ZAMFIRESCU** — elaborarea subcapitolelor 20.A, 5.B, 11.B şi participare la subcapitolele 3.B şi 20.B;
şef lucr. dr. ing. **ŞTEFAN STAICU** — elaborarea subcapitolelor 17.B şi 19.B.

COORDONATOR — *prof. dr. ing.* **DUMITRU D. BOIANGIU.**

Redactor: ing. Felicia Balasan
Tehnoredactor: Victoria Ghimiş
Coperta: F. Macoveanu

Coli de tipar: 22,75.
Format: 16/70×100.
Bun de tipar: 18. VII. 1983.
Ediţia: 1983. Nr. plan: 9233.



Întreprinderea Poligrafică Cluj
B-dul Lenin Nr. 146
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 671

Prefață la ediția I

Lucrarea pe care o prezentăm este un rezultat al activității practice de curs și de seminar de mecanică teoretică și al observațiilor autorilor privind modul de înțelegere și de însușire mai deplin, mai eficient și mai operativ al acestei discipline de către studenți.

Autorii au urmărit să scoată în evidență fenomenele fizice și corespondența lor cu expresiile matematice, evitîndu-se permanent înlocuirea legilor prin formule, adică aplicarea automată a unor relații. În acest fel, cititorul este antrenat, pe de o parte, la însușirea logică a cunoștințelor și, pe de altă parte, la analizarea anumitor fenomene pe baza înțelegerii lor în adîncime.

Lucrarea se adresează unui cerc larg de cititori, cuprinzînd în primul rînd studenții facultăților tehnice de ingineri și subingineri precum și inginerii, fizicienii și matematicienii care se interesează de problemele de mecanică teoretică.

În special lucrarea este întocmită pentru studenții facultăților de electrotehnică, energetică, electronică, automatică, metalurgie etc. Autorii au ținut seama de numărul mic de ore de curs și de seminar prevăzute în programele acestor facultăți la această disciplină și, din acest motiv, materialul este prezentat în lucrare în mod concentrat. Autorii au urmărit cu insistență ca cititorii să înțeleagă fenomenele și să evite superficialitatea în tratarea problemelor. În acest scop, la începutul fiecărui capitol este prezentată o sinteză cuprinzătoare, în care sînt date definițiile, sînt explicate ideile esențiale, sînt analizate rezultatele și valabilitatea lor și apoi sînt descrise metodele de lucru în mod succint. De asemenea, sînt rezolvate unele aplicații devenite clasice în mecanica teoretică.

În fiecare capitol sînt prezentate probleme din care unele sînt rezolvate integral, iar la unele se dau indicații succesive pînă la rezolvare.

Autorii au urmărit în acest mod să angreneze efectiv studentul în procesul de gîndire pentru ca să-și dezvolte judecata și, ca urmare, să capete experiență și deci încredere în posibilitățile sale.

Colectivul de autori își exprimă mulțumirile sale tov. Acad. Radu Voinea, pentru ajutorul dat prin prețioase îndrumări și sugestii în vederea apariției acestei lucrări în condiții optime.

AUTORII

Prefață la ediția a II-a

Pentru a răspunde mai bine necesităților pregătirii cadrelor tehnice superioare la un nivel ridicat și în permanentă legătură cu practica, în această ediție conținutul lucrării a fost amplificat și restructurat într-un număr sporit de capitole. De asemenea, s-au introdus probleme noi, în anumite cazuri renunțîndu-se la unele probleme din ediția precedentă.

Pentru o mai ușoară orientare a cititorului, prezentarea teoretică a fiecărui capitol este notată cu A, iar aplicațiile, cu B.

Colectivul de autori aduce pe această cale mulțumiri tovarășilor D. Rugescu și D. Coman pentru contribuția adusă la prima ediție a acestei lucrări.

AUTORII

Capitolul 1

CONCEPTELE FUNDAMENTALE ŞI CONCEPTELE DE LUCRU ALE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica este primul capitol al ştiinţelor naturii, ştiinţe care studiază multiplele însuşiri şi manifestări ale materiei.

Materia[1] *este categoria filozofică care desemnează realitatea obiectivă dată omului prin senzaţii, oglindită de senzaţii, dar existînd independent de ele.*

Materia este inepuizabilă, iar procesul cunoaşterii ei este de asemenea inepuizabil.

Însuşirea fundamentală şi modul ei de existenţă este *mişcarea*. *Mişcarea*[2], *în accepţia cea mai largă a cuvîntului, înglobează în sine toate schimbările şi procesele care au loc în univers, începînd cu simpla deplasare şi terminînd cu gîndirea.*

Mecanica newtoniană[3] studiază forma cea mai simplă de mişcare, *forma mecanică*, adică *deplasarea*, în *spaţiu şi timp*, în raport cu un *reper*, a *corpurilor* (părţi de materie), sub influenţa *interacţiunilor* reciproce ale lor.

Mişcarea mecanică este forma cea mai simplă şi însoţeşte sau este cuprinsă în celelalte forme mai complexe de mişcare.

Formele fundamentale ale mişcării, *calitativ specifice*, nu sînt niciodată izolate, ele se însoţesc şi se întrepătrund.

În natură nu există fenomene care să poată fi socotite ca mişcări mecanice pure. În general, mişcarea mecanică este însoţită de *frecări* şi *deformări* care *vor fi considerate forme nemecanice de mişcare*.

În studiul mişcării mecanice se poate face *abstracţie* de alte forme nemecanice care o însoţesc, dacă acestea din urmă *sînt neesenţiale*, adică nu modifică *prea mult* realitatea obiectivă. Acest *proces de abstractizare* stă la baza *modelării* care simplifică studiul, permiţînd folosirea largă a matematicilor. Totuşi, cu toată precizia matematică a calculelor, rezultatul obţinut nu reprezintă, deseori, decît o primă aproximaţie a fenomenului studiat.

Corpuri. În faza actuală a ştiinţelor naturii, materia este cunoscută ca avînd o structură *duală*: una, discontinuă, discretă, concentrată, *substanţa*, iar cealaltă, difuzată în spaţiu şi continuă, *cîmpul*.

Corpurile în mecanică *sînt considerate constituite numai din substanţă*, adică se face abstracţie de cîmpul propriu.

Cîmpurile, cum sînt cel gravitaţional sau cel electromagnetic, îşi au importanţa lor şi în mecanică, însă numai din punctul de vedere al influenţei lor asupra mişcării mecanice a corpurilor.

---

[1] V. I. Lenin, *Opere*. Vol. 14 E.S.P.L.A., 1954, p. 120.

[2] Fr. Engels. *Dialectica naturii*. E.S.P.L.A., 1954, p. 55.

[3] Denumită şi Mecanică teoretică.

Deci, *corpul constituit numai din substanță este primul concept al mecanicii newtoniene*, primul *model* al acestei discipline.

Deplasarea este în sine o operație geometrică: schimbarea poziției unui corp în raport cu altul presupus nemișcat.

Deplasarea *nu este o formă de mișcare*, ci însoțește formele de mișcare, deoarece numai deplasarea nu implică și considerarea timpului necesar, ci numai modificarea poziției unui corp în spațiu. *Deplasarea unui corp se poate face într-o infinitate de moduri.* Numai *prin considerarea timpului* deplasarea în spațiu *devine unică* și se numește *mișcare.*

Spațiul și **timpul** sînt forme obiective de existență a materiei. „*Spațiul, timpul și mișcarea ca forme fundamentale de existență a materiei, formează o unitate organică indisolubilă, determinată de unitatea lumii materiale*"[1].

Concepția care stă la baza mecanicii newtoniene[2] este materialistă. Spațiul și timpul sînt obiective, dar absolute, adică: conceptul de spațiu al acestei mecanici este independent de timp și de mișcarea materiei, iar timpul este *universal absolut*, același în orice punct al spațiului. De asemenea, *simultaneitatea* este concepută ca *absolută*, adică dacă două evenimente sînt simultane în raport cu un sistem de referință, ele sînt considerate simultane față de orice sistem de referință independent de mișcările lor.

Conceptele de spațiu absolut, de timp absolut și de simultaneitate absolută, care dau mecanicii newtoniene un *caracter metafizic*, se bazează pe presupunerea că ar exista în natură *fenomene instantanee*, adică a căror propagare s-ar face cu *viteză infinită*. Ori, toate fenomenele din natură se propagă cu viteze finite, iar cea mai mare viteză cunoscută pînă azi este viteza luminii[3].

E i n s t e i n[4] a enunțat sub formă de principiu, că viteza luminii în vid $\left(c = 300\,000 \dfrac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ este o constantă universală, adică viteza luminii nu depinde de mișcarea sursei care o emite.

Acesta este un principiu fundamental al mecanicii relativiste, care a apărut în știință la începutul secolului XX. În această mecanică, spațiul și timpul depind unul de altul și ambele de materia în mișcare. *Spațiul-timp* al mecanicii relativiste este o varietate cvadridimensională a geometriilor riemanniene. O consecință importantă a legăturii spațiului cu timpul și cu mișcarea materiei este faptul că simultaneitatea evenimentelor este relativă și nu absolută ca în mecanica newtoniană. Evenimentele simultane față de un sistem de referință, în anumite condiții de mișcare, nu sînt simultane față de un alt sistem și în alte condiții de mișcare.

Mecanica relativistă, prin conceptele și rezultatele ei, corespunde mai bine decît mecanica newtoniană cu imaginea pe care o avem astăzi despre natură.

Astfel, mecanica newtoniană nu poate explica fenomene care se propagă cu viteze comparabile cu viteza luminii și care au putut fi explicate cu mecanica relativistă.

---

[1] *Materialismul dialectic*, E.S.P.L.A., 1954, p. 295.

[2] I s a a c N e w t o n (1643–1727) unul din geniile omenirii.

[3] În consecință, *spațiul absolut*, *timpul absolut* și *simultaneitatea absolută* sînt *modele* ale mecanicii newtoniene.

[4] Albert Einstein (1879–1955).

Dar pentru vitezele folosite în tehnică și chiar în cosmonautică, care nu depășesc a 20 000-a parte din viteza luminii, rezultatele aplicării mecanicii newtoniene sînt pe deplin satisfăcătoare și extrem de puțin diferite de rezultatele obținute dacă s-ar aplica mecanica relativistă la rezolvarea acelorași probleme.

În consecință, se poate trage următoarea concluzie: în problemele *în care corpurile au viteze foarte mici în comparație cu viteza luminii*, se poate presupune că legăturile dintre spațiu, timp și materie, *deși reale*, sînt totuși *neesențiale* și ca atare se poate *să nu se țină seamă de aceste legături* și să se folosească mecanica newtoniană pentru rezolvarea acestor probleme. Justificarea științifică a acestor neglijări se găsește în *procesul de abstractizare* și în gradul de *aproximație* cerut de practică.

Se mai precizează următoarele:

Spațiul mecanicii newtoniene este *tridimensional* și *euclidian*, adică este *nelimitat, continuu, omogen, izotrop* iar *geodezicele lui sînt linii drepte*.

Timpul mecanicii newtoniene este *continuu, omogen, monoton crescător, ireversibil, fără început* și *fără sfîrșit*.

Timpul *are o singură dimensiune* și face legătura dintre procesele materiale în sensul succesiunii și al duratei lor.

Mișcarea mecanică se studiază în raport cu un *reper*, ca atare mișcarea mecanică are un caracter *relativ*.

Prin *reper* sau *sistem de referință* se înțelege un *corp care nu-și schimbă forma și dimensiunile* și la care se raportează mișcarea mecanică. Spațiul concret al mecanicii newtoniene fiind tridimensional, înseamnă că, ducînd prin orice punct al spațiului două drepte distincte oarecare, prin același punct nu se mai poate duce decît o singură dreaptă perpendiculară pe primele. Se formează astfel un triedru care este denumit sistem de referință. De obicei în mecanică se folosește triedrul tridreptunghic drept. Studiul mișcării mecanice a corpurilor se face în raport cu acest sistem de referință care *se presupune fix*.

Caracterul relativ al mișcării mecanice trebuie înțeles în sensul că această mișcare poate fi observată în mod diferit din sisteme de referință diferite. Însă *mișcarea mecanică, la fel cu mișcarea în general, este unică, este absolută în sine, ea există în mod obiectiv, independent de observator*.

Repausul absolut nu există în natură deoarece materia este în permanentă mișcare. În mecanică se poate concepe doar *repausul relativ*, cazul în care corpul se mișcă la fel cu sistemul de referință la care se raportează mișcarea lui.

Newton și-a stabilit *principiile* pe care și-a construit mecanica, presupunînd existența unui reper fix. Totuși, deoarece nimic nu este fix, ar fi însemnat ca mecanica newtoniană să fie fundamental greșită. Însă, rezultatele acestei mecanici, mai ales în domeniul mișcării corpurilor cerești, au dovedit că principiile au fost corect enunțate, doar că în locul *reperului fix* trebuie să fie luat *reperul heliocentric* care are o mișcare aproape *inerțială*, adică de translație rectilinie și uniformă.

Convenție.

Prin *reper fix* se va denumi în mecanica newtoniană un reper în repaus față de un reper *considerat inerțial* în problema studiată.

Interacțiunea corpurilor este una dintre cele mai caracteristice manifestări ale materiei. Noțiunea de interacțiune este foarte generală. Procesului deosebit de complex de interacțiune i se asociază, în mecanică, două din însușirile mai importante ale materiei: *gravitația și inerția*.

Gravitația *este însușirea corpurilor în interacțiune de a se atrage reciproc.*

Inerția *caracterizează tendința corpurilor de a-și menține starea de mișcare sau de repaus și opunerea lor la acțiunea altor corpuri de a le modifica mișcarea sau starea de repaus.*

Cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția se reflectă în noțiunea și mărimea de masă. Astfel, însușirii gravitaționale îi corespunde noțiunea de *masă gravifică*, iar însușirii inerțiale îi corespunde cea de *masă inertă*[1].

Fizicienii Eötvös și Zeeman au dovedit experimental că raportul mărimilor celor două mase este constant și că, alegînd unitățile în mod convenabil, *masa gravifică este egală cu masa inertă.*

Egalitatea lor oglindește strînsa legătură dintre cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția.

Definiția mărimii de masă întîlnită de obicei în mecanică newtoniană este: *masa unui corp este măsura inerției lui în mișcarea sa de translație rectilinie și uniformă în raport cu un reper fix.*

Masa este o mărime scalară pozitivă, independentă de mișcarea corpului[2].

Alte concepte ale mecanicii newtoniene. Procesul de abstractizare în această mecanică se continuă printr-o serie de simplificări, prin crearea unor modele care să aproximeze destul de satisfăcător realitatea obiectivă. Așa după cum spațiul absolut și timpul universal absolut sînt modele satisfăcătoare pentru studiul mișcărilor cu viteze relativ foarte mici în comparație cu viteza luminii, tot astfel și *masa independentă de viteză* satisface nevoile mecanicii newtoniene. Mai sînt și alte modele folosite în această mecanică.

— **Punct material** poate fi considerat orice corp solid ale cărui *dimensiuni, deformații, mișcări de rotație sînt neesențiale* în raport cu alte elemente sau obiective ale problemei, în așa fel încît să fie neglijabile, într-un prim studiu aproximativ al mișcării corpului. În aceste condiții, corpul poate fi asimilat cu un punct în care se *presupune* concentrată întreaga masă a corpului (*centrul de masă*).

Nu orice corp și nu în orice problemă poate fi asimilat cu un punct material; astfel, Pămîntul în mișcarea sa pe orbită poate fi conceput ca un punct material pe cînd electronul în interiorul atomului, nu.

— **Sistem discret de puncte materiale** poate fi conceput ca orice mulțime finită de corpuri asimilabile cu puncte materiale care se interacționează și care sînt așezate în punctele unui domeniu.

Masele corpurilor sînt presupuse concentrate în aceste puncte iar masa totală a sistemului este egală cu suma maselor punctelor materiale (fig. 1.1)

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

(axioma adunării maselor).

— **Continuu material** este un corp în care un volum, oricît de mic, conține materie. Dacă A $(\bar{r})$ este un punct curent al domeniului, ΔV, un element

[1] Nu în înțelesul obișnuit de pasivitate.

[2] În Teoria relativității restrînse se arată că masa corpului variază cu v, viteza lui: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, unde m_0 este masa de repaus.

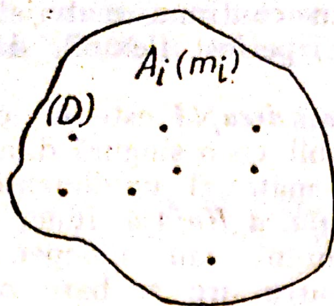


Fig. 1.1.

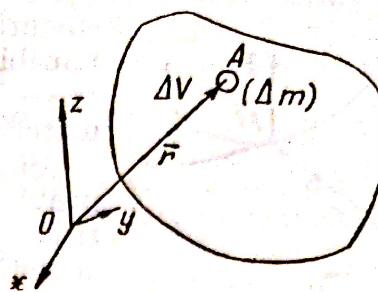


Fig. 1.2.

de volum din jurul punctului A şi Δm, masa elementară distribuită acestui volum, prin definiţie:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV};$$

dacă această limită există, este densitatea volumică din A (fig. 1.2). Masa totală a continuului este:

$$m = \int_{(D)} dm = \int_{(V)} \rho dV,$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul (D) al continuului tridimensional de volum V, unde $\rho = \rho(\bar{r})$.

— **Continuul material omogen** este caracterizat prin independenţa densităţii de poziţia punctului A, adică $\rho =$ const., deci;

$$m = \rho V.$$

Sistemele materiale din natură nu sînt nici continue şi, ca atare, nici omogene.

— **Solid rigid.** Corpurile sînt toate deformabile, unele mai puţin, altele mai mult, deformaţiile depinzînd şi de felul cum ele sînt acţionate. Corpurile care, după dispariţia cauzei care le-a deformat, revin sensibil la forma şi dimensiunile iniţiale se numesc *elastice*, mai bine zis se găsesc în *stare elastică*, iar corpurile care, după dispariţia cauzei deformării, revin prea puţin la starea iniţială se numesc *plastice* sau sînt în *stare plastică*.

În natură nu există corpuri *perfect elastice* sau *perfect plastice*.

În mecanica newtoniană se foloseşte într-un prim studiu, *modelul de solid rigid* pentru corpurile solide care, faţă de acţiunile exterioare la care sînt supuse, *au deformaţii neglijabile în raport cu aspectele esenţiale ale problemei*.

Solidul rigid se caracterizează prin invarianţa distanţelor reciproce ale punctelor lui şi este definit ca *un continuu material nedeformabil*.

Modele pentru corpuri care au una sau două din dimensiuni mici în comparaţie cu celelalte dimensiuni. Într-un studiu aproximativ dimensiunile *relativ mici* se neglijează ajungîndu-se la:

— *membrana*, un continuu material deformabil avînd numai două dimensiuni;

— *placa curbă* sau *plană*, un continuu material nedeformabil cu două dimensiuni.

În acelaşi mod ca la continuul tridimensional, se scoate în evidenţă la continuul bidimensional, *densitatea superficială*, care poate fi variabilă sau constantă (membrană sau placă omogenă);

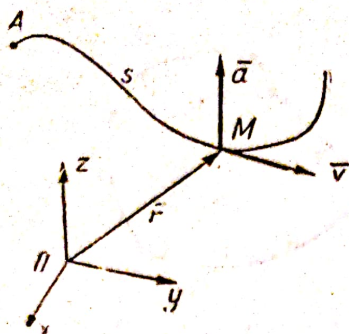


Fig. 1.3.

— firul este un continuu material cu o singură dimensiune, perfect flexibil, dar inextensibil;

— *bara curbă sau dreaptă* este un continuu material nedeformabil cu o singură dimensiune.

Şi la continuul material unidimensional se poate concepe *densitatea liniară*, funcţie de poziţia punctului curent sau independent de această poziţie, pentru fire şi bare omogene.

Toate aceste modele nu reprezintă decît aproximativ corpurile considerate în problemele de mecanică, totuşi ele trebuie să conţină acele caracteristici ale corpurilor care sînt *esenţiale* pentru rezolvarea satisfăcătoare a acestor probleme. Folosirea lor permite aplicarea în rezolvare a unui instrument matematic de înalt nivel şi cu mare precizie. Totuşi, din cauza modelării, cu toată precizia lor matematică, rezultatele nu oglindesc decît imperfect fenomenul real.

În continuarea mecanicii newtoniene, alte discipline folosind *modele perfecţionate* pot obţine rezultate mai apropiate de realitate, corspunzătoare gradului de aproximaţie cerut de aplicaţiile tehnice.

Definiţii din cinematica punctului[1]

Traiectoria este *mulţimea continuă a poziţiilor prin care trece, în timp, punctul mobil* (fig. 1.3).

Ecuaţia vectorială a curbei este

$$\bar{r} = \bar{r}(s)$$

unde s este arcul măsurat de la originea arcelor A.

Ecuaţia orară a mişcării este

$$s = s(t),$$

t fiind timpul.

Ecuaţia traiectoriei conţinînd şi legea mişcării este:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Viteza într-un moment t a punctului mobil *este o mărime vectorială care caracterizează direcţia tangentă la traiectorie, sensul, în sensul vectorului şi drumul parcurs în unitatea de timp*, avînd expresia:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.$$

Tipuri de mişcări:

— *uniformă:* $\bar{v} = \bar{c}$, traiectoria nu poate fi decît o linie dreaptă;
— *rectilinie variată*, viteza este variabilă;
— *curbilinie pseudouniformă*, $|\bar{v}| = c$;
— *curbilinie variată.*

---

[1] Fiind necesare pentru înţelegerea principiilor fundamentale ale mecanicii newtoniene, sînt prezentate şi aici.

Accelerația într-un moment t a punctului mobil este viteza de variație a vectorului viteză și se exprimă prin:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}.$$

Dacă mişcarea este uniformă $\bar{v} = \bar{c}$, accelerația este nulă: $\bar{a} = \dot{\bar{c}} = 0$.

În toate celelalte cazuri mişcarea punctului se face cu accelerație diferită de zero.

1.A. PRINCIPIILE FUNDAMENTALE ALE MECANICII NEWTONIENE ŞI PROBLEMELE EI

1.A.1. Principiul inerției (I)

Un punct material izolat în spațiu are, în raport cu un reper fix, o mişcare uniformă.

Observații și consecințe

Nu există punct material și nici izolare în spațiu, astfel că principiul inerției nu poate fi verificat direct. Valabilitatea acestui principiu este verificată indirect prin consecințele aplicării lui corecte.

Coexistența în spațiu și timp a corpurilor este urmată de acțiuni reciproce ale lor.

Dintre multiplele și complexele *efecte ale interacțiunilor*, mecanica studiază pe cele mai simple:

— *modificarea mişcării mecanice*;
— *modificarea formei corpurilor.*

Sub forma cea mai simplificată, asociind-o cu principiul inerției, modificarea mişcării mecanice înseamnă scoaterea punctului material din mişcarea sa în virtutea inerției, imprimîndu-i-se o *accelerație.*

Accelerația caracterizează *aspectul pur mecanic al interacțiunii.*

Tot sub forma cea mai simplificată, de pildă pentru un sistem de două puncte materiale care se interacționează, un al doilea efect al interacțiunii este *deformația sistemului*, adică mărirea sau micşorarea distanței dintre cele două puncte. În general, un asemenea sistem *se deformează*. Însă, mai există și posibilitatea ca, în anumite condiții speciale, sistemul să nu se deformeze, adică dacă unul din punctele materiale este considerat fix, *celălalt să descrie un cerc avînd primul punct material ca centru.*

În aceste condiții, *interacțiunea se manifestă numai prin imprimarea unei accelerații celui de al doilea punct material, adică numai prin aspectul mecanic.*

Dacă însă distanța dintre punctele materiale ale sistemului se modifică, pe lîngă accelerație mai apare și fenomenul de deformare a sistemului care va reprezenta, se înțelege, sub forma cea mai simplă, *unul din aspectele nemecanice ale interacțiunii.*

Forța. Aspectul mecanic al interacțiunii, în orice moment se reflectă în noțiunea și mărimea de forță care caracterizează *în direcție, sens și intensitate acțiunea unui sistem material asupra unui punct material căruia îi modifică mişcarea, adică îi imprimă o accelerație.*

Forța este una din cele mai importante și mai subtile noțiuni pe care Newton și-a fundamentat mecanica. Folosirea acestei noțiuni a adus importante simplificări studiului mişcării mecanice. Însă, deseori s-a făcut

o gravă eroare identificîndu-se complexul proces de interacţiune care se produce în spaţiu şi timp cu forţa care nu este decît *o caracteristică momentană* (instantanee) a interacţiunii.

Forţa, în procesul de interacţiune, *face legătura dintre forma mecanică şi alte forme nemecanice de mişcare a materiei.*

Cînd asupra particulei, asimilată cu un punct material, acţionează un sistem material oarecare printr-o forţă, pentru simplificarea exprimării se spune că asupra punctului material acţionează o forţă. De asemenea, dacă particula face parte dintr-un solid rigid, se spune că o forţă este aplicată solidului rigid. În acest fel în mecanică se face abstracţie de natura fizică a forţei, care poate fi deosebit de variată, de pildă : cîmpurile gravitaţionale şi electromagnetice, elasticitatea corpurilor, presiunea şi rezistenţa unui fluid, frecările dintre solide etc.

În trecut, asemenea abstractizări au înlesnit pătrunderea concepţiei idealiste după care forţa ar fi o cauză nematerială a mişcării materiei care ar fi inertă, în sensul că nu s-ar mişca decît acţionată de forţe.

Filozofia materialistă bazată pe ştiinţa contemporană a stabilit că: *mişcarea este modul de existenţă a materiei, iar forţa are întotdeauna un substrat material şi este o caracteristică obiectivă a interacţiunii.*

În afară de principiul inerţiei (*I*), în care nu intervine noţiunea de forţă, la baza mecanicii newtoniene mai stau următoarele trei[1] principii : *principiul acţiunii* (*II*), *principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii* (III) şi *principiul paralelogramului forţelor* (IV).

1.A.2. Principiul acţiunii forţei (II)

O forţă imprimă unui punct material de masă independentă de mişcare, o acceleraţie[2] egală cu raportul dintre intensitatea forţei şi masa punctului.

Observaţii şi consecinţe

Acceleraţia este o mărime vectorială ($\bar{a}$), legată de punctul material M, iar masa (m) o mărime scalară pozitivă ; în consecinţă, forţa $\bar{F}$, cauza acceleraţiei, este şi ea o mărime vectorială avînd pe M ca punct de aplicaţie, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\bar{a}$ (fig. 1.4) iar ca expresie :

$$\bar{F} = m\bar{a}. \tag{1.1}$$

Se precizează că (1.1) nu este definiţia forţei ci expresia principiului II al mecanicii newtoniene.

Principiul se extinde şi la punctul cu masa variabilă, expresia lui fiind în acest caz :

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{a})}{dt}. \tag{1.2}$$

Relaţia (1.1) scrisă sub forma :

$$m\bar{a} - \bar{F} = 0 \tag{1.3}$$

este ecuaţia fundamentală a mecanicii newtoniene.

M(m) ā F̄

Fig. 1.4.

[1] Deseori şi perfect justificat, unele observaţii sau consecinţe care însoţesc prezentarea lor, avînd şi ele un caracter principial, sînt enunţate tot ca principii.

[2] În raport cu un reper fix.

Scriind expresia (1.1) sub forma:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

se poate observa că, cu cît m este mai mare, cu atît o aceeași forță îi imprimă punctului material o accelerație mai mică, adică cu atît și opunerea punctului material, la acțiunea de modificare a vitezei lui, este mai mare.

Această observație poate da o explicație inerției corpurilor în mișcare (repaus) și justifică denumirea de *masă inertă* în mișcarea mecanică a materiei.

Masa gravifică apare în mecanica newtoniană la *legea gravitației universale*, dedusă de Newton din observațiile lui Kepler. Scrisă sub forma:

$$|\bar{F}| = k\frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{1.4}$$

exprimă forța de atracție reciprocă a două corpuri, asimilate cu două puncte materiale, situate la distanța d între ele și avînd masele gravifice m_1 și m_2, k fiind constanta universală (Gauss) de valoare $6{,}664 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, independentă de corpurile care se atrag (fig. 1.5).

Dacă se notează cu $\bar{\Gamma}$ forța cu care Pămîntul atrage un punct material de masă m, situat la suprafața lui, ecuația (1.4) s-ar scrie sub forma:

$$|\bar{\Gamma}| = k\frac{mM}{R^2} \tag{1.5}$$

unde R este raza Pămîntului, iar M este masa lui presupusă concentrată în centrul lui de masă.

Dacă Pămîntul ar fi un reper inerțial, pe baza egalității numerice a masei gravifice cu masa inertă s-ar putea scrie și ecuația:

$$m\bar{\gamma} - \bar{\Gamma} = 0 \tag{1.6}$$

la fel ca (1.3), unde $\bar{\gamma}$ este accelerația *gravității*.

Dar Pămîntul nu poate fi conceput ca reper inerțial în special din cauza mișcării sale de rotație în jurul axei polilor. Din această cauză, pentru un observator de pe Pămînt, asupra punctului material ar acționa atît $\bar{\Gamma}$, cît și o forță $\bar{C}$, denumită *centrifugă*, dînd ceea ce se numește greutatea $\bar{G}$ la suprafața Pămîntului:

$$\bar{G} = m\bar{\gamma} + \bar{C},$$

iar ecuația fundamentală la suprafața Pămîntului devine:

$$m\bar{g} - \bar{G} = 0 \tag{1.7}$$

unde $\bar{g}$ este accelerația greutății.

Cea mai importantă completare care trebuie făcută atît la enunțul principiului II, cît și la observațiile precedente are următorul enunț:

Efectul unei forțe nu depinde de starea de mișcare a punctului material și nici de acțiunea altor forțe aplicate lui.

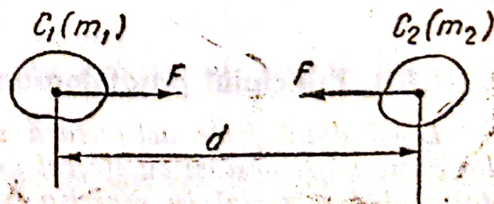


Fig. 1.5.

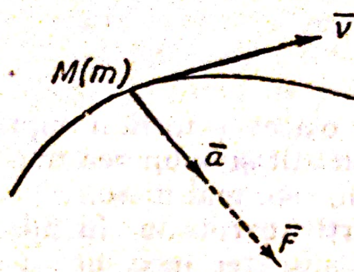


Fig. 1.6.

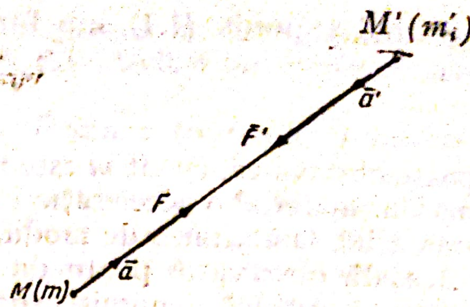


Fig. 1.7.

Adică, indiferent dacă punctul M(m) se mişcă ($\bar{v} \neq 0$) sau este în repaus ($\bar{v} = 0$), acceleraţia imprimată de forţă asupra punctului M este aceeaşi, independent şi de faptul dacă asupra lui mai acţionează sau nu vreo altă forţă (fig. 1.6).

Această completare are caracterul unui *principiu: al independenţei acţiunii forţei.*

1.A.3. Principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii (III)

Forţele de interacţiune reciprocă a două puncte materiale sînt egale şi direct opuse.

Observaţii şi consecinţe

Se înţelege că aici este considerat numai aspectul mecanic al interacţiunii.

Dacă punctul material M(m) este acţionat din afară (de celălalt punct material) cu forţa $\bar{F}$, efectul mecanic asupra lui este:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m},$$

adică imprimă acceleraţia $\bar{a}$, scoţîndu-l din mişcarea pe care ar fi avut-o M în virtutea inerţiei dacă ar fi fost izolat. La rîndul lui, M acţionează asupra lui $M'(m')$ cu o forţă $\bar{F}'$ egală şi direct opusă lui $\bar{F}$ (fig. 1.7). Cele două forţe se găsesc pe acelaşi suport şi în plus mai satisfac şi condiţia:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0. \tag{1.8}$$

Dacă se studiază mişcarea punctului M, atunci $\bar{F}$ reprezintă acţiunea din afară asupra lui, iar $\bar{F}'$ se consideră reacţiunea lui M asupra lui M', care în această problemă este *agentul* (cel care acţionează).

Reacţiunea punctului material M faţă de acţiunea celuilalt punct material M' (agentul), care tinde să-i modifice mişcarea sau repausul, adică tinde să-l scoată din „inerţia" lui, este numită *forţă de inerţie* şi este aplicată punctului M', adică exclusiv agentului.

1.A.4. Principiul paralelogramului forţelor (IV)

Dacă două forţe acţionează simultan asupra unui punct material, efectul lor comun este acelaşi cu efectul unei a treia forţe care ar acţiona singură asupra punctului material în direcţia, sensul şi cu mărimea diagonalei paralelogramului avînd ca laturi cele două forţe aplicate punctului material.

Observații și consecințe

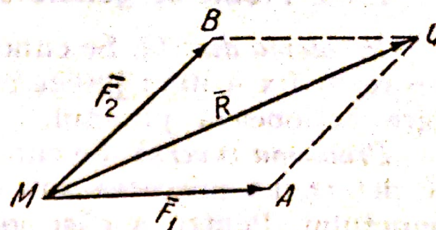


Fig. 1.8.

Cu ajutorul caracteristicilor cunoscute ale forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ care acționează simultan asupra punctului material M, folosind o scară convenabilă, se construiesc vectorii $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ (fig. 1.8) care reprezintă aceste forțe.

Dacă se completează paralelogramul $MABC$, vectorul $\overline{MC}$ reprezintă, la aceeași scară, cea de a treia forță $\bar{R}$, care, dacă ar acționa singură asupra lui M, ar produce același efect cu efectul comun al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$.

Relația vectorială a principiului paralelogramului este:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R} \tag{1.9}$$

completată cu faptul că forțele acționează punctul material M. De aceea $\bar{R}$ se numește *rezultanta forțelor* $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, care sînt componentele forței $\bar{R}$.

Dacă nu se precizează că forțele sînt aplicate aceluiași punct material M relația (1.9) *nu reprezintă altceva decît o însumare vectorială.*

Deseori, principiul paralelogramului forțelor este omis din rîndul principiilor mecanicii newtoniene, fiind aplicat sub forma regulii de însumare vectorială. În acest fel se confundă *rezultanta* cu *suma*, se pierde din vedere că la baza calculului vectorial (disciplină matematică) a stat mecanica newtoniană (disciplină fizică) și nu invers. De altfel și Newton a enunțat după primele trei principii (pe care le-a denumit axiome sau legi) și două corolare care justifică completarea principiilor cu cel al paralelogramului forțelor. Încercările făcute ulterior de a demonstra matematic acest principiu nu au dat rezultate.

Și la acest principiu este de făcut completarea că *acțiunea unei forțe este independentă de mișcarea punctului material M și de efectul produs de cealaltă forță.*

Cîmpul de aplicare al acestui principiu este larg. Sub forma *principiului suprapunerii efectelor* el este întîlnit și în alte discipline, avînd însă o valabilitate condiționată[1].

În cazul particular în care:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0,$$

forțele aplicate punctului material M sînt egale și direct opuse, ele au asupra punctului material același efect ca și forța $\bar{F} = 0$, adică *efect nul, ca și cum punctul material ar fi izolat.* În acest caz punctul material se mișcă în virtutea inerției, iar dacă era în repaus, rămîne în această stare. Acesta este cazul *forțelor în echilibru.* Realizarea unor experiențe de acest fel constituie *verificări indirecte ale principiului inerției.*

Două puncte materiale se interacționează reciproc cu forțele $\bar{F}$ și $\bar{F}'$ egale și direct opuse:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0.$$

Aceste forțe nu se echilibrează, deoarece ele nu acționează asupra aceluiași punct material.

---

[1] Astfel, în Rezistența materialelor, domeniul de valabilitate este condiționat de aplicabilitatea și după însumare a legii lui Hooke.

1.A.5. Probleme generale ale mecanicii punctului material

Problema directă. Se cunoaşte mişcarea sau poziţia de repaus în raport cu un reper fix a unui punct material, să se determine caracteristicile forţelor care acţionează punctul.

Problema inversă. Se cunosc forţele care acţionează un punct material, să se determine mişcarea sau poziţia de repaus în raport cu un reper fix a punctului. Pentru a găsi soluţia unică a problemei inverse, mai trebuie cunoscute şi condiţiile iniţiale[1] ale mişcării.

Problema mixtă. Se cunosc unele din caracteristicile mişcării, sau ale poziţiei de repaus, în raport cu un reper fix şi unele din caracteristicile forţelor care îl acţionează, să se determine caracteristicile necunoscute.

---

[1] adică: poziţia iniţială ($\bar{r}_0$) şi viteza iniţială ($\bar{v}_0$).

Capitolul 2

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE. ELEMENTE DE TEORIA VECTORILOR ALUNECĂTORI

2.A. PREZENTAREA TEORETICA

2.A.1. Forța,

Forța, o caracteristică importantă a interacțiunii corpurilor, este o mărime vectorială. Are punct de aplicație, direcție, sens și intensitate (mărime). Se convine a se considera ca punct de aplicație, un punct material al corpului acționat. *Deoarece corpurile sînt deformabile,* forța poate fi reprezentată *numai printr-un vector legat de punct.*

Una din problemele de bază ale mecanicii este reducerea sistemului de forțe aplicat unui corp, adică găsirea unui sistem de forțe cît mai simplu cu putință și care să fie echivalent (să producă același efect) cu sistemul inițial. Dacă forțele acționează corpuri deformabile, operația de simplificare se poate folosi numai în cazul forțelor care au același punct de aplicație. La baza operației stă principiul paralelogramului forțelor. Un sistem de forțe concurente în același punct este echivalent — și se poate înlocui — cu o forță unică : rezultanta sistemului. Uneori, rezultanta poate fi nulă ; atunci *sistemul de forțe se echilibrează.*

În cazul corpurilor solide, la care deformațiile rezultate din acțiunile forțelor *sînt neesențiale* pentru problemele de mișcare mecanică, se poate recurge la *modelul de solid rigid.* În acest caz forța poate fi reprezentată printr-un *vector alunecător.* Adică oricare din forțele care acționează solidul poate fi deplasată prin alunecare pe suportul ei, cu condiția ca noul punct de aplicație al forței să fie tot un punct al solidului sau legat rigid de acesta.

Observație

In nici o ipoteză fizică forța nu poate fi reprezentată printr-un vector liber.

2.A.2. Reducerea sistemului de forțe

Reducerea unui sistem de forțe la un sistem echivalent, dar cît mai simplu, se face cu ajutorul următoarelor cinci operații elementare de echivalență :

— alunecarea forței pe suportul ei ;
— înlocuirea a două forțe concurente prin rezultanta lor :
— suprimarea a două forțe egale și de sens contrar aplicate în același punct (forțe direct opuse) ca avînd o rezultantă nulă, adică avînd un efect nul ;
— adăugarea unui sistem de două forțe direct opuse, avînd un efect nul ;
— înlocuirea unei forțe prin cele două componente rezultate din descompunerea ei după două drepte concurente în același punct pe suportul forței și situate în același plan cu forța.

La baza acestor operații elementare de echivalență stau : *modelul de solid rigid, principiul paralelogramului forțelor și consecințele imediate ale acestui principiu.*

2.A.3. Cuplu de forțe

Dacă asupra unui solid rigid ar acționa două forțe cu suporturile paralele, prin aplicarea operațiilor elementare de echivalență acest sistem de forțe se poate reduce în general la o rezultantă unică. Sistemul nu se poate echilibra decît dacă forțele ar fi egale și direct opuse. Uneori, însă, forțele sînt astfel încît oricît și oricum s-ar aplica operațiile de echivalență sistemul nu este reductibil la o rezultantă unică. Acest caz special apare numai dacă cele două forțe sînt egale, de sens contrar și situate pe două suporturi paralele distincte. Sistemul constituie un nou *element mecanic* — după forță — și se numește *cuplu de forțe.*

Observație

Efectul unui cuplu de forțe aplicat unui solid rigid diferă de efectul unei singure forțe aplicată aceluiași solid, în aceleași condiții.

2.A.4. Torsorul de forțe

Dacă asupra unui solid rigid ar acționa două forțe cu suporturile nesituate în același plan, orice operații de echivalență s-ar aplica acestui sistem, el este ireductibil. Sistemul nu se echilibrează, nu se poate reduce la o rezultantă unică și nici la un cuplu de forțe. În schimb, acest sistem poate fi întotdeauna înlocuit printr-un sistem compus dintr-o forță și dintr-un cuplu de forțe, forța nefiind situată în planul cuplului. Acest sistem se numește *torsor de forțe* și este cel de al treilea *element mecanic ireductibil.*

Efectul unui torsor aplicat unui solid rigid este cu totul altul decît al unui cuplu sau al unei singure forțe aplicată solidului, în condiții mecanice identice.

Observație

Dacă forța $\bar{F}$ ar fi situată în planul (P) al cuplului, este evident că sistemul nu ar mai constitui un *torsor veritabil*, deoarece aplicînd operațiile elementare de echivalență s-ar obține, întotdeauna, reducerea sistemului la *o rezultantă unică.*

Reciproc, orice forță $\bar{F}$, de pe suportul ei (D), poate fi înlocuită printr-un sistem compus dintr-o forță egală cu $\bar{F}$, dar situată pe un suport paralel (D') și un cuplu de forțe $(\bar{F}, \bar{F}')$ al cărui plan (P) este determinat de cele două suporturi paralele (D) și (D') (fig. 2.A.1).

Pentru aceasta, este de ajuns ca pe o dreaptă (D') paralelă cu (D) să se aplice forțele $\bar{F}$ și $\bar{F}'$, astfel ca:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0.$$

Forța $\bar{F}$ de pe (D) cu F' formează un cuplu care, împreună cu forța $\bar{F}$ de pe (D'), reprezintă un sistem de forțe echivalent cu forța $\bar{F}$ de pe (D), forță de la care s-a pornit. Și acest sistem — o forță și un cuplu de forțe — se

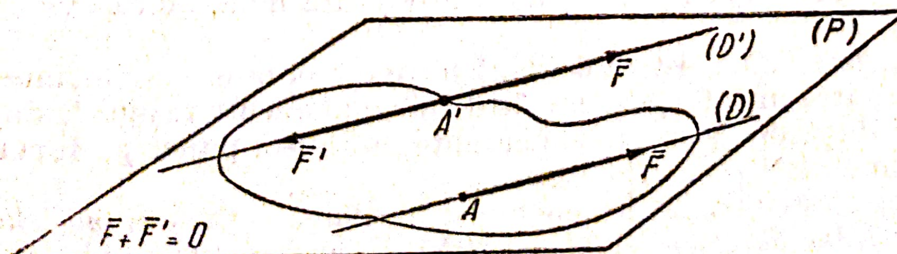


Fig. 2.A.1

poate numi *torsor*. Însă acest torsor fiind reductibil, *nu este* un torsor *veritabil* şi va fi denumit *torsor formal*.

Torsorul formal stă la baza unei *metode de reducere a unui sistem oarecare de forţe aplicat unui solid rigid*.

2.A.5. Vectori alunecători

În mecanică, în afară de forţe se mai întîlnesc şi alte mărimi care pot fi reprezentate prin vectori alunecători care vor necesita operaţii de reducere. De aceea, în cadrul lucrării de faţă, s-a extins problema reducerii unui sistem de forţe acţionînd un solid rigid la aceea a reducerii unui sistem de vectori alunecători.

Pentru ca această extindere să dea rezultate valabile, este necesar ca mărimilor reprezentate prin vectori alunecători să li se poată aplica definiţiile şi operaţiile elementare de echivalenţă care se aplică forţelor acţionînd un solid rigid.

Caracteristicile unui vector alunecător sîn: *dreapta suport, sensul şi mărimea*. Oricare din punctele dreptei suport poate fi considerat ca origine a vectorului, iar direcţia vectorului este aceeaşi cu direcţia dreptei suport. Dacă (D) este dreapta suport iar $\bar{V}$ un vector liber, care prezintă pe lîngă direcţie şi celelalte caracteristici ale vectorului alunecător, adică sensul şi mărimea, vectorul, alunecător poate fi notat simbolic prin $(\bar{V}, D)$.

2.A.6. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct

Momentul unui vector alunecător $(\bar{V}, D)$, în raport cu un punct O, este prin definiţie:

$$\overline{M}_0 = \bar{r} \times \bar{V},$$

un *vector legat de punctul O* (fig. 2.A.2), perpendicular pe planul (P) determinat de suportul (D) şi punctul O, orientat în sensul în care observatorul avînd picioarele în O şi capul plasat în sensul vectorului moment vede originea vectorului alunecător la dreapta sa şi vîrful acestuia la stînga sa. Modulul este:

$$|\overline{M}_0| = d\,|\bar{V}|,$$

d fiind distanţa de la O la (D).

Proprietăţile momentului vectorului alunecător $(\bar{V}, D)$ în raport cu un punct O sînt:

— $\overline{M}_0$ este invariant în raport cu operaţia de alunecare a vectorului pe suport.

— $\overline{M}_0$ este nul, $\bar{V}$ nefiind nul, dacă (D) trece prin O.

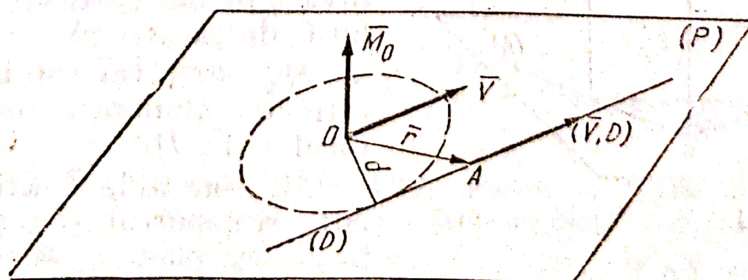


Fig. 2.A.2

— Împreună cu $\bar{V}$ ca vector liber, $\bar{M}_0$ determină, în mod univoc, vectorul alunecător ($\bar{V}$, $\bar{D}$).

— ($\bar{V}$, $\bar{M}_0$) sînt coordonatele vectoriale, în raport cu reperul avînd originea în O, ale vectorului alunecător.

— Triedrul ($\bar{r}$, $\bar{V}$, $\bar{M}_0$) are aceeaşi orientare cu triedrul drept.

Observaţie

Noţiunea de moment este fără semnificaţie pentru un vector liber.

2.A.7. Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă

Momentul unui vector alunecător ($\bar{V}$, D) în raport cu o axă (Δ) este, prin definiţie, proiecţia ortogonală pe (Δ) a momentului $\bar{M}_0$, în raport cu un punct oarecare O al axei (Δ), a vectorului ($\bar{V}$, D) (fig. 2. A.3), adică:

$$\bar{M}_\Delta = pr_\Delta \bar{M}_0$$

Convenţie

Deoarece proiecţia unui vector pe o dreaptă sau pe un plan este un vector, proiecţia putîndu-se face ortogonal sau paralel cu o direcţie dată, se convine că proiecţia ortogonală[1] pe o axă este *tot un vector* şi nu un scalar, deoarece proiectarea este în primul rînd o operaţie geometrică şi în al doilea rînd se determină valoarea scalară, în raport cu axa, a momentului şi care se obţine folosind produsul scalar:

$$\bar{M}_0 \bar{u} = M_\Delta; \quad \bar{M}_\Delta = M_\Delta \bar{u},$$

unde $\bar{u}$ este versorul axei (Δ).

Consecinţă

Momentul unui vector alunecător ($\bar{V}$, D) în raport cu o axă (Δ) mai este şi momentul proiecţiei vectorului pe un plan perpendicular pe axă, în raport cu punctul în care axa înţeapă planul. Adică:

$$\bar{M}_\Delta = \overline{oa} \times \bar{v}.$$

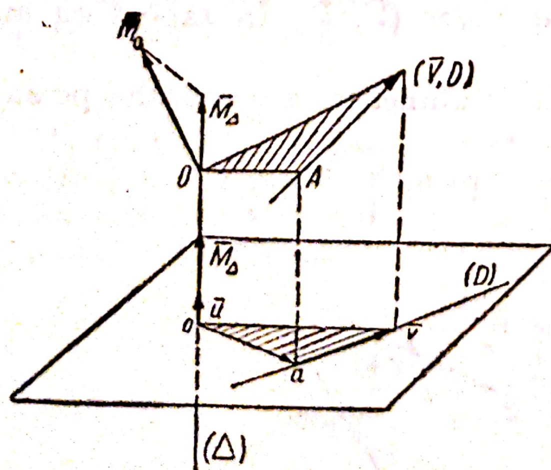


Fig. 2.A.3

Proprietăţile momentului vectorului alunecător ($\bar{V}$, D) *în raport cu axa* (Δ) sînt:

— $\bar{M}_\Delta$ este *un vector alunecător*, fiind invariant în raport cu poziţia punctului O de pe axa (Δ).

— $\bar{M}_\Delta$ este invariant în raport cu operaţia de alunecare pe suport a vectorului ($\bar{V}$, D).

— $\bar{M}_\Delta$ este nul, $\bar{V}$ nefiind nul, ori de cîte ori suportul (D) şi axa (Δ) sînt în acelaşi plan.

[1] sau oblică.

2.A.8. Teorema momentelor (Varignon)[1]

Dacă un sistem de vectori alunecători *se reduce la un vector rezultant unic, momentul vectorului rezultant este egal cu momentul rezultant al sistemului*[2].

Definiție. *Momentul rezultant*, în raport cu un punct sau o axă, este suma vectorială a momentelor, în raport cu același punct sau aceeași axă, a vectorilor alunecători ai sistemului.

Observații:

a) Cu ajutorul teoremei momentelor se poate determina suportul vectorului rezultant al unui sistem dat de vectori alunecători.

b) Dacă un sistem de vectori alunecători se reduce la un cuplu, este evident că nu se poate aplica teorema momentelor, deoarece nu există vector rezultant. În schimb apare o proprietate deosebit de importantă, și anume, *momentul rezultant* al unui sistem de vectori alunecători care se reduce la un cuplu *este invariant în raport cu poziția punctului* față de care se calculează momentele vectorilor sistemului.

Proprietățile cuplului de vectori alunecători sînt:

— Momentul rezultant al celor doi vectori alunecători ai cuplului, în raport cu orice punct din spațiu este un vector invariant care se numește *momentul cuplului*. El este un *vector liber perpendicular* pe planul cuplului avînd *sensul* astfel încît un observator (fig. 2.A.4), așezat între suporturile celor doi vectori ai cuplului, cu capul în sensul vectorului moment, să vadă originile vectorilor la dreapta sa și extremitățile lor la stînga sa, sau astfel încît triedrul construit cu vectorii $\overline{A'A}$, $\overline{V}$, $\overline{M}$ să fie un triedru drept, iar modulul $|\overline{M}| = |\overline{V}|\ d$, unde d este distanța dintre suporturile paralele ale celor doi vectori ai cuplului.

— Vectorul $\overline{M}$ caracterizează cuplul și reprezintă măsura lui. Dacă cuplul este compus dintr-o pereche de forțe aplicate unui solid rigid, *momentul măsoară efectul acestui cuplu de forțe în mișcarea de rotație a solidului.*

Unui cuplu de vectori alunecători i se pot aplica următoarele *operații de echivalență*:

Să fie deplasat prin *translație* în planul său sau în alt plan paralel.

Să fie *rotit* în jurul unui ax perpendicular pe planul său.

Să fie *deformat* prin modificarea modulului vectorilor $|\overline{V}|$ și a distanței d dintre suporturi cu condiția să nu se schimbe nici sensul cuplului și nici modulul momentului său.

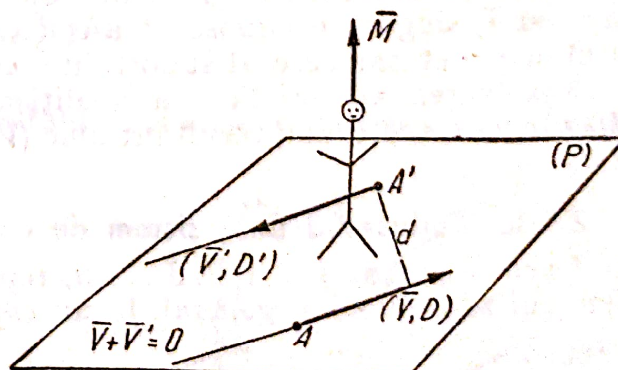


Fig. 2.A.4

[1] Stabilită de Varignon (1654—1722) pentru un sistem de forțe se extinde și asupra unui sistem de vectori alunecători. Teorema este o consecință a distributivității produsului vectorial.

[2] Se dă și următorul enunț concis: *Momentul rezultantei este egal cu momentul rezultant*, în scopul precis de a se evita confuziile care se fac deseori.

Două cupluri avînd momente egale (ca vectori) sînt echivalente, deoarece prin operaţii de echivalenţă aplicabile atît cuplurilor cît şi vectorilor alunecători se poate transforma unul în celălalt.

2.A.9. Reducerea unui sistem de n vectori alunecători cu suporturi concurente

Dacă $(\bar{V}_i, D_i)$, unde $i = 1, 2, 3 \dots n$, reprezintă cei n vectori alunecători ale căror suporturi trec printr-un punct A, sistemul se reduce la un vector rezultant unic:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i,$$

al cărui suport trece şi el prin A.

Acest rezultat se obţine aplicîndu-se, de cîte ori este nevoie, operaţiile elementare de echivalenţă sau construindu-se poligonul care reprezintă suma vectorială $\bar{V}$ a vectorilor $\bar{V}_i$ ca şi cum ar fi vectori liberi, iar apoi ducîndu-se prin A o paralelă cu direcţia lui $\bar{V}$ şi care va fi suportul vectorului rezultant unic.

Observaţii

Dacă poligonul se închide, $\bar{V} = 0$, iar sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero (în cazul forţelor acţionînd un solid rigid, sistemul se echilibrează).

Dacă punctul A nu se află în cadrul desenului, pentru determinarea suportului, se aplică teorema lui Varignon care va da momentul vectorului rezultant unic **ca** fiind egal cu momentul rezultant al sistemului de vectori alunecători dat:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i,$$

unde $\bar{r}_i$ reprezintă vectorul de poziţie al unui punct A_i al suportului (D_i) în raport cu un reper cu originea într-un punct arbitrar O, toţi vectori cunoscuţi, iar $\bar{r}$, singura necunoscută a ecuaţiei vectoriale, este vectorul de poziţie al unui punct oarecare al suportului vectorului rezultant unic.

Rezolvarea vectorială sau analitică permite determinarea suportului (D) şi deci a vectorului rezultant unic $(\bar{V}, D)$.

2.A.10. Reducerea unui sistem de cupluri de vectori alunecători

Dacă $\bar{M}_i$, unde $i = 1, 2, 3 \dots n$, reprezintă momentele celor n cupluri, sistemul se reduce, în general, la un *cuplu rezultant* al cărui moment este:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i.$$

Deoarece momentul $\bar{M}_i$ al unui cuplu este egal cu momentul rezultant al vectorilor $(\bar{V}_i, D_i)$ şi $(\bar{V}'_i, D'_i)$, *momentul cuplului rezultant este egal cu momentul rezultant al tuturor vectorilor cuplurilor sistemului* în raport cu orice punct O ales arbitrar.

Observații

Dacă $\bar{M} = 0$ sistemul este echivalent cu zero.

Deoarece $\bar{V}_i + \bar{V}'_i = 0$ pentru fiecare cuplu și cum $\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ iar $\bar{V}' = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}'_i$, rezultă: $\bar{V} + \bar{V}' = 0$.

Un sistem de cupluri de forțe aplicate unui solid rigid se echilibrează dacă momentul cuplului rezultant este nul.

2.A.11. Reducerea unui sistem oarecare de n vectori alunecători cu suporturi dispuse oricum în spațiu

Se notează acest sistem de vectori cu $(\bar{V}_i, D_i)$, unde i poate lua orice valoare întreagă între 1 și n.

Se consideră un punct O oarecare în spațiu.

Se aplică *metoda torsorului formal*, iar punctul O primește denumirea de *centru de reducere*. Cînd se trece la exprimarea analitică, acest punct devine originea sistemului de referință (de obicei cartezian). Dacă vectorului $(\bar{V}_i, D_i)$ i se adaugă în O vectorii $\bar{V}_i$ și $\bar{V}'_i$ (fig. 2.A.5) astfel încît: $\bar{V}_i + \bar{V}'_i = 0$, sistemul celor trei vectori este echivalent cu $(\bar{V}_i, D_i)$.

Deci oricare din vectorii $(\bar{V}_i, D_i)$ este echivalent cu vectorul echipolent $\bar{V}_i$ cu originea în O la care se adaugă cuplul ($\bar{V}_i$ din A_i și $\bar{V}'_i$ din O), de moment:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{V}_i.$$

Deci $(\bar{V}_i, D_i)$ a fost înlocuit cu un torsor formal, echivalent cu $(\bar{V}_i, D_i)$.

Aplicînd aceeași operație și celorlalți vectori alunecători ai sistemului $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$, se obține un sistem de n torsori formali compuși din n vectori $\bar{V}_i (i = 1, 2, 3 \ldots n)$ cu originea în O și din n cupluri de vectori alunecători de momente $\bar{M}_i$, sistem echivalent cu sistemul celor n vectori alunecători inițial considerat.

Reducînd cei n vectori $\bar{V}_i (i = 1, 2, 3 \ldots n)$ cu originea în O, se găsește *vectorul rezultant* cu originea în O al sistemului:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i,$$

la care trebuie adăugat și cuplul rezultant al celor n cupluri al cărui moment este:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i,$$

adică momentul cuplului rezultant este *chiar momentul rezultant*, în raport cu centrul O al sistemului considerat de vectori alunecători, sistem care în acest fel este echivalent cu un torsor de vectori alunecători reprezentat prin $\bar{V}$ și $\bar{M}$.

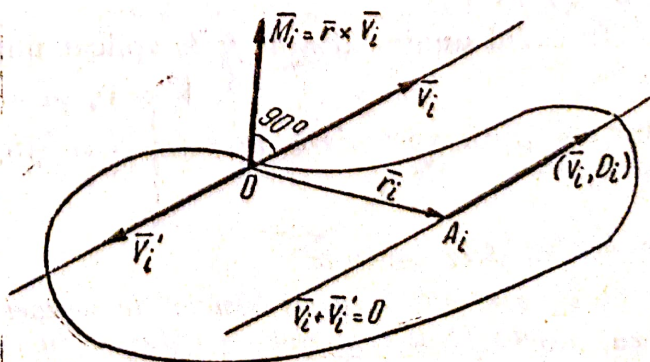


Fig. 2.A.5

Observație importantă

Nu se va confunda *cuplul* cu *momentul* care îl reprezintă și care nu este decît *măsura* cuplului.

2.A.12. Invarianții reducerii

Primul invariant al sistemului de vectori alunecători este *vectorul rezultant*, deoarece acesta nu depinde de centrul de reducere.

Momentul rezultant nu este, în general, un invariant (fig. 2.A.6)

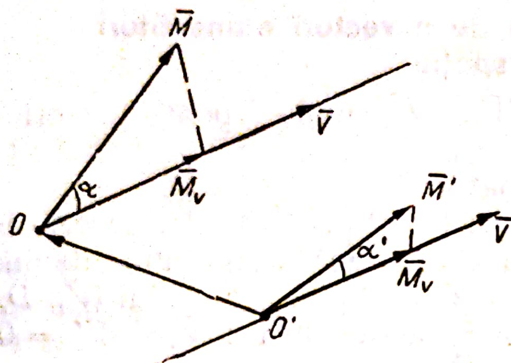


Fig. 2.A.6.

Astfel, într-un nou centru de reducere O', momentul rezultant al sistemului este :

$$\bar{M}' = \bar{M} + \overline{O'O} \times \bar{V},$$

în schimb, proiecția ortogonală a momentului rezultant pe direcția vectorului rezultant este cel de al doilea invariant al sistemului, adică :

$$\bar{M}'_v = \bar{M}_v.$$

Altfel spus : *momentul rezultant în raport cu axa vectorului rezultant nu depinde de centrul de reducere.*

2.A.13. Discuția reducerii pe baza invarianților $\bar{V}$ și $\bar{M}_v$

Cazul I : $\bar{V} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$, sistemul de vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$, unde $i = 1, 2, 3 \ldots n$, este echivalent în orice centru de reducere cu un *torsor veritabil.*

Cazul II : $\bar{V} \neq 0$, $\bar{M}_v = 0$, proiecția momentului rezultant $\bar{M}$ pe direcția lui $\bar{V}$ fiind nulă, torsorul nu mai este veritabil, iar sistemul este echivalent cu un vector rezultant unic.

Dacă, în particular și $\bar{M} = 0$, înseamnă că vectorul rezultant trece prin 0, centrul de reducere ales.

Cazul III : $\bar{V} = \bar{O}$ în orice centru de reducere, dar $\bar{M}' = \bar{M} = \bar{C}$, adică momentul rezultant este el acum cel de al doilea invariant. Sistemul se reduce la un cuplu al cărui moment este momentul rezultant al sistemului.

Cazul IV : $\bar{V} = 0$, $\bar{M} = 0$, sistemul este echivalent cu zero, în orice centru de reducere.

Observație

În cazul unui *sistem de forțe* aplicat unui solid rigid

$$\bar{V} = 0, \ \bar{M} = 0$$

sînt condițiile vectoriale, *necesare și suficiente*, pentru echilibrul sistemului de forțe.

2.A.14. Axa centrală

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători este, prin definiție locul geometric al centrelor de reducere în care torsorul echivalent cu sistemul de vectori alunecători este minimal, adică momentul rezultant al sistemului $\bar{M}$ este egal cu $\bar{M}_v$ în aceste centre de reducere.

Sau altfel: *în aceste centre de reducere momentul rezultant este coliniar cu vectorul rezultant al sistemului.*

Pentru determinarea axei centrale a unui sistem de vectori alunecători $(\bar{V}_i, D_i)$ se calculează, într-un centru arbitrar O de reducere (fig. 2.A.7), vectorul rezultant $\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ și momentul rezultant $\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i$ ale torsorului echivalent cu sistemul.

Fig. 2.A.7.

Se caută un nou centru de reducere O' cu vector de poziție necunoscut $\bar{r}$, în care $\bar{M}'$ să fie minimal.

În centrul O, $\bar{M}$ are două componente: $\bar{M}_v$ și $\bar{\mu}$, prima dirijată după $\bar{V}$, iar cealaltă după perpendiculara pe $\bar{V}$ în planul $(\bar{V}, \bar{M})$. În centrul O' trebuie ca $\bar{M}'$ să se reducă numai la $\bar{M}_v$, adică:

$$\bar{M}' = \bar{M} + \overline{O'O} \times \bar{V} = \bar{M}_v + \bar{\mu} - \bar{r} \times \bar{V}$$

din care se obține condiția:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{\mu},$$

o ecuație vectorială avînd pe $\bar{r}$ ca necunoscută.

Uneori este mai comod să se exprime că $\bar{M}'$ este colinear cu $\bar{V}$.

Alteori se exprimă $\bar{M}$ analitic și se pun condițiile de minim pentru $\bar{M}'^2$ ca funcție de coordonatele x, y, z ale centrului necunoscut de reducere O'.

Observație

Axa centrală este o dreaptă, iar în cazul unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid în repaus, acțiunea torsorului minimal se poate asocia cu deplasarea unui șurub în raprt cu piulița, sau mai general, cu o mișcare elicoidală.

2.A.15. Reducerea unor sisteme particulare de vectori alunecători

Vectori cu suporturile situate în același plan. În raport cu O, un centru de reducere din planul (P) al suporturilor (fig. 2.A.8.), toți vectorii $(\bar{V}_i, D_i)$ sînt înlocuiți prin torsori formali $\bar{V}_i$ cu originile în O și cupluri de momente:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{V}_i$$

perpendicular pe planul (P).

Sistemul este echivalent cu un *torsor formal* compus din vectorul rezultant: $\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ și cuplul de moment egal cu momentul rezultant: $\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i$ perpendicular pe planul (P). Siste-

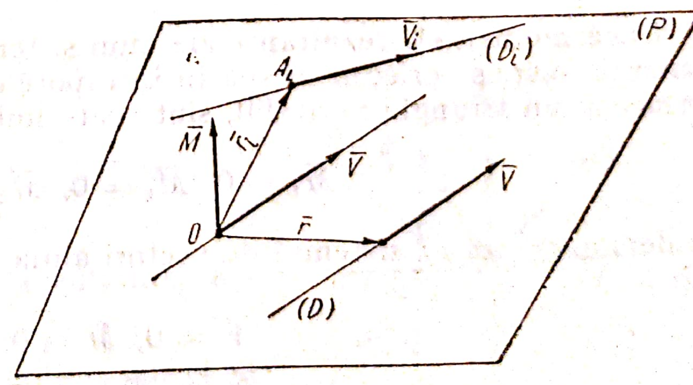


Fig. 2.A.8.

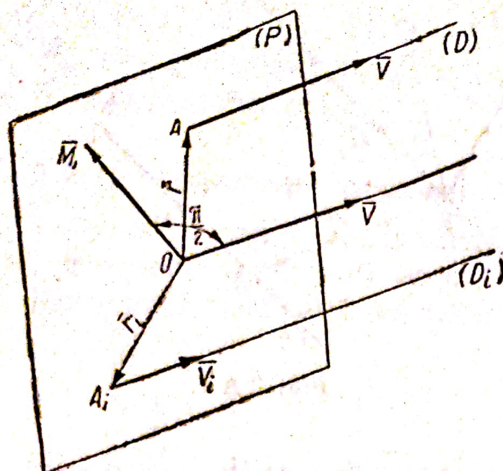


Fig. 2.A.9.

mul se reduce la un *vector rezultant unic* $\bar{V}$ al cărui suport se află rezolvînd ecuaţia vectorială avînd pe $\bar{r}$ ca necunoscută:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{M},$$

obţinută prin aplicarea teoremei momentelor.

Discuţie

$\bar{V} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$, vector rezultant unic deoarece: $\bar{V} \cdot \bar{M} = 0$;

$\bar{V} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$, vector rezultant unic care trece prin centrul de reducere O;

$\bar{V} = 0$, $\bar{M} \neq 0$, cuplu de moment $\bar{M}$;

$\bar{V} = 0$, $\bar{M} = 0$, sistemul este echivalent cu zero.

Vectori cu suporturile paralele în spaţiu şi sensuri arbitrare. Într-un plan (P) perpendicular pe direcţia comună a vectorilor $(\bar{V}_i, D_i)$ ai sistemului se consideră un centru de reducere oarecare O (fig. 2.A.9). Toţi vectorii pot fi înlocuiţi prin torsori formali, cu vectorii $\bar{V}_i$ în O şi cuplurile de momente:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{V}_i$$

situate în planul (P).

Sistemul este echivalent cu un *torsor formal compus din vectorul rezultant* $\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ şi *cuplul de moment* egal cu *momentul rezultant* $\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{V}_i$ situat în planul (P), adică perpendicular pe $\bar{V}$.

Deci, sistemul se reduce la un *vector rezultant unic* $\bar{V}$, al cărui suport se determină prin rezolvarea ecuaţiei vectoriale deduse din teorema momentelor:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{M},$$

unde $\bar{r}$ este necunoscută.

Discuţia este identică cu cea de la cazul vectorilor coplanari.

2.A.16. Teoremă ajutătoare

Dacă momentele rezultante ale unui sistem de vectori alunecători cu suporturile dispuse oricum în spaţiu în raport cu trei centre O_1, O_2 şi O_3 care formează un triunghi veritabil, sînt toate nule, adică:

$$\bar{M}_1 = 0,\ \bar{M}_2 = 0,\ \bar{M}_3 = 0,$$

se demonstrează că sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero, adică:

$$\bar{V} = 0,\ \bar{M} = 0,$$

în raport cu orice centru de reducere.

2.A.17. Indicații generale pentru reducerea expresiilor analitice

În mecanica teoretică, un rol de o utilitate și de o importanță incontestabilă îl au calculele și expresiile analitice în raport cu diferite sisteme de referință. De obicei, se stabilesc aceste expresii pentru cazurile cele mai generale sub aspectul unor formule tocmai bune de memorat, iar pentru rezolvarea exercițiilor și problemelor particulare se fac înlocuirile necesare în aceste formule generale, De aici rezultă, în primul rînd, o substituire a procesului de gîndire prin operația quasiautomată a înlocuirilor în formule, urmată de micșorarea atenției și slăbirea controlului, ceea ce poate fi o sursă de erori.

De aceea, pentru a se evita memorarea formulelor generale, în această lucrare se recomandă următoarele:

Se va da o atenție deosebită pentru a înțelege temeinic și a reține definițiile, proprietățile, principiile, teoremele și metodele — care constituie bazele disciplinei — și fără de care, toate formulele și rezultatele memorate nu înseamnă, decît prea puțin, cunoaștere.

Se va aplica definiția, proprietatea, principiul, teorema sau metoda *direct* asupra *problemei particulare*, fără a se trece prin formula generală.

Dacă definiția, proprietatea, principiul sau teorema se prezintă sub forma unei relații vectoriale, se va traduce această relație scalar, folosindu-se expresiile complexe, cunoscute din geometria analitică, însă *direct pentru cazul aplicației* și *nu* pentru *cazul general*. În acest fel calculele sînt mai simple, cu mai puține erori, controlul fiind direct și mai ușor.

2.B. APLICAȚII LA REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

2.B.1. Să se determine rezultanta forțelor plane concurente în punctul O. Se dau $|\bar{F}_1| = 100$ daN; $|\bar{F}_2| = 141$ daN; $|\bar{F}_3| = 200$ daN; $|\bar{F}_4| = 100$ daN (fig. 2.B.1).

R e z o l v a r e. Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = F_1 \cos 0° + F_2 \cos 45° - F_3 \cos 60° - F_4 \cos 30° =$$

$$= 100 + 141 \frac{\sqrt{2}}{2} - 200 \frac{1}{2} - 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 13{,}4 \text{ daN};$$

$$Y = \Sigma Y_i = F_1 \sin 0° + F_2 \sin 45° + F_4 \sin 60° - F_4 \sin 30° =$$

$$= 141 \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \frac{1}{2} = 223{,}2 \text{ daN}.$$

Rezultanta este:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} = 13{,}4\bar{i} + 223{,}2\bar{j}.$$

Modulul rezultantei este

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{13{,}4^2 + 223{,}2^2} =$$
$$= 223{,}6 \text{ daN}.$$

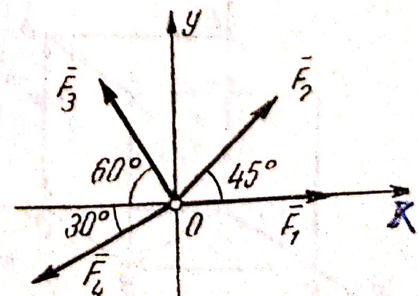


Fig. 2.B.1

Unghiul format de suportul rezultantei $\bar{R}$ cu axa Ox este dat de relația:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{223{,}2}{13{,}4} = 16{,}78, \text{ deci } \alpha = 86°35'24''.$$

2.B.2. Să se calculeze rezultanta forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ dirijate ca în figura 2.B.2. Se dau $|\bar{F}_1| = 10\sqrt{17}$ daN; $|\bar{F}_2| = 25$ daN; $|\bar{F}_3| = 8\sqrt{13}$ daN, precum și l.

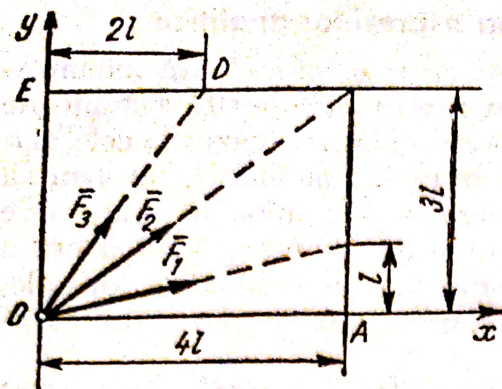


Fig. 2.B.2

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de axe din figură.

Cosinusurile directoare ale suporturilor forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ sînt:

$$\cos\alpha = \cos(\bar{F}_1, Ox) = \frac{4}{\sqrt{17}};$$

$$\cos\beta = \cos(\bar{F}_2, Ox) = \frac{4}{5};$$

$$\cos\gamma = \cos(\bar{F}_3, Ox) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Rezultă: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin\beta = \frac{3}{5}$; $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = 10\sqrt{17}\frac{4}{\sqrt{17}} + 25\frac{4}{5} + 8\sqrt{13}\frac{2}{\sqrt{13}} = 76 \text{ daN};$$

$$Y = \Sigma Y_i = 10\sqrt{17}\frac{1}{\sqrt{17}} + 25\frac{3}{5} + 8\sqrt{13}\frac{3}{\sqrt{13}} = 49 \text{ daN}.$$

Rezultanta este:

$$\bar{R} = 76\bar{i} + 49\bar{j}.$$

Modulul rezultantei este:

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{76^2 + 49^2} = 90{,}427 \text{ daN}.$$

Unghiul dintre suportul forței rezultantei și axa Ox este dat de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{49}{76} = 0{,}645$, de unde $\alpha = 32°48'40''$.

2.B.3. Să se determine rezultanta forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ aplicate în vîrful O al cubului $OABCDEFG$, ca în figura 2.B.3. Se dau $|\bar{F}_1| = 10$ daN; $|\bar{F}_2| = 15\sqrt{2}$ daN; $|\bar{F}_3| = 20$ daN; $|\bar{F}_4| = 25\sqrt{3}$ daN.

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de axe din figură.

Cosinusurile directoare ale suportului forței $\bar{F}_2$ sînt: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0, iar ale forței $\bar{F}_4$ sînt: $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

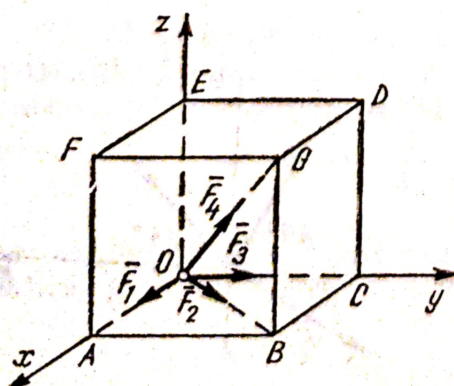


Fig. 2.B.3

Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = F_1 + F_2\frac{\sqrt{2}}{2} + F_4\frac{\sqrt{3}}{3} = 10 + 15 + 25 = 50 \text{ daN};$$

$$Y = \Sigma Y_i = F_2\frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 + F_4\frac{\sqrt{3}}{3} = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ daN};$$

$$Z = \Sigma Z_i = F_4\frac{\sqrt{3}}{3} = 25 \text{ daN}.$$

Rezultanta este:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} = 50\bar{i} + 60\bar{j} + 25\bar{k}.$$

Modulul rezultantei este:

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{50^2 + 60^2 + 25^2} = 80{,}01 \text{ daN}.$$

TI 25 COMPUTER

Cosinusurile directoare ale suportului forței rezultante sînt:

$$\cos\alpha = \cos(\bar{R}, Ox) = \frac{X}{|\bar{R}|} = \frac{50}{80{,}01} = 0{,}625;$$

$$\cos\beta = \cos(\bar{R}, Oy) = \frac{Y}{|\bar{R}|} = \frac{60}{80{,}01} = 0{,}750;$$

$$\cos\gamma = \cos(\bar{R}, Oz) = \frac{Z}{|\bar{R}|} = \frac{25}{80{,}01} = 0{,}312.$$

2.B.4. Pentru a fixa o antenă de televiziune, ea se ancorează cu trei cabluri AB, AC, AD. Se dă înălțimea $OA = 2$ m, iar punctele B, C și D sînt situate în vîrfurile unui triunghi echilateral a cărui latură este $l = 3$ m. Tensiunea din fiecare cablu este de 20 daN (fig. 2.B.4). Să se calculeze rezultanta tensiunilor din cabluri.

R e z o l v a r e. Se observă că $BB' = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, iar $BO = \frac{2}{3} BB' = \frac{\sqrt{3}}{3} l = \sqrt{3}$ m.

În triunghiul AOB se obține $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $\alpha = 40°53'36''$.

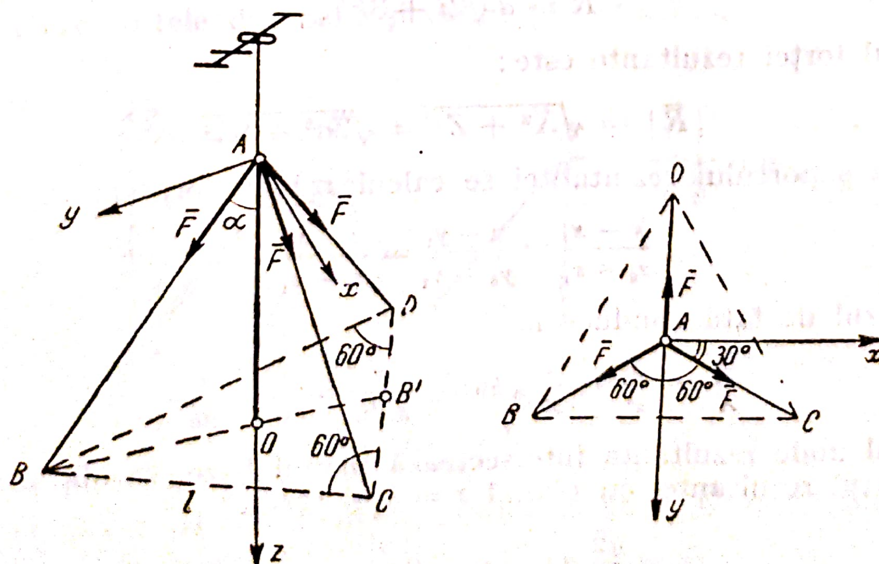
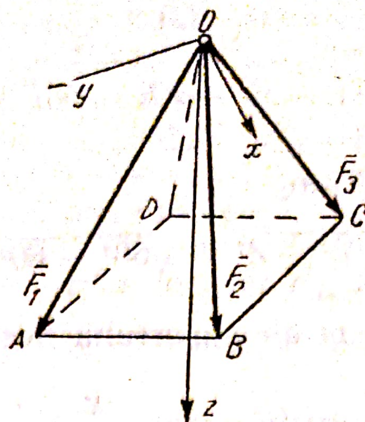


Fig. 2.B.4

Alegînd sistemul de axe din figură, se obţin proiecţiile forţei rezultante (fig. 2.B.4, *a* şi *b*):

$$X = \Sigma X_i = F\cos 30° - F\cos 30° = 0$$

$$Y = \Sigma Y_i = 2F\cos 60° - F = 2F\frac{1}{2} - F = 0$$



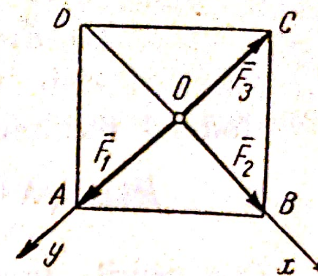


Fig. 2.B.5

$$Z = \Sigma Z_i = 3F\cos\alpha = 3F\cos 40°53'36'' = 3\cdot 20\cdot 0{,}756 = 45{,}36 \text{ daN}.$$

Se observă că din motive de simetrie, cele trei forţe F au o rezultantă dirijată în lungul antenei AO.

2.B.5. Se dă piramida pătrată dreaptă $OABCD$, a cărei bază are latura $2a$ şi înălţimea h. Pe muchiile OA, OB şi OC acţionează cîte o forţă egală în modul cu muchia respectivă (fig. 2.B.5). Se cere să se calculeze forţa rezultantă şi punctul unde suportul ei intersectează planul de bază.

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de axe din figura 2.B.5. Proiecţiile pe axe ale forţei rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = 2a\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$Y = \Sigma Y_i = 0;$$

$$Z = \Sigma Z_i = 3h.$$

Rezultanta este:

$$\bar{R} = a\sqrt{2}\bar{i} + 3h\bar{k}.$$

Modulul forţei rezultante este:

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Z^2} = \sqrt{2a^2 + 9h^2}.$$

Ecuaţia suportului rezultantei se calculează cu formula

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

care în cazul de faţă conduce la

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3h}.$$

Punctul unde rezultanta intersectează planul bazei se obţine intersectînd suportul rezultantei cu planul $z = h$ şi rezultă

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3}a; \quad y = 0; \quad z = h.$$

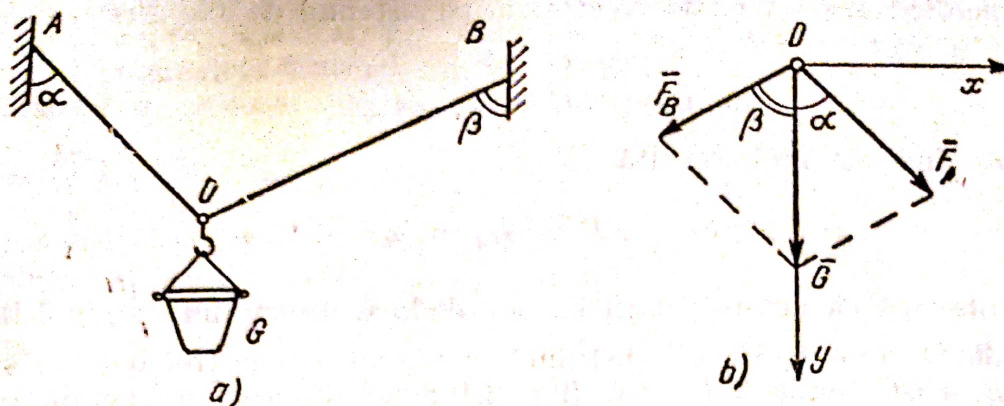


Fig. 2.B.6

2.B.6. O oală de turnare de greutate G este suspendată între doi suporţi A şi B prin intermediul cablurilor OA şi OB. Cunoscînd unghiurile α şi β, se cere să se calculeze tensiunile din cele două cabluri (fig. 2.B.6, *a*).

R e z o l v a r e. În figura 2.B.6, *b* este prezentată descompunerea forţei $\bar{G}$ şi se poate scrie:

$$\bar{G} = \bar{F}_A + \bar{F}_B.$$

Proiectînd pe sistemul de axe ales relaţia vectorială precedentă, se obţine:

$$\text{(pr. } Ox) \qquad 0 = F_A \sin\alpha - F_B \sin\beta$$

$$\text{(pr. } Oy) \qquad G = F_A \cos\alpha + F_B \cos\beta.$$

Rezolvînd acest sistem se deduce:

$$F_A = \frac{G \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad F_B = \frac{G \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

2.B.7. Un felinar de greutate G este prins de un perete prin intermediul barei OA şi a cablului OB. Cunoscînd valoarea unghiului α, se cere să se calculeze forţele din bară şi cablu (fig. 2.B.7, *a*).

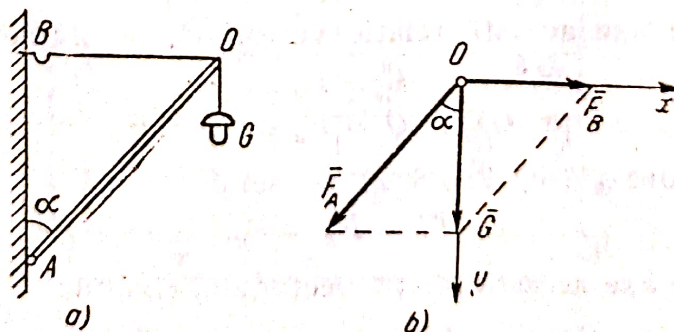


Fig. 2.B.7

R e z o l v a r e. Descompunerea grafică a forţei $\bar{G}$ este prezentată în figura 2.B.7, *b* şi se poate scrie:

$$\bar{G} = \bar{F}_A + \bar{F}_B.$$

Proiectînd această relaţie vectorială pe sistemul de axe ales, se obţine:

$$(\text{pr. } Ox); \quad O = F_B - F_A \sin\alpha;$$
$$(\text{pr. } Oy); \quad G = A_A \cos\alpha.$$

Rezolvînd sistemul, rezultă:

$$F_A = \frac{G}{\cos\alpha}; \; F_B = F_A \sin\alpha = G \operatorname{tg}\alpha.$$

Se observă că aceste relaţii se pot deduce direct din figura 2.B.7, *b*.

2.B.8. O greutate G este susţinută de un sistem de trei bare în spaţiu OA, OB şi OC, unde $OB = OC$ (fig. 2.B.8, *a*). Cunoscînd unghiurile α şi β, se cere să se calculeze forţele din cele trei bare.

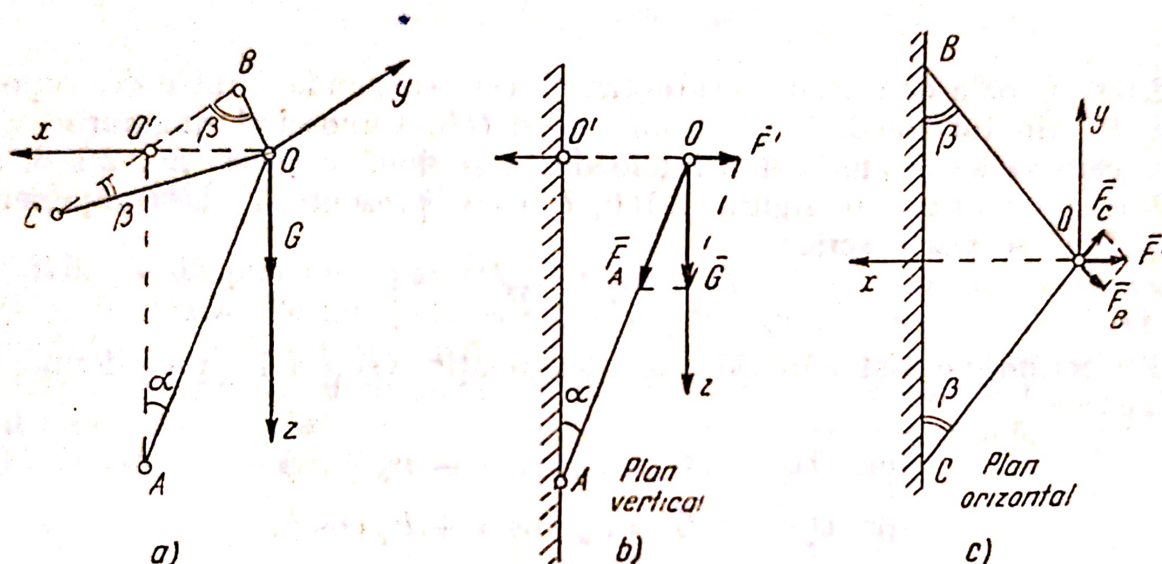


Fig. 2.B.8

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de axe din figura 2.B.8, *a* şi în continuare se efectuează descompunerea forţei $\bar{G}$ în două faze, în plan vertical şi apoi în plan orizontal.

În plan vertical (fig. 2.B.8, *b*) se scrie:

$$\bar{G} = \bar{F}_A + \bar{F}'.$$

Proiectînd pe axe această relaţie vectorială, se obţine:

$$(\text{pr. } Oz); \quad G = F_A \cos\alpha;$$
$$(\text{pr. } Ox); \quad O = F_A \sin\alpha - F'.$$

În plan orizontal (fig. 2.B.8, *c*) se scrie:

$$\bar{F}' = \bar{F}_B + \bar{F}_C.$$

Proiectînd pe axe această relaţie vectorială, rezultă:

$$(\text{pr. } Ox); \quad -F' = -F_B \sin\beta - F_C \sin\beta;$$
$$(\text{pr. } Oy); \quad O = F_C \cos\beta - F_B \cos\beta.$$

Soluţionînd sistemul de ecuaţii, se obţin:

$$F_A = \frac{G}{\cos\alpha}; \quad F' = G \operatorname{tg}\alpha; \quad F_B = F_C = \frac{G \operatorname{tg}\alpha}{2\sin\beta}.$$

2.B.9. Să se reducă în O sistemul de forțe plane din figura 2.B.9.

Rezolvare. Concentrînd rezultatele în tabelul 2.1 apar proiecțiile forțelor și momentele lor față de punctul O.

Torsorul de reducere în O este:

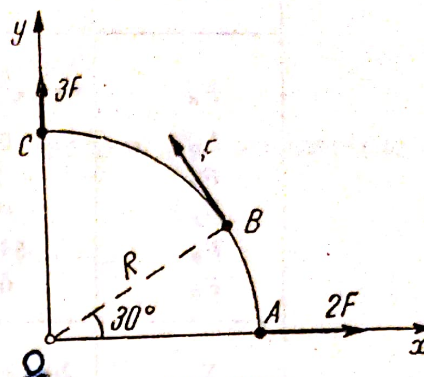


Fig. 2.B.9

$$\bar{R} = \frac{3F}{2}\bar{i} + \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)F\bar{j}; \quad \bar{M}_0 = RF\bar{k}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{M}_0 \neq 0$, sistemul este echivalent cu o forță unică aplicată pe axa centrală (suportul rezultantei), a cărei ecuație este:

$$xY - yX = M_0,$$

sau:

$$\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \frac{3}{2}y = R.$$

Tabelul 2.1

Forța	X_i	Y_i	M_{io}
F_A	$2F$	0	0
F_B	$-\frac{F}{2}$	$\frac{\sqrt{3}F}{2}$	$R \cdot F$
F_C	0	$3F$	0
Σ	$\frac{3F}{2}$	$\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)F$	$R \cdot F$

2.B.10. O placă rigidă dreptunghiulară $OABC$ este încărcată cu un sistem de forțe coplanare, așa cum se arată în figura 2.B.10. Se cere să se reducă aceste forțe în O.

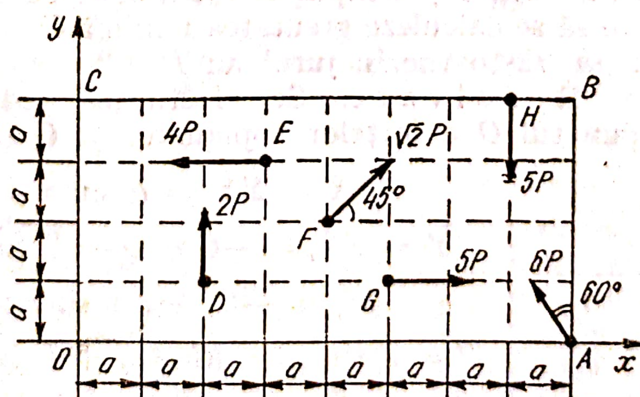


Fig. 2.B.10

Rezolvare. Calculul proiecțiilor forțelor și a momentului acestora față de O sînt prezentate în tabelul 2.2, unde sînt determinate și proiecțiile forței rezultante, precum și momentul rezultant. Se menționează că pentru calculul momentelor forțelor F_A și F_F s-a utilizat teorema momentelor.

Tabelul 2.2

Forţa	X_i	Y_i	M_{i0}
F_A	$-3\sqrt{3}\,P$	$3P$	$8a \cdot 3P = 24aP$
F_D	0	$2P$	$4aP$
F_E	$-4P$	0	$12aP$
F_F	P	P	$4aP - 2aP = 2aP$
F_G	$5P$	0	$-5aP$
F_H	0	$-5P$	$-35aP$
Σ	$(2 + 3\sqrt{3})\,P$	P	$2aP$

Torsorul de reducereîn O, este:

$$\bar{R} = (2 + 3\sqrt{3})P\bar{i} + P\bar{j}; \quad \bar{M}_0 = 2aP\bar{k}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ şi $\bar{M}_0 \neq 0$, sistemul este echivalent cu o forţă $\bar{R}$ aplicată pe axa centrală (suportul rezultantei) a cărei ecuaţie este:

$$xY - yX = M_0$$

sau

$$Px + P(3\sqrt{3} + 2)y = 2a\,P$$

sau

$$x + (3\sqrt{3} + 2)y = 2a.$$

2.B.11. Un stîlp AB utilizat pentru susţinerea conductoarelor electrice, care are greutatea Q şi înălţimea h este ancorat în fundaţia $CDC'D'$ de dimensiuni a şi $2b$ (fig. 2.B.11). Stîlpul este acţionat de forţa F înclinată cu unghiul α. Se cere să se calculeze greutatea minimă G a fundaţiei pentru ca aceasta să nu se răstoarne în jurul lui D.

R e z o l v a r e. Se efectuează reducerea faţă de punctul O a forţelor coplanare, $\bar{Q}$, $\bar{G}$ şi $\bar{F}$.

$$X = \Sigma X_i = F \sin\alpha;$$

$$Y = \Sigma Y_i = -G - Q - F\cos\alpha;$$

$$M_0 = -(h + a)F\sin\alpha;$$

$$\bar{R} = F\sin\alpha\bar{i} - (G + Q + F\cos\alpha)\bar{j}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ şi $\bar{M}_0 \neq 0$ sistemul este echivalent cu o forţă $\bar{R}$ aplicată pe axa centrală, a cărei ecuaţie este:

$$xY - yX = M_0,$$

sau:

Fig. 2.B.11

$$-(G + Q + F\cos\alpha)x - F\sin\alpha\ \ y = -(h + a)F\sin\alpha,$$

sau:

$$(G + Q + P \cos \alpha)x + F \sin \alpha y = (h + a)F \sin \alpha.$$

Axa centrală intersectează baza CD a fundației într-un punct S de coordonate:

$$x_s = \frac{(h + a) F \sin \alpha}{G + Q + F \cos \alpha}; \quad y_s = 0.$$

Pentru ca să nu se răstoarne în jurul punctului D, este necesar ca $x_s \leqslant b$, de unde se deduce:

$$G \geqslant \left(\frac{h + a}{b} \sin \alpha - \cos \alpha\right) F - Q,$$

cu condiția $\left(\frac{h + a}{b} \sin \alpha - \cos \alpha\right) F - Q > 0.$

Avînd determinată greutatea fundației, în continuare se calculează cea de a treia dimensiune a ei.

2.B.12. Se dă placa rigidă dreptunghiulară $OAO'A'$ asupra căreia acționează sistemul de forțe coplanare paralele $\bar{F}_0$, $\bar{F}_B$, $\bar{F}_D$ prezentate în figura 2.B.12. Se cere să se calculeze rezultanta acestor forțe și coordonatele centrului forțelor paralele.

R e z o l v a r e. Calculele necesare determinării forței rezultante și a coordonatelor centrului forțelor paralele sînt prezentate în tabelul 2.3.

Forța rezultantă este $R = \Sigma F_i = 4F$ (are sens ascendent).

Coordonatele centrului C al forțelor paralele sînt

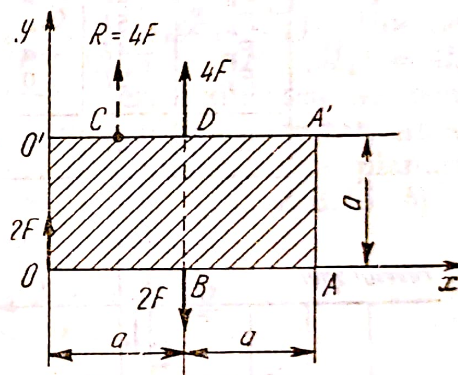


Fig. 2.B.12

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{2aF}{4F} = \frac{1}{2} a; \quad \eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{4aF}{4F} = a.$$

În figură s-au reprezentat atît centrul C al forțelor paralele, cît și forța rezultantă.

Tabelul 2.3

Forța	F_i	x_i	y_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot y_i$
F_0	$2F$	0	0	0	0
F_B	$-2F$	a	0	$-2aF$	0
F_D	$4F$	a	a	$4aF$	$4aF$
Σ	$4F$	—	—	$2aF$	$4aF$

2.B.13. O piramidă pătrată dreaptă $SABDE$ are latura bazei $l = 2a$ și înălțimea $h = 3a$. Piramida este acționată de forțe verticale conform figurii 2.B.13. Se cere să se calculeze forța rezultantă și centrul forțelor paralele.

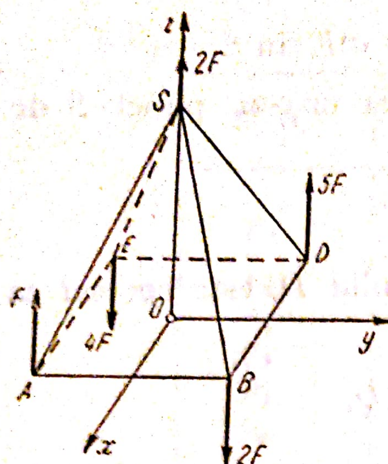


Fig. 2.B.13

R e z o l v a r e. Calculele sînt concentrate în tabelul 2.4 Forţa rezultantă este $R = \Sigma F_i = 2F$, deci are sens ascendent. Coordonatele centrului forţelor paralele sînt:

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{-2aF}{2F} = -a;$$

$$\eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{F_i} = \frac{6aF}{2F} = 3a;$$

$$\zeta = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i} = \frac{6aF}{2F} = 3a.$$

Tabelul 2.4

Forţa	F_i	x_i	y_i	z_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot y_i$	$F_i \cdot z_i$
F_A	F	a	$-a$	0	aF	$-aF$	0
F_B	$-2F$	a	a	0	$-2aF$	$-2aF$	0
F_D	$5F$	$-a$	a	0	$-5aF$	$5aF$	0
F_E	$-4F$	$-a$	$-a$	0	$4aF$	$4aF$	0
F_S	$2F$	0	0	$3a$	0	0	$6aF$
Σ	$2F$	—	—	—	$-2aF$	$6aF$	$6aF$

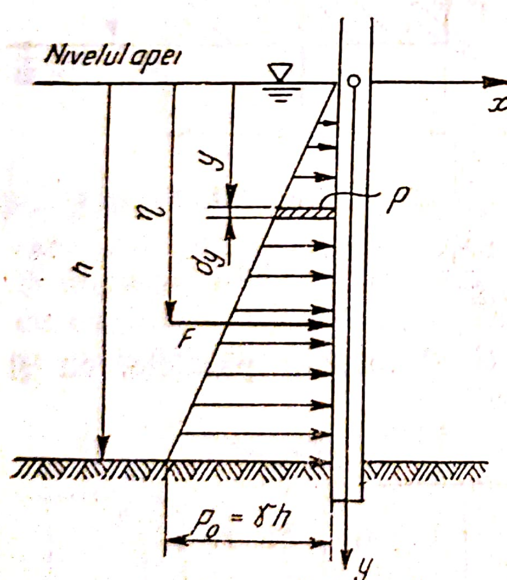


Fig. 2.B.14

2.B.14. O stavilă plană opreşte cursul unei ape care are adîncimea h şi lăţimea egală cu 1 m. Ştiind că presiunea apei asupra stavilei se exercită sub forma unor forţe paralele, care variază după legea $p = \gamma y$, se cere să se calculeze forţa rezultantă $\bar{F}$ şi punctul ei de aplicaţie pe stavilă (fig. 2.B.14).

R e z o l v a r e. Presiunea într-o secţiune oarecare, plasată la adîncimea y, este $p = \gamma y$, iar la adîncimea maximă, presiunea este maximă $p_0 = \gamma h$.

Forţa rezultantă este:

$$F = \int_0^h p \mathrm{d}y = \int_0^h \gamma y \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \gamma h^2.$$

Forţa rezultantă este plasată la adîncimea η calculată ca centru al forţelor paralele:

$$\eta = \frac{\int_0^h p y \mathrm{d}y}{\int_0^h p \mathrm{d}y} = \frac{\int_0^h \gamma y^2 \mathrm{d}y}{\int_0^h \gamma y \mathrm{d}y} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3} h.$$

2.B.15. Asupra cubului $OABCDEFG$, cu latura l, acţionează forţele: $|\bar{F}_0| = 2P$; $|\bar{F}_A| = P$; $|\bar{F}_B| = 3P$; $|\bar{F}_C| = P$; $|\bar{F}_D| = 3P$; $|\bar{F}_E| = 4P$; $|\bar{F}_F| = 2P$; $|\bar{F}_G| = 4G$ (fig. 2.B.15, *a*). Se cere să se reducă acest sistem de forţe în Q.

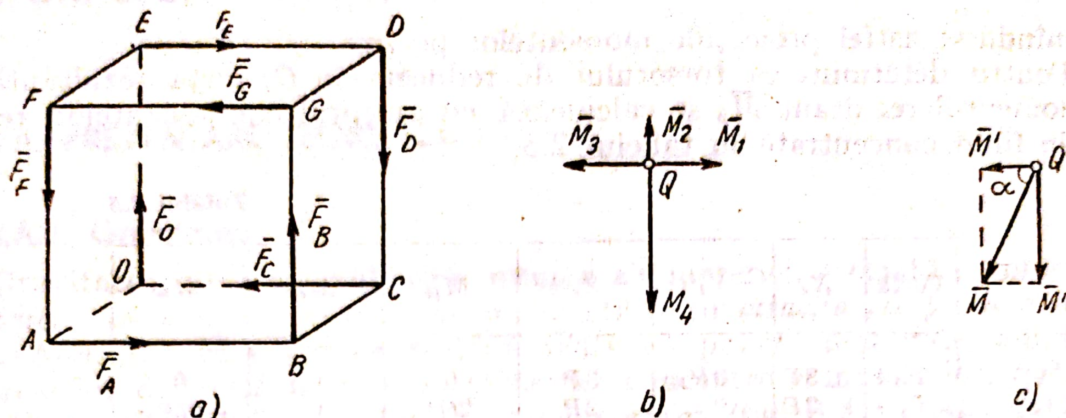


Fig. 2.B.15

Rezolvare. Se observă că forţele date formează cupluri după cum urmează: $\bar{M}_1(\bar{F}_0, \bar{F}_F)$; $\bar{M}_2(\bar{F}_A, \bar{F}_C)$; $\bar{M}_3(\bar{F}_B, \bar{F}_D)$; $\bar{M}_4(\bar{F}_E, \bar{F}_G)$. Modulele acestor cupluri sînt: $|\bar{M}_1| = 2lP$; $|\bar{M}_2| = lP$; $|\bar{M}_3| = 3lP$; $|\bar{M}_4| = 4lP$.

Deoarece momentele cuplurilor sînt vectori liberi, reducerea se poate efectua în orice punct Q, arbitrar ales, obţinîndu-se acelaşi rezultat. Aceste momente se reprezintă sub forma unor vectori perpendiculari pe planurile definite de suporturile forţelor care formează cuplul (fig. 2.B.15, *b*).

Cuplurile colineare se însumează algebric, rezultînd:

$$M' = M_3 - M_1 = 3lP - 2lP = lP$$
$$M'' = M_4 - M_2 = 4lP - lP = 3lP.$$

În final se însumează vectorial momentele $\bar{M}'$ şi $\bar{M}''$ (fig. 2.B.15, *c*)

$$\bar{M} = \bar{M}' + \bar{M}''$$

de unde $|\bar{M}| = \sqrt{M'^2 + M''^2} = \sqrt{l^2P^2 + 9l^2P^2} = \sqrt{10}lP$;

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{|\bar{M}''|}{|\bar{M}'|} = 3 \text{ şi } \alpha = 71°33'54''.$$

+ **2.B.16.** Se dă cubul $OABCDEFG$ cu latură l, acţionat de forţele $|\bar{F}_0| = 3\sqrt{3}P$; $|\bar{F}_C| = 2\sqrt{2}P$; $|\bar{F}_G| = 5P$ (fig. 2.B.16). Se cere să se calculeze: torsorul de reducere în O, torsorul de reducere în A, cu ce este echivalent sistemul de forţe dat şi axa centrală.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figură.

Parametrii directori ai suportului forţei $\bar{F}_0$ sînt $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$ şi sînt utilizaţi la calculul proiecţiilor forţei F_0.

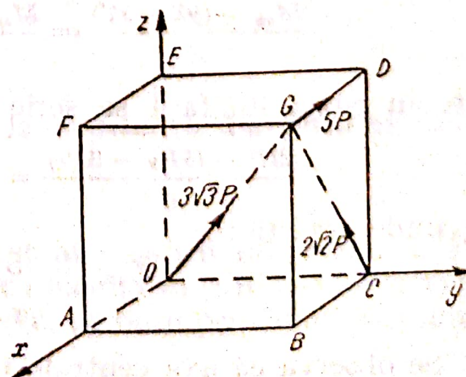


Fig. 2.B.16

Momentele forţelor se calculează conform definiţiei,

$$\overline{M}_0(\overline{F}_c) = \overline{OC} \times \overline{F}_c = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & l & 0 \\ 2P & 0 & 2P \end{vmatrix} = 2lP\overline{i} - 2lP\overline{k},$$

obţinîndu-se astfel proiecţiile momentelor pe axe.

Pentru determinarea torsorului de reducere în O, forţa rezultantă $\overline{R}$ şi momentul rezultant $\overline{M}_0$ se calculează cu ajutorul componentelor, rezultatele fiind concentrate în tabelul 2.5.

Tabelul 2.5

Forţa	X_i	Y_i	Z_i	M_{ix}	M_{iy}	M_{iz}
F_O	$3P$	$3P$	$3P$	0	0	0
F_C	$2P$	0	$2P$	$2lP$	0	$-2lP$
F_G	$-5P$	0	0	0	$-5lP$	$5lP$
Σ	0	$3P$	$5P$	$2lP$	$-5lP$	$3lP$

Torsorul de reducere în O este format din:

$$\overline{R} = 3P\overline{j} + 5P\overline{k}\,; \; \overline{M}_0 = 2lP\overline{i} - 5lP\overline{j} + 3lP\overline{k}.$$

Trinomul invariant este:

$$\overline{R}\overline{M}_0 = XM_x + YM_y + ZM_z = 0.$$

Torsorul de reducere în A este format din

$$\overline{R} = 3P\overline{j} + 5P\overline{k}$$

$$\overline{M}_A = \overline{M}_0 - \overline{OA} \times \overline{R} = 2lP\overline{i} - 5lP\overline{j} + 3lP\overline{k} - \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 3P & 5P \end{vmatrix} = 2lP\overline{i}.$$

Trinomul invariant, în acest caz, este: $\overline{R}\overline{M}_A = 0$ şi se verifică: $\overline{R}\overline{M}_0 = \overline{R}\overline{M}_A = 0$.

Deoarece $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M}_0 \neq 0$ şi $\overline{R}\overline{M}_0 = 0$, sistemul de forţe dat este echivalent cu o forţă $\overline{R} = 3P\overline{j} + 5P\overline{k}$, aplicată pe axa centrală a cărei ecuaţie este:

$$\frac{M_{ox} - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_{oy} - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_{oz} - (xY - yX)}{Z},$$

care în cazul de faţă se scrie:

$$\frac{2lP - (5Py - 3Pz)}{0} = \frac{-5\,lP - (-5Px)}{3P} = \frac{3lP - (3Px)}{5P},$$

de unde rezultă:

$$\left.\begin{aligned} 5y - 3z &= 2l \\ x &= l. \end{aligned}\right\}$$

Se observă că axa centrală trece prin $G(l, l, l,)$, ceea ce se putea anticipa deoarece suporturile forţelor date trec prin G.

CENTRE DE GREUTATE (DE MASĂ). VECTORI LEGAŢI DE PUNCT

3.A. PREZENTARE TEORETICĂ

3.A.1. Gravitatea

Gravitatea, una din multiplele însuşiri ale materiei, asociată cu procesul de *interacţiune* a corpurilor, se manifestă prin *atracţia reciprocă* a acestora. Admiţînd că corpurile sînt asimilate cu puncte materiale, adică cu centrele lor de masă în care se presupun concentrate masele lor, *forţa de atracţie gravitaţională*, în cazul a două corpuri (fig. 3.A.1), este dată de legea lui Newton:

$$|\bar{F}_{12}| = |\bar{F}_{21}| = K\frac{m_1 m_2}{d^2},$$

unde: m_1, m_2 sînt masele celor două corpuri, iar d, distanţa dintre centrele lor de masă.

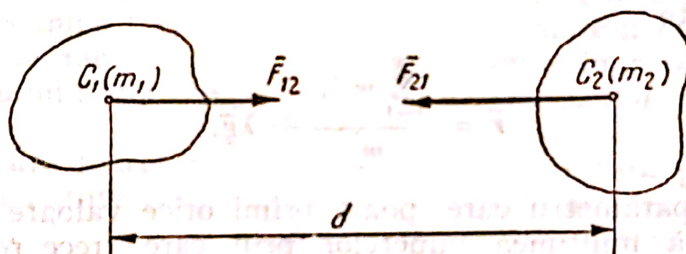


Fig. 3.A.1

Pentru un corp de masă m situat la suprafaţa Pămîntului, expresia forţei de atracţie newtoniană este:

$$|\bar{\Gamma}| = K\frac{mM}{R^2},$$

unde M este masa Pămîntului iar R, raza lui.

3.A.2. Greutatea

Greutatea aceluiaşi corp de masă m, la suprafaţa Pămîntului, este:

$$\bar{G} = \bar{\Gamma} + \bar{C},$$

unde $\bar{C}$ este forţa denumită centrifugă, efect al mişcării neinerţiale a Pămîntului. Această forţă variază cu latitudinea locului în care se află corpul.

Întrucît m este numeric egal cu masa inertă, pe baza principiului acţiunii (II) se mai poate considera şi ecuaţia:

$$\bar{G} - m\bar{g} = 0,$$

unde $\bar{g}$ este *accelerația greutății*, variabilă în funcție de poziția corpului (maximă la pol și minimă la ecuator).

Se consideră că greutatea este îndreptată spre centrul Pămîntului. Pentru corpurile relativ mici în comparație cu Pămîntul (case, avioane, locomotive etc.), greutățile particulelor acestor corpuri sînt, *practic*, paralele. În aceste condiții, problema greutății unui corp la suprafața Pămîntului se reduce la determinarea rezultantei unui sistem de forțe paralele (mărime și suport).

Toate forțele punctelor de mase m_i și greutăți $\bar{G}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ fiind în același sens, prin însumare se obține:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^{n} \bar{G}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{g} = m\bar{g} \neq 0,$$

$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ fiind masa întregului corp, sistem discret de puncte materiale.

3.A.3. Ecuația suportului

Ecuația suportului se obține aplicînd teorema lui Varignon în raport cu un reper cu originea în O (fig. 3.A.2). Se notează cu $\bar{r}$ (necunoscut) vectorul de poziție al unui punct de pe suportul rezultantei, cu $\bar{r}_i$ vectorii de poziție ai punctelor materiale de mase m_i și de greutăți $m_i\bar{g}$.

Rezultatul este:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m} + \lambda\bar{g},$$

unde λ este un parametru care poate primi orice valoare reală. Această ecuație reprezintă mulțimea punctelor prin care trece rezultanta, deci chiar suportul rezultantei.

3.A.4. Centrul de masă

Dacă se schimbă poziția corpului, rezultanta își menține direcția și sensul spre centrul atractiv (centrul Pămîntului), dar suportul ei este altfel situat față de corp; oricum ar fi așezat corpul, suportul rezultantei trece printr-un același punct C al corpului, denumit *centru de greutate* (fig. 3.A.2).

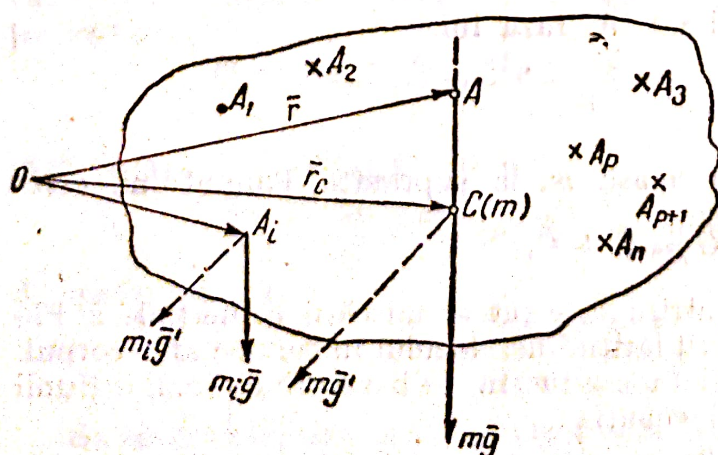


Fig. 3.A.2

Punctul $C(\bar{r}_c)$:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i}{m} \qquad (3.1)$$

nu depinde de direcția comună a forțelor atractive (greutăți), ci numai de configurația geometrică a punc-

telor A_i față de reperul O și de distribuția maselor punctelor materiale ale sistemului.

Acesta este *centrul de masă* al sistemului de puncte materiale.

3.A.5. Proprietățile centrului de masă

Poziția centrului de masă nu depinde de sistemul de referință.

Centrul de masă coincide cu centrul de greutate, însă *dacă corpul se află în afara sferei de gravitație a oricărui sistem material, nu se poate vorbi de centru de greutate*; în schimb, *există în orice condiții centrul de masă al corpului.*

Centrul de masă al unui sistem nedeformabil de puncte materiale este un punct neschimbat al sistemului. Centrul de masă al unui sistem deformabil există în orice moment, dar poziția lui depinde de așezarea și de distribuția maselor punctelor materiale la momentul considerat.

Dacă masele tuturor punctelor materiale sînt amplificate (înmulțite sau împărțite) cu aceeași mărime scalară, centrul de masă al sistemului nu se schimbă.

În fine *centrul de masă nu este un punct material, ci un punct geometric.*

3.A.6. Momentele statice

Se știe că masa unui sistem material poate fi oricum distribuită în acest sistem. Mecanica teoretică introduce două mărimi care dau indicații utile cu privire la modul în care este distribuită, în raport cu un reper oarecare, masa unui sistem. Aceste mărimi sînt *momentul static* și *momentul de inerție.*

Ele sînt folosite foarte des în disciplinele de cultură generală tehnică și în cele de specialitate care se bazează pe „Mecanica teoretică".

Reperele față de care se exprimă momentele statice sînt elementele unui triedru, de obicei triortogonal: *originea, axele, planele.* Astfel, în raport cu originea O, momentul static al punctului material A_i de masă m_i, avînd vectorul de poziție $\bar{r}_i$, are expresia $m_i\bar{r}_i$, iar centrul de masă C, în care *se presupune* concentrată masa m a sistemului, avînd vectorul de poziție $\bar{r}_c$ în raport cu originea reperului, are expresia momentului static: $m\bar{r}_c$.

3.A.7. Teorema momentelor statice

De obicei, pentru determinarea centrului de masă al unui sistem material oarecare se folosește formula (3.1) și toate formulele derivate din aceasta. În această lucrare se propune folosirea nu a formulelor, ci a unei singure teoreme care în esență este exprimarea ecuației:

$$m\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i, \qquad (3.2)$$

dedusă din (3.1).

Momentul static al centrului de masă, în care se presupune concentrată toată masa sistemului în raport cu un reper, este egal cu momentul static al sistemului în raport cu același reper.

Observații

Enunțul teoremei s-a dat sub o formă mai generală decît permitea traducerea ecuației (3.2), în care reperul considerat este originea O a siste-

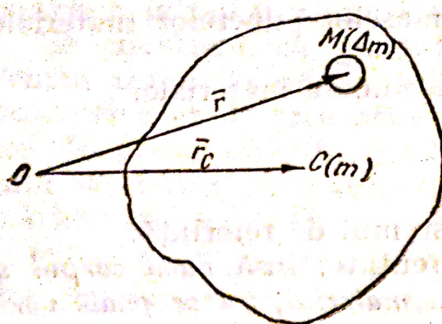


Fig. 3.A.3

mului de referință. Această extindere va fi justificată prin observațiile care urmează.

Prin definiție, suma momentelor statice a părților componente ale sistemului este momentul static al sistemului.

Deși teorema momentelor statice a fost stabilită pentru un sistem de puncte materiale, ea se aplică și unui continuu material, pe o bază *axiomatică* la trecerea de la discret la continuu. Astfel, dacă în locul relației (3.2) se scrie:

$$\bar{r}_c m = \Sigma \bar{r} \Delta m, \tag{3.3}$$

în care: $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului curent M al domeniului continuu (fig. 3.A.3), Δm masa elementară din jurul[1] punctului M, $\bar{r}_c$ vectorul de poziție al centrului de masă în care se presupune concentrată întreaga masă m a sistemului și apoi se trece la limită, se ajunge la relația:

$$\bar{r}_c m = \int_{(D)} \bar{r} \mathrm{d}m, \tag{3.4}$$

în care integrala este triplă, dublă sau simplă, după cum domeniul (D) are trei, două sau o singură dimensiune. Important este de observat faptul că ecuația (3.4) se poate reține tot cu ajutorul teoremei momentelor statice enunțată mai înainte.

Ecuațiile (3.2) și (3.4) se exprimă analitic prin cîte trei ecuații scalare în raport cu triedrul $Oxyz$:

$$mx_c = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i; \quad my_c = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i; \quad mz_c = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{3.5}$$

respectiv:

$$mx_c = \int_{(D)} x \mathrm{d}m; \quad my_c = \int_{(D)} y \mathrm{d}m; \quad mz_c = \int_{(D)} z \mathrm{d}m. \tag{3.6}$$

Stînga ecuațiilor (3.5) și (3.6) exprimă momentele statice ale centrului de masă C în care se presupune concentrată întreaga masă m a sistemului (discret, respectiv continuu), în raport cu planele sistemului de referință: Oyz, Ozx, Oxy.

Dreapta ecuațiilor exprimă momentele statice ale sistemului (discret, respectiv continuu) în raport cu aceleași plane. După cum se vede aici, reperul este *un plan* al triedrului $Oxyz$, iar teorema momentelor statice se aplică în raport cu un asemenea reper pentru toate sistemele materiale din spațiu.

În cazul unui sistem material situat într-un plan, sistemul de referință este format numai de axele Ox și Oy, iar din (3.5) și (3.6) se iau numai primele două ecuații. În acestea, membrul întîi mx_c este momentul static al centrului de masă, în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului în raport cu axa Oy, iar membrul doi este momentul static

[1] Dintr-un volum elementar, o arie elementară sau un arc de curbă elementar, după cum domeniul are 3, 2 sau o dimensiune.

al sistemului (discret, respectiv continuu) în raport cu aceeaşi axă. La fel, my_c este momentul static al centrului de masă în raport cu axa Ox, iar membrul doi este momentul static al sistemului în raport cu Ox.

Se precizează, *pentru a se evita orice confuzie*, că x, y, z sînt *coordonate* care pot fi pozitive sau negative — şi nu *distanţe* pînă la axele sau planele de referinţă, distanţele fiind considerate întotdeauna pozitive. De aceea nu se poate vorbi de momente statice ale unor sisteme spaţiale în raport cu axele Ox, Oy, Oz.

În cazul unor sisteme continue se poate înlocui în (3.6) dm prin ρdV sau ρdA sau ρds, unde ρ este densitatea volumică sau densitatea superficială sau densitatea liniară, după cum domeniul are trei, două sau o dimensiune. În general, ρ este funcţie de poziţia punctului curent M, adică de $\bar{r}(x, y, z)$.

În cazul special cînd domeniul continuu este şi omogen, adică densitatea nu depinde de poziţia punctului, ρ dispare din ecuaţii, care devin:

$$V\bar{r}_c = \int_{(V)} \bar{r} dV ; \quad A\bar{r}_c = \int_{(A)} \bar{r} dA ; \quad l\bar{r}_c = \int_{(l)} \bar{r} ds \tag{3.7}$$

respectiv:

$$Vx_c = \int_{(V)} x dV ; \quad Vy_c = \int_{(V)} y dV ; \quad Vz_c = \int_{(V)} z dV \tag{3.8,a}$$

$$Ax_c = \int_{(A)} x dA ; \quad Ay_c = \int_{(A)} y dA ; \quad Az_c = \int_{(A)} z dA \tag{3.8,b}$$

$$lx_c = \int_{(l)} x ds ; \quad ly_c = \int_{(l)} y ds ; \quad lz_c = \int_{(l)} z ds. \tag{3.8,c}$$

În (3.8, *a*) integralele sînt triple şi extinse la întreg domeniul (D) al continuului tridimensional de volum V.

În ecuaţiile (3.8, *b*) integralele sînt duble, fiind extinse la domeniul (D) al suprafeţei de arie A, iar în (3.8, *c*) integralele sînt simple şi extinse la arcul de curbă de lungime totală l.

În toate ecuaţiile (3.8, *a*), (3.8, *b*), (3.8, *c*), (3.7), în locul masei apar alte mărimi scalare: volum, arie, lungime.

Tot mecanica introduce şi pentru aceste mărimi scalare, ca şi pentru mase, momentele statice[1], care se definesc la fel ca momentele statice ale maselor, precizîndu-se că sînt momente statice pentru volume, arii sau lungimi de arc.

În acest fel se extinde atît noţiunea de moment static, cît şi teorema momentelor statice la un grup mai larg de mărimi considerate aici scalare.

Aplicarea teoremei momentelor statice la mărimi geometrice permite determinarea *centrului de greutate geometric* al unui corp sau figuri geometrice.

3.A.8. Extinderea teoremei momentelor statice

Pe baza tuturor observaţiilor de la pct. 7 se enunţă forma extinsă a teoremei momentelor statice care se poate aplica unui grup de mărimi scalare întîlnite des, atît în Mecanica teoretică şi în Rezistenţa materialelor, cît şi în multe discipline de specialitate.

[1] ca şi momentele de inerţie folosite mai ales la „Rezistenţa materialelor".

Momentul static, în raport cu un reper, al centrului în care se presupune concentrată întreaga mărime scalară a sistemului, este egal cu momentul static, în raport cu acelaşi reper, al mărimii scalare aşa cum este ea efectiv repartizată în sistem.

Se precizează următoarele:

— pentru un sistem în spaţiu, reperul poate fi originea axelor $Oxyz$ sau oricare din planele Oxy, Oyz, Ozx, dar nu axele Ox, Oy, Oz;

— pentru un sistem plan, reperul poate fi *originea axelor Oxy* sau, axele Ox şi Oy, dar, evident, *nu planul Oxy*;

— momentul static al sistemului, în raport cu orice reper care conţine centrul C al sistemului, *este nul*;

— momentul static este o mărime pozitivă, negativă sau nulă.

3.A.9. **Indicaţii generale pentru calculul momentelor statice şi al centrelor**

În primul rînd, dacă sistemul se bucură de o simetrie faţă de un plan, o axă sau un punct, centrul sistemului se va găsi în acel plan, pe acea axă sau în acel punct; se vor alege axele reperului în consecinţă.

Se înţelege că aici este vorba nu numai de o simetrie poziţională, ci şi de una distribuţională.

În al doilea rînd, dacă sistemul continuu are forme care pot fi compuse din două sau mai multe forme simple, la care se cunosc centrele respective, pentru calculul centrului sistemului compus, şi *numai pentru acest calcul*, se pot presupune concentrate mărimile scalare (mase, volume, arii, lungimi) în centrele respective cunoscute şi apoi, aplicînd teorema momentelor statice, se va determina centrul sistemului compus.

Dacă sistemul compus poate fi conceput compus din forme simple, dar *unele pozitive* şi *altele negative*, ex.: aria haşurată poate fi considerată ca suma, în sens algebric, a ariei cercului cu centrul în C_1 (pozitivă) şi a ariei cercului cu centrul în C_2 (negativă), se poate de asemenea aplica teorema momentelor statice, de exemplu, pentru determinarea centrului de greutate C al ariei haşurate (fig. 3.A.4).

3.A.10. **Teoremele lui Guldin—Pappus**

a) Calculul ariei unei suprafeţe de rotaţie.

Teorema I. Aria suprafeţei generate de un arc de curbă plană, prin rotaţia sa completă în jurul unei axe situate în acelaşi plan, dar care nu taie curba, este egală cu produsul dintre lungimea l a arcului şi lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului de curbă (fig. 3.A.5), adică:

$$A = l2\pi x_c.$$

b) Calculul volumului unui corp de rotaţie.

Teorema II. Volumul corpului generat de o figură plană închizînd o arie, prin rotaţia ei completă în jurul unei axe din planul figurii şi care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria închisă de figură şi lungimea cercului descris de centrul de greutate al ariei A a figurii (fig. 3.A.6), adică:

$$V = A2\pi x_c.$$

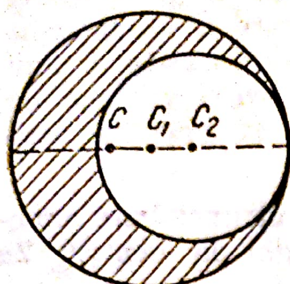


Fig. 3.A.4

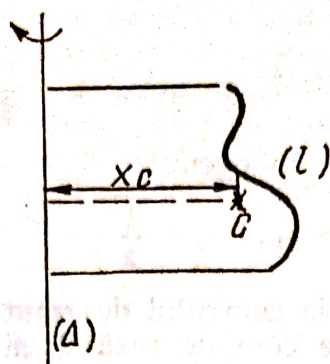


Fig. 3.A.5

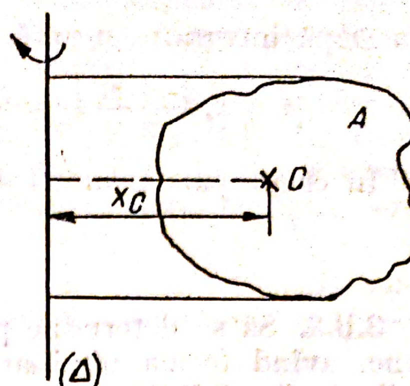


Fig. 3.A.6

Observaţii

Ambele teoreme se demonstrează foarte uşor cu ajutorul teoremei momentelor statice.

Teoremele servesc în primul rînd la calculul unor arii sau volume de rotaţie atunci cînd se cunoaşte centrul de greutate, iar în al doilea rînd mai pot servi şi la determinarea centrelor de greutate atunci cînd se cunosc ariile suprafeţelor sau volumelor unor corpuri de rotaţie.

3.B. APLICAŢII LA DETERMINAREA CENTRELOR DE MASĂ (GREUTATE)

3.B.1. Să se determine poziţia centrului de masă al barei rectilinii neomogene, de lungime $OA = l$, cu densitatea barei variind liniar de la ρ_0 în O la ρ_1 în A (fig. 3.B.1.).

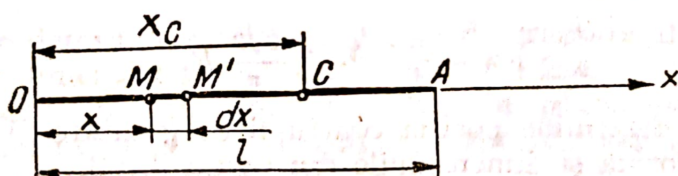


Fig. 3.B.1

Rezolvare. Se alege axa Ox de-a lungul barei OA. Fie M un punct curent de pe bară, de abscisă x, MM' un element al barei de lungime $\mathrm{d}x$ şi masă $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x$, iar C centrul de masă căutat, avînd abscisa x_c.

Densitatea variază în funcţie de x după legea $\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu punctul O:

$x_c \int_0^l \rho \mathrm{d}x = \int_0^l x \rho \mathrm{d}x$. Înlocuind pe ρ, se obţine:

$$x_c \int_0^l \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x\right) \mathrm{d}x = \int_0^l x\left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x\right) \mathrm{d}x.$$

După integrare, rezultă:

$$x_c \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} l = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{6} l^2, \text{ de unde } x_c = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} l.$$

În cazul particular al barei omogene:

$$\rho_0 = \rho_1; \quad x_c = \frac{l}{2}.$$

3.B.2. Să se determine poziţia centrului de greutate al unei bare omogene, avînd forma unui arc de cerc de rază R şi unghi la centru 2α radiani (fig. 3.B.2.).

R e z o l v a r e. Bara fiind omogenă, admite o axă de simetrie. Se alege sistemul de referinţă cu originea în centrul cercului şi cu axa Ox după axa de simetrie; deci $y_c = 0$.

Se detaşează un element de arc $\widehat{MM'}$, avînd lungimea $ds = R\,d\theta$, abscisa centrului de greutate al acestuia fiind $x = R\cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx R\cos\theta$.

Se determină abscisa x_c a centrului de greutate al întregului arc, aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$x_c \int_{-\alpha}^{+\alpha} R\,d\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha} xR\,d\theta, \text{ dar } x = R\cos\theta.$$

Înlocuind şi integrînd, rezultă:

$$x_c 2\alpha R = 2R^2 \sin\alpha, \text{ de unde } x_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha},$$

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x_c = \frac{2R}{\pi}$,

iar pentru

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad x_c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R.$$

3.B.3. Să se determine poziţia centrului de greutate al cîrligului plan, omogen, avînd forma şi dimensiunile din figura 3.B.3.

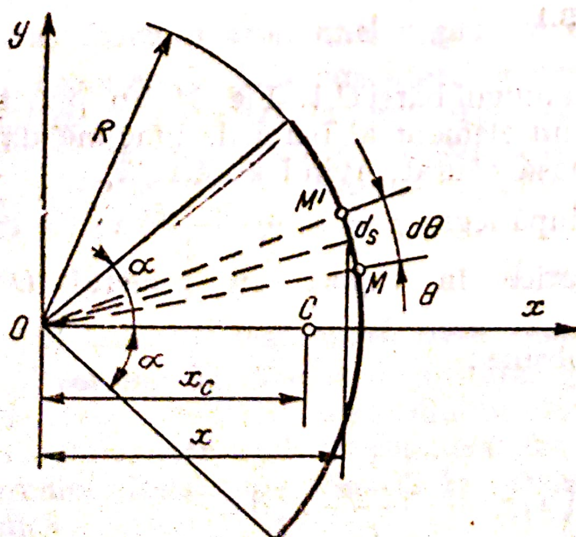


Fig. 3.B.2

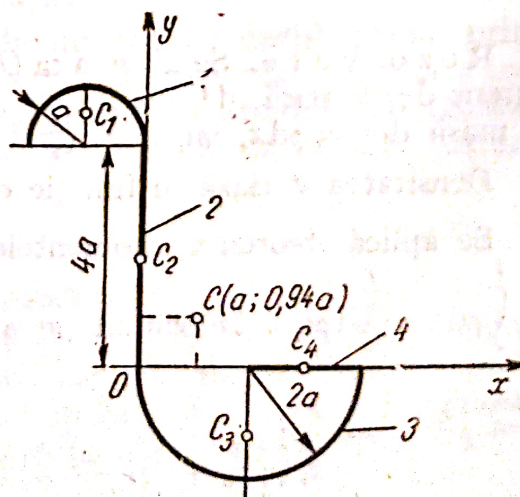


Fig. 3.B.3

R e z o l v a r e. Se descompune sistemul în patru elemente la care se cunosc pozițiile centrelor de greutate, apoi se alege un sistem de referință convenabil. Pentru sistematizarea calculelor, coordonatele centrelor de greutate x_i, y_i, lungimile elementelor l_i, precum și momentele statice ale elementelor în raport cu axele $x_i l_i$ și $y_i l_i$ se trec în tabelul 3.1. În ultima linie a tabelului se face suma lungimilor elementelor Σl_i, precum și sumele momentelor statice ale elementelor în raport cu axele $\Sigma x_i l_i$ și $\Sigma y_i l_i$, sume care intervin în calcule.

Tabelul 3.1

Nr. elem.	x_i	y_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$
1	$-a$	$4a + \frac{2a}{\pi}$	πa	$-\pi a^2$	$4\pi a^2 + 2a^2$
2	0	$2a$	$4a$	0	$8a^2$
3	$2a$	$-\frac{4a}{\pi}$	$2\pi a$	$4\pi a^2$	$-8a^2$
4	$3a$	0	$2a$	$6a^2$	0
Σ	—	—	$3a(\pi + 2)$	$3a^2(\pi + 2)$	$2a^2(2\pi + 1)$

Pentru determinarea lui x_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$x_c 3a(\pi + 2) = 3a^2(\pi + 2), \text{ de unde } x_c = a.$$

Pentru determinarea lui y_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Ox:

$$y_c 3a(\pi + 2) = 2a^2(2\pi + 1), \text{ de unde } y_c = \frac{2(2\pi + 1)}{3(\pi + 2)} a \approx 0,94a.$$

3.B.4. Să se determine poziția centrului de greutate al cadrului omogen avînd forma și dimensiunile indicate în figura 3.B.4.

R e z o l v a r e. Se descompune cadrul în patru elemente, se alege sistemul de referință și se determină coordonatele centrelor de greutate, lungimile și momentele statice în raport cu planele, ale elementelor componente (tab. 3.2).

Aplicînd succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele trei plane, rezultă:

$$x_c = \frac{5}{2(\pi + 2)} a \approx 0,49a;$$

$$y_c = \frac{\pi + 1}{2(\pi + 2)} a \approx 0,4a;$$

$$z_c = \frac{\pi}{2(\pi + 2)} a \approx 0,31a.$$

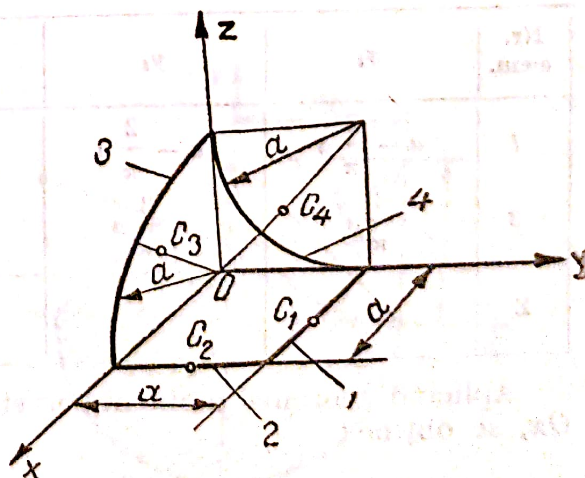


Fig. 3.B.4

Tabelul 3.2

Nr. elem.	x_i	y_i	z_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$	$z_i l_i$
1	$\frac{a}{2}$	a	0	a	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
2	a	$\frac{a}{2}$	0	a	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
3	$\frac{2}{\pi} a$	0	$\frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi}{2} a$	a^2	0	a^2
4	0	$a - \frac{2}{\pi} a$	$a - \frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi}{2} a$	0	$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$	$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$
Σ	—	—	—	$a(\pi + 2)$	$\frac{5}{2} a^2$	$\frac{a^2}{2} (\pi + 1)$	$\frac{\pi}{2} a^2$

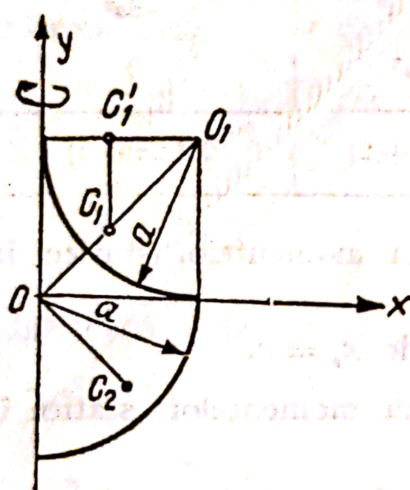


Fig. 3.B.5

3.B.5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al sistemului omogen de bare în plan, precum şi aria suprafeţei generate prin rotirea conturului în jurul axei Oy (fig. 3.B.5).

R e z o l v a r e. Se descompune conturul în cele două arce, determinîndu-se coordonatele centrelor de greutate C_1 şi C_2.

Se calculează întîi $O_1C_1 = \dfrac{a \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} a,$

apoi $O_1C_1' = O_1C_1 \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2a}{\pi}$.

Abscisa centrului de greutate C_1 este $x_{c1} = a - \dfrac{2a}{\pi}$. Se calculează în mod asemănător restul coordonatelor centrelor de greutate, de asemenea lungimile şi momentele statice în raport cu axele, ale arcelor (tab. 3.3).

Tabelul 3.3

Nr. elem.	x_i	y_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$
1	$a - \frac{2}{\pi} a$	$a - \frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi a}{2}$	$\frac{\pi}{2} a^2 - a^2$	$\frac{\pi}{2} a^2 - a^2$
2	$\frac{2}{\pi} a$	$-\frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi a}{2}$	a^2	$-a^2$
Σ	—	—	πa	$\frac{\pi}{2} a^2$	$\frac{a^2}{2} (\pi - 4)$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele Oy, respectiv Ox, se obţine:

$$x_c = 0{,}5a; \quad y_c = \frac{\pi - 4}{2\pi} a \approx 0{,}14a.$$

Pentru determinarea ariei suprafeței generate prin rotirea conturului în jurul axei Oy se utilizează prima teoremă a lui Guldin-Pappus:

$$A = \pi a 2\pi \frac{a}{2}. \text{ Rezultă } A = \pi^2 a^2.$$

3.B.6. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii plane, avînd forma unui sector circular de rază R și unghi la centru 2α radiani (fig. 3.B.6).

Rezolvare. Se alege sistemul de referință astfel încît Ox să coincidă cu axa de simetrie a sectorului, deci $y_c = 0$. Se detașează un element de suprafață $MNPQ$ avînd aria $dA = \rho d\rho d\theta$, abscisa centrului de greutate al elementului fiind $x = \left(\rho + \frac{d\rho}{2}\right)\cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx \rho \cos\theta$.

Se determină x_c aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$x_c \iint \rho d\rho d\theta = \iint \rho \cos\theta \rho d\rho d\theta, \text{ respectiv:}$$

$$x_c \int_0^R \rho d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta d\theta.$$

După integrare rezultă $x_c = \frac{2R \sin\alpha}{3\alpha}$.

În cazul unui semicerc, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x_c = \frac{4R}{3\pi}$,

iar pentru un sfert de cerc, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $x_c = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$,

3.B.7. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii plane omogene avînd forma și dimensiunile indicate în figura 3.B.7.

Rezolvare. Se descompune placa în patru elemente: sectorul de cerc *1*, triunghiul *2* la care se adaugă pătratul *3*, urmînd să se scadă sectorul de cerc *4*.

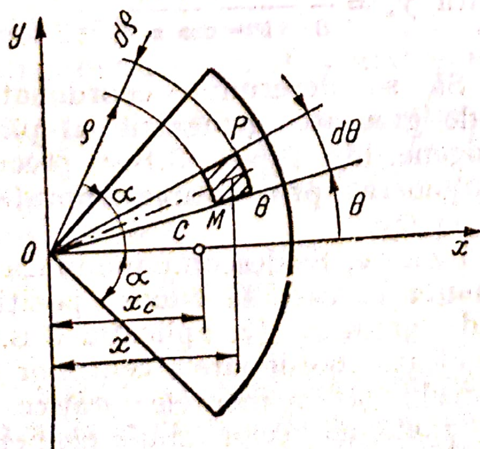


Fig. 3.B.6

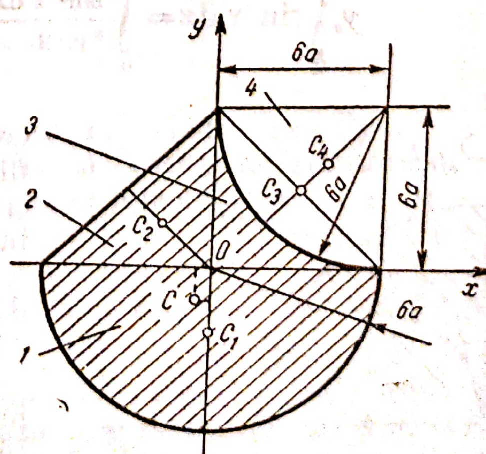


Fig. 3.B.7

Se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile, precum și momentele statice în raport cu axele pentru cele patru elemente (tab. 3.4).

Tabelul 3.4

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	0	$-\frac{8}{\pi}a$	$18\pi a^2$	0	$-144a^3$
2	$-2a$	$2a$	$18a^2$	$-36a^3$	$36a^3$
3	$3a$	$3a$	$36a^2$	$108a^3$	$108a^3$
4	$6a-\frac{8a}{\pi}$	$6a-\frac{8a}{\pi}$	$-9\pi a^2$	$-54\pi a^3+72a^3$	$-54\pi a^3+72a^3$
Σ	—	—	$9(\pi+6)a^2$	$18(8-3\pi)a^3$	$9(8-6\pi)a^3$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele Oy, respectiv Ox, rezultă:

$$x_c=\frac{2(8-3\pi)}{\pi+6}a\approx-0{,}31a;$$

$$y_c=\frac{8-6\pi}{\pi+6}a\approx-1{,}19a.$$

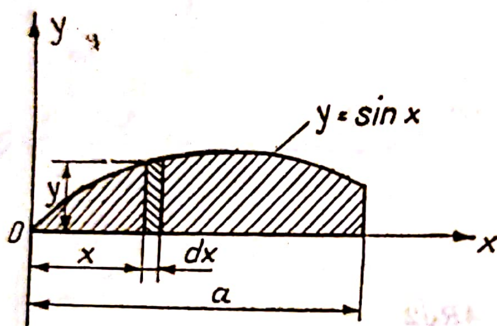


Fig. 3.B.8

3.B.8. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene avînd aria cuprinsă între axa Ox, sinusoida $y=\sin x$ și dreapta $x=a$ (fig. 3.B.8).

R e z o l v a r e. Se detașează un element de arie $dA=dx\sin x$. Se aplică apoi teorema momentelor statice în raport cu axa Oy:

$$x_c\int_0^a\sin x\,dx=\int_0^a x\sin x\,dx.\quad \text{Rezultă } x_c=\frac{\sin a-a\cos a}{1-\cos a},$$

iar în raport cu axa Ox:

$$y_c\int_0^a\sin x\,dx=\int_0^a\frac{\sin^2 x\,dx}{2}.\quad \text{Rezultă } y_c=\frac{1}{8}\,\frac{2a-\sin 2a}{1-\cos a}.$$

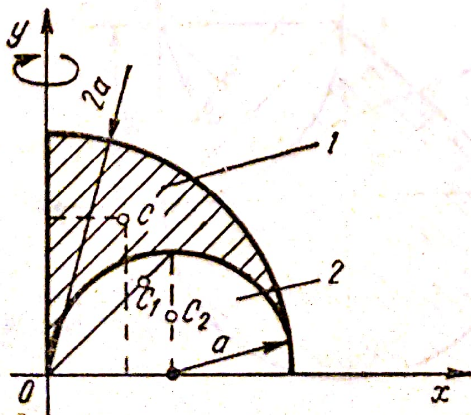


Fig. 3.B.9

3.B.9. Să se determine coordonatele centrului de greutate geometric al plăcii plane, omogene, din figura 3.B.9, precum și volumul generat prin rotirea suprafeței în jurul axei Oy.

R e z o l v a r e. Se descompune placa în două elemente la care se cunosc pozițiile centrelor de greutate (v. aplicația 3.B.6).

Se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile și momentele statice în raport cu axele ale celor două elemente (tab. 3.5).

Tabelul 3.5

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	$\frac{8}{3\pi}a$	$\frac{8}{3\pi}a$	πa^2	$\frac{8}{3}a^3$	$\frac{8}{3}a^3$
2	a	$\frac{4}{3\pi}a$	$-\frac{\pi}{2}a^2$	$-\frac{\pi}{2}a^3$	$-\frac{2}{3}a^3$
Σ	—	—	$\frac{\pi}{2}a^2$	$\frac{16-3\pi}{6}a^3$	$2a^3$

Se aplică succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele două axe. Rezultă:

$$x_c = \frac{16-3\pi}{3\pi}a \approx 0{,}7a, \quad y_c = \frac{4a}{\pi} \approx 1{,}27a.$$

Volumul căutat se determină aplicînd a doua teoremă a lui Guldin-Pappus:

$$V = \frac{\pi a^2}{2} 2\pi \frac{16-3\pi}{3\pi}a. \text{ Rezultă: } \quad V = \frac{\pi(16-3\pi)}{3}a^3.$$

3.B.10. Placa plană omogenă din figura 3.B.10. este obținută prin decuparea cercului de rază r, necunoscută (dar $r < a$) din cercul de rază a dată. Să se determine raza r a cercului mic, astfel încît centrul de greutate al plăcii să se afle în punctul C.

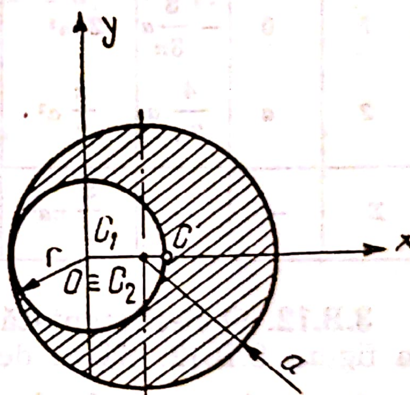


Fig. 3.B.10

R e z o l v a r e. Se alege un sistem de referință xOy cu originea în centrul cercului de rază r, avînd ca axă Ox axa de simetrie a plăcii; deci $y_c = 0$. Se descompune figura în două elemente și se determină coordonatele centrelor de greutate:

$$C_1[(a-r);\ 0], \qquad C_2[0;\ 0],$$

apoi ariile elementelor: $A_1 = \pi a^2$, $A_2 = -\pi r^2$. Aria totală este: $A = \pi(a^2 - r^2)$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Oy: $x_c\pi(a^2 - r^2) = \pi a^2(a - r)$. Punînd condiția ca centrul de greutate al plăcii să se afle în punctul $C(r;\ 0)$, deci $x_c = r$, se obține ecuația: $r^2 + ar - a^2 = 0$, de unde:

$$r = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}. \text{ Cum } r > 0, \text{ soluția va fi } r = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 0{,}62\ a.$$

3.B.11. O camă este compusă din două plăci semicirculare, prima avînd raza $2a$ și densitatea ρ, a doua avînd raza a și densitatea 2ρ (fig. 3.B.11). Să se determine poziția centrului de masă al camei, precum și poziția centrului de greutate geometric al suprafeței plăcii.

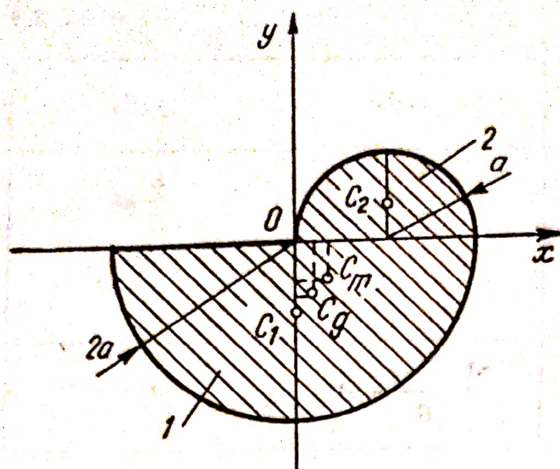


Fig. 3.B.11

Rezolvare. Se descompune figura în două elemente și se determină coordonatele centrelor de greutate, ariile, masele, precum și momentele statice în raport cu axele ale elementelor (tab. 3.6).

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele, rezultă pentru centrul de masă:

$$x_{cm} = \frac{a}{3} \approx 0{,}33a;$$

$$y_{cm} = -\frac{4}{3\pi} a \approx -0{,}43a;$$

iar pentru centrul de greutate geometric:

$$x_{cg} = \frac{a}{5} = 0{,}2a; \quad y_{cg} = -\frac{28}{15\pi} a \approx -0{,}6a.$$

Tabelul 3.6

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	ρ_i	m_i	x_iA_i	y_iA_i	x_im_i	y_im_i
1	0	$-\frac{8}{3\pi}a$	$2\pi a^2$	ρ	$2\pi\rho a^2$	0	$-\frac{16}{3}a^3$	0	$-\frac{16\rho}{3}a^3$
2	a	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{\pi}{2}a^2$	2ρ	$\pi\rho a^2$	$\frac{\pi}{2}a^3$	$\frac{2}{3}a^3$	$\pi\rho a^3$	$\frac{4\rho}{3}a^3$
Σ	—	—	$\frac{5}{2}\pi a^3$	—	$3\pi\rho a^3$	$\frac{\pi}{2}a^3$	$-\frac{14}{3}a^3$	$\pi\rho a^3$	$-4\rho a^3$

3.B.12. O piesă stanțată din tablă omogenă are forma și dimensiunile date în figura 3.B.12. Să se determine poziția centrului de greutate al piesei.

Rezolvare. Se descompune piesa în trei elemente și se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile și momentele statice în raport cu planele, pentru acestea (tab. 3.7).

Aplicînd succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele trei plane, rezultă pentru centrul de greutate coordonatele:

$$x_c = \frac{9(\pi + 12)}{3\pi + 38} a \approx 2{,}87a;$$

$$y_c = \frac{8(3\pi + 16)}{3\pi + 38} a \approx 4{,}29a;$$

$$z_c = -\frac{6}{3\pi + 38} a \approx -0{,}13a.$$

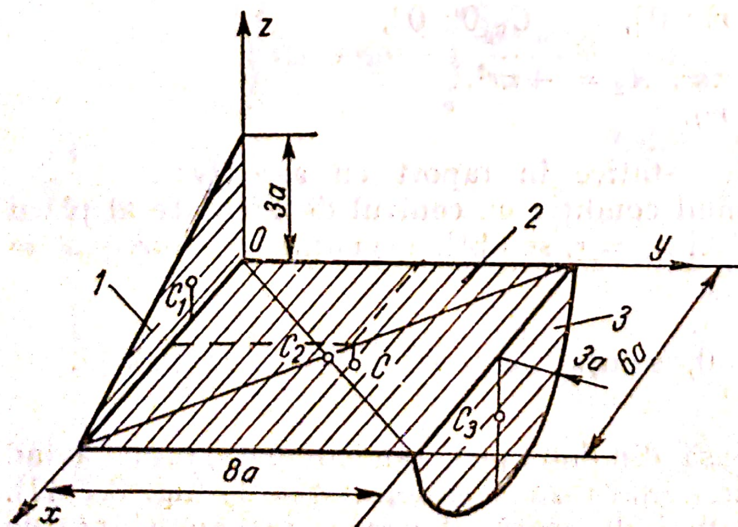


Fig. 3.B.12

Tabelul 3.7

Nr. elem.	x_i	y_i	z_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i	z_iA_i
1	$2a$	0	a	$9a^2$	$18a^3$	0	$9a^3$
2	$3a$	$4a$	0	$48a^2$	$144a^3$	$192a^3$	0
3	$3a$	$8a$	$-\frac{4}{\pi}a$	$\frac{9\pi}{2}a^2$	$\frac{27\pi}{2}a^3$	$36\pi a^3$	$-18a^3$
Σ	—	—	—	$\frac{3}{2}(3\pi+38)a^2$	$\frac{27}{2}(\pi+12)a^3$	$12(3\pi+16)a^3$	$-9a^3$

3.B.13. Să se determine poziţia centrului de greutate al corpului semisferic omogen de rază R (fig. 3.B.13.).

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă cu Oz ca axă de simetrie a corpului, deci $x_c = 0$; $y_c = 0$.

Se detaşează un element de volum. Folosind coordonatele sferice se obţine cota centrului de greutate a elementului $z = \rho \sin \varphi$, şi volumul elementar $dV = \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul xOy:

$$z_c \iiint \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \iiint \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi,$$

de unde:

$$z_c = \frac{\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi}.$$

Integrînd, rezultă $z_c = \frac{3R}{8}$.

3.B.14. Să se determine poziţia centrului de greutate al conului omogen, avînd raza bazei R şi înălţimea h (fig. 3.B.14).

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă cu Oz ca axă de simetrie a conului, deci $x_c = 0$; $y_c = 0$.

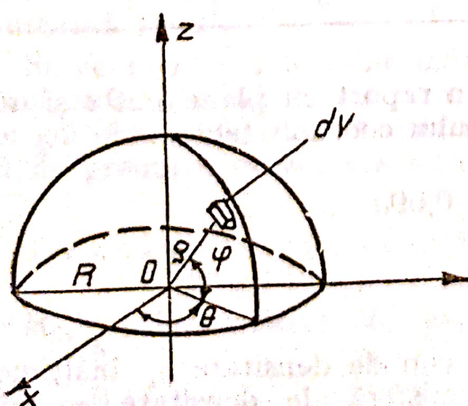


Fig. 3.B.13

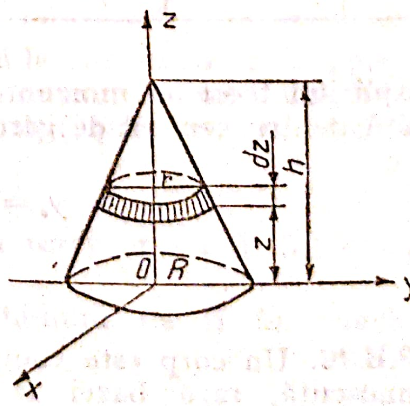


Fig. 3.B.14

Se detaşează un element de volum $dV = \pi r^2 dz$.

Dar $\frac{r}{R} = \frac{h-z}{h}$, de unde : $r = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$.

Pentru determinarea lui z_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul xOy:

$$z_c \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 z dz.$$

Integrînd rezultă : $z_c = \frac{h}{4}$.

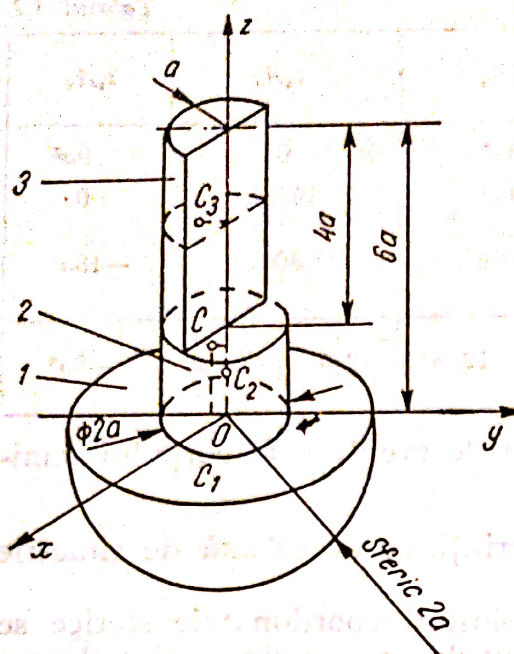


Fig. 3.B.15

3.B.15. Să se determine poziţia centrului de greutate al corpului omogen avînd forma şi dimensiunile din figura 3.B.15.

R e z o l v a r e. Se descompune corpul în trei elemente : semisfera *1*, cilindrul *2* şi jumătatea de cilindru *3*.

Se alege sistemul de axe astfel încît planul yOz să coincidă cu planul de simetrie al corpului ; deci $x_c = 0$. Se calculează coordonatele centrelor de greutate, volumele şi momentele statice ale acestora în raport cu planele zOx şi xOy (tab. 3.8).

Tabelul 3.8

Nr. elem.	y_i	z_i	V_i	y_iV_i	z_iV_i
1	0	$\frac{3}{4}a$	$\frac{16\pi}{3}a^3$	0	$4\pi a^4$
2	0	a	$2\pi a^3$	0	$2\pi a^4$
3	$-\frac{4}{3\pi}a$	$4a$	$2\pi a^3$	$-\frac{8}{3}a^4$	$8\pi a^4$
Σ	—	—	$\frac{28}{3}\pi a^3$	$-\frac{8}{3}a^4$	$14\pi a^4$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu planele zOx şi xOy, rezultă pentru centrul de greutate al corpului coordonatele :

$$y_c = -\frac{2}{7\pi}a \approx -0{,}09a;$$

$$z_c = 1{,}5a.$$

3.B.16. Un corp este compus dintr-un con de densitate ρ_1, înălţime h necunoscută, raza bazei R dată şi o semisferă de densitate ρ_2 avînd baza comună cu cea a conului.

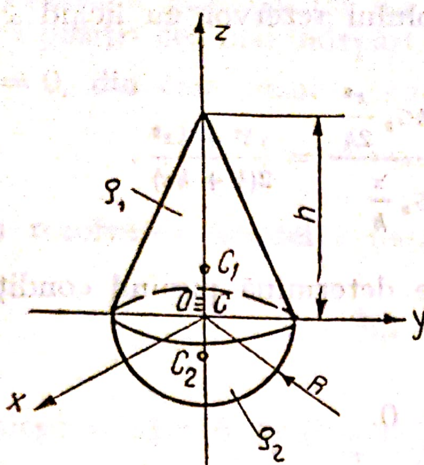


Fig. 3.B.16

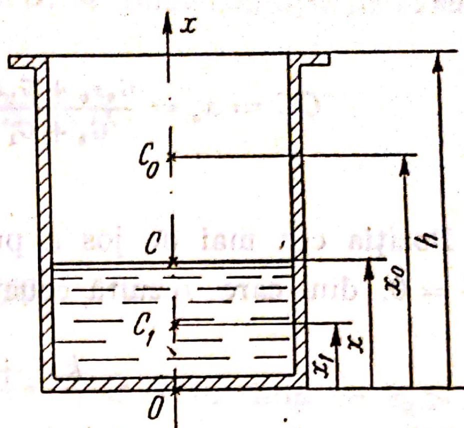


Fig. 3.B.17

Să se determine înălţimea h a conului astfel încît centrul de masă al corpului să se afle în punctul C (fig. 3.B.16).

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă cu originea în punctul C şi, cu axa Oz ca axă de simetrie a corpului. Deci, $x_c = 0$, $y_c = 0$. Pentru ca centrul de masă să se afle în punctul C, trebuie ca şi $z_c = 0$.

Se determină z_c aplicînd teorema momentelor statice în raport cu planul xOy:

$$z_c\left(\rho_1 \frac{\pi R^2 h}{3} + \rho_2 \frac{2\pi R^3}{3}\right) = \frac{h}{4}\rho_1 \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{3R}{8}\rho_2 \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Dar $z_c = 0$, de unde: $h = R\sqrt{3\frac{\rho_2}{\rho_1}}$.

Se observă că dacă $\rho_2 = \rho_1$, $h = \sqrt{3}R$.

3.B.17. Un rezervor de formă cilindrică şi înălţime h (fig. 3.B.17) are, cînd este gol, greutatea G_0, iar centrul de greutate în punctul C_0 situat la distanţa $x_0 = \alpha \frac{h}{2}$ faţă de planul bazei (α este o constantă dată). Greutatea unui lichid care ar umple complet rezervorul este $G_1 = k \cdot G_0$ (k este o constantă dată).

Se cere să se determine înălţimea x pînă la care trebuie umplut rezervorul cu acel lichid, astfel încît centrul de greutate C al ansamblului rezervor gol plus lichid să fie în cea mai de jos poziţie, precum şi poziţia centrului de greutate în această situaţie.

R e z o l v a r e. Greutatea lichidului din rezervor va fi $G_{1x} = G_1 \frac{x}{h} = kG_0 \frac{x}{h}$, iar centrul de greutate al lichidului va fi în punctul C_1 (fig. 3.B.17); $OC_1 = x_1 = \frac{x}{2}$.

Pentru centrul de greutate C al ansamblului rezervor cu lichid vom avea:

$$OC = x_c = \frac{G_0 x_0 + G_1 x_1}{G_0 + G_1} = \frac{G_0 \alpha \frac{h}{2} + kG_0 \frac{x^2}{2h}}{G_0 + kG_0 \frac{x}{h}} = \frac{\alpha h^2 + kx^2}{2(h + kx)}.$$

Poziţia cea mai de jos a punctului C se determină punînd condiţia: $\frac{dx_c}{dx} = 0$, din care rezultă ecuaţia:

$$kx^2 + 2hx - \alpha h^2 = 0.$$

Prin rezolvarea acestei ecuaţii se obţine:

$$x = h \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha k}} \quad \text{şi apoi} \quad x_{c\,minim} = h \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha k}} = x.$$

În poziţia sa cea mai de jos centrul de greutate C al ansamblului rezervor cu lichid se află la suprafaţa lichidului.

3.B.18. Un piston este obţinut dintr-un cilindru plin de rază R şi înălţime H prin strunjirea unei cavităţi interioare de formă cilindrică avînd raza $r < R$ şi înălţimea $h < H$, ca în figura 3.B.18.

Se cere să se determine înălţimea h a cavităţii cilindrice interioare a pistonului astfel încît centrul de greutate C al pistonului prelucrat să fie cît mai aproape de fundul acestuia, precum şi poziţia centrului de greutate în această situaţie.

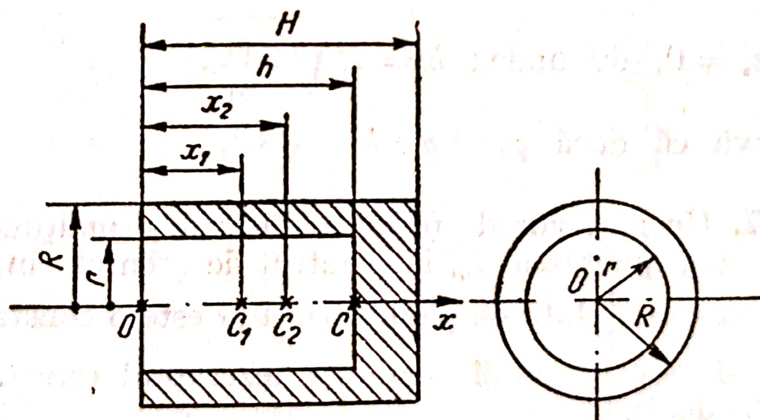


Fig. 3.B.18

Rezolvare. Se notează cu C_1 şi C_2 centrele de greutate ale cavităţii cilindrice interioare, respectiv al cilindrului plin, aflate pe axa de simetrie Ox a pistonului ($OC_1 = x_1$; $OC_2 = x_2$) şi cu V_1 şi V_2 volumele cavităţii interioare şi al cilindrului plin.

Poziţia centrului de greutate C al pistonului este dată de:

$$OC = x_c = \frac{x_2 V_2 - x_1 V_1}{V_2 - V_1} = \frac{\frac{1}{2} H \cdot \pi R^2 H - \frac{1}{2} h \cdot \pi r^2 h}{\pi R^2 H - \pi r^2 h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 H^2 - r^2 h^2}{R^2 H - r^2 h}.$$

Pentru a găsi poziţia lui C cea mai apropiată de fundul pistonului, adică poziţia cea mai îndepărtată de punctul O, se pune condiţia de extrem $\frac{dx_c}{dh} = 0$, din care rezultă ecuaţia:

$$r^2h^2 - 2R^2Hh + R^2H^2 = 0.$$

Prin rezolvarea acestei ecuaţii se obţine:

$$h_{1,2} = H \frac{R}{R \pm \sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Se alege soluţia $h_1 = H \frac{R}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}$ deoarece $h_1 < H$ în timp ce $h_2 > H$.

Înlocuind valoarea obţinută pentru h_1 în expresia lui x_c se obţine:

$$x_{c\,max} = H \frac{R}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} = h_1.$$

Se observă că în poziţia sa cea mai apropiată de fundul pistonului, centrul de greutate C al acestuia se află chiar pe suprafaţa interioară a fundului pistonului.

Capitolul 4

STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER ŞI CU LEGĂTURI

4.A. PREZENTARE TEORETICĂ

4.A.1. Grade de libertate

Definiţie. Un sistem mecanic[1] a cărui poziţie în raport cu un reper fix este determinată prin p parametri scalari independenţi între ei are p grade de libertate.

Poziţia unui punct material liber M în raport cu reperul fix $Oxyz$ este determinată prin cele 3 coordonate x, y, z, independente între ele. Punctul material liber *are trei grade de libertate.*

Dacă punctul material este obligat să rămînă pe o suprafaţă, acest fapt se exprimă printr-o relaţie între coordonatele lui:

$$F(x, y, z) = 0,$$

care este chiar ecuaţia suprafeţei.

Suprafaţa se mai poate reprezenta prin ecuaţiile ei parametrice:

$$x = f(u, v); \quad y = g(u, v); \quad z = h(u, v)$$

unde u şi v sînt doi parametri scalari independenţi.

Un punct material obligat să rămînă pe o suprafaţă are *două grade de libertate.*

Dacă punctul material este obligat să rămînă pe o curbă oarecare are un singur grad de libertate, deoarece fie că ecuaţiile curbei sînt:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{şi} \quad G(x, y, z) = 0.$$

fie că sînt parametrice:

$$x = f(t); \quad y = g(t); \quad z = z(t),$$

poziţia punctului pe curbă depinde de un *singur parametru scalar.*

Evident, un punct material fixat într-un punct geometric nu are nici un grad de libertate.

4.A.2. Statica punctului material liber

Pentru ca un punct material liber să rămînă în repaus în raport cu un reper fix $Oxyz$, este necesar şi suficient ca rezultanta forţelor aplicate punctului material să fie nulă ($\bar{R} = 0$). Această condiţie vectorială se exprimă prin trei ecuaţii scalare, dacă sistemul este în spaţiu:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0$$

[1] În general, un sistem de solide care au legături mecanice între ele.

şi numai prin două din ele, pentru sisteme situate într-un plan, sau prin una singură dacă forţele care acţionează punctul sînt toate situate pe o dreaptă care, evident, trece prin punctul material. Expresiile X, Y, Z sînt, respectiv, sumele scalarilor proiecţiilor forţelor pe axele Ox, Oy şi Oz. Aceste expresii conţin atît *caracteristicile* forţelor, cît şi *parametrii* poziţiei în care este aşezat punctul şi rămîne în repaus sub acţiunea forţelor. Ecuaţiile de echilibru sînt condiţii pentru aceste caracteristici şi parametri. Aceste ecuaţii permit rezolvarea problemei.

4.A.3. Legături, reacţiuni, forţe de legătură, eliberare de legături

În problemele mecanicii aplicate, toate legăturile unui corp cu alte corpuri sînt legături materiale. Corpurile legate între ele se interacţionează, în punctele lor de contact, datorită acţiunii forţelor aplicate corpurilor respective.

Astfel, corpul (C) acţionat de forţele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ (fig. 4.A.1, *a*), acţionează la rîndul lui asupra corpului (C') în punctele A şi B cu forţele $\bar{F}_A$ şi $\bar{F}_B$ (fig. 4.A.1, *b*). În conformitate cu principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii, corpul (C') reacţionează asupra corpului (C) cu forţe egale şi direct opuse $\bar{F}'_A$ şi $\bar{F}'_B$ (fig. 4.A.1, *a*). Reacţiunile $\bar{F}'_A$ şi $\bar{F}'_B$ aplicate corpului (C) şi acţiunile $\bar{F}_A$ şi $\bar{F}_B$ aplicate corpului (C') sînt denumite şi forţe de legătură şi, evident, ele nu se echilibrează, fiind aplicate unor corpuri diferite (C), respectiv (C').

În unele probleme de mecanică teoretică pot apare şi *condiţii geometrice*, cum ar fi: un punct material obligat să se mişte pe o suprafaţă sau pe o curbă; de pildă, un punct material obligat să rămînă pe un cerc (pendulul simplu).

În aceste cazuri, se poate extinde noţiunea de legătură şi asupra condiţiilor geometrice, astfel încît să se poată introduce noţiunea de *forţă de legătură*, pe baza principiului forţelor de legătură.

Principiul forţelor de legătură. Dacă libertatea de mişcare a unui punct material este îngrădită prin condiţii geometrice, aceste condiţii se pot înlocui prin forţe numite forţe de legătură.

Prin această înlocuire, punctul material se poate considera ca liber, *eliberat de legături*.

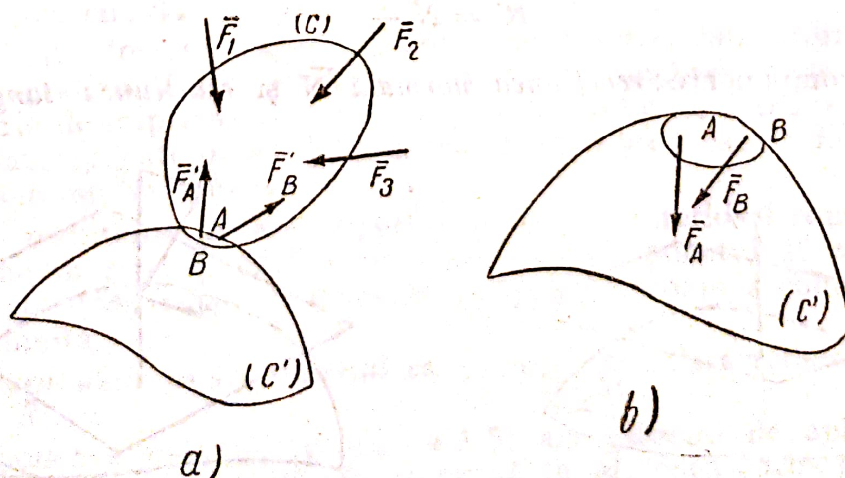


Fig. 4.A.1

Spre deosebire de forţele *active* (date), forţele de legătură, *forţe pasive, au caracteristici necunoscute.*

Aceste necunoscute se pot determina, în statică, scriind condiţiile necesare şi suficiente pentru ca punctul material să rămînă în repaus, iar în dinamică, studiind mişcarea punctului material cu ajutorul ecuaţiilor de mişcare.

4.A.4. Legăturile punctului material

Legătura ideală cu o suprafaţă. Punctul material M are o legătură ideală dacă forţa de legătură este normală la suprafaţă (fig. 4.A.2.).

O b s e r v a ţ i e.

Legătura se numeşte *bilaterală* dacă punctul material nu se poate desprinde de suprafaţă în nici una din cele două părţi ale ei. În acest caz, pe lîngă mărime, nu este cunoscut nici sensul forţei de legătură.

Legătura se numeşte *unilaterală* dacă punctul material se poate desprinde de suprafaţă într-una din cele două părţi. În acest caz se cunoaşte sensul forţei de legătură. Acesta este dirijat înspre partea în care punctul se poate desprinde (fig. 4.A.2).

C o n c l u z i e. Legătura ideală a unui punct M cu o suprafaţă (S) se poate înlocui printr-o forţă cu următoarele caracteristici:

— punctul de aplicaţie în M, — direcţia normală în M la (S),

— *sensul şi mărimea necunoscute*, cu observaţia că sensul este cunoscut numai în cazul legăturii unilaterale.

Legătura reală cu suprafaţa unui corp. În acest caz, în afară de forţa de legătură $\bar{N}$ (componenta normală a reacţiunii $\bar{R}'$) suprafaţa (S) a corpului se opune, în punctul de contact şi la alunecarea punctului material M pe suprafaţă, printr-o forţă $\bar{T}$, care, în general, este datorită frecării. Caracteristicile acestei componente $\bar{T}$ sînt: punctul de aplicaţie în M, suportul situat în planul tangent în M la suprafaţă, direcţia, sensul şi mărimea necunoscute (fig. 4.A.3).

La forţele de frecare se mai ştie că sensul este opus sensului alunecării sau tendinţei (datorită forţei active) de alunecare a punctului şi că mărimea este limitată.

În concluzie, reacţiunea (forţa de legătură) $\bar{R}'$:

$$\bar{R}' = \bar{N} + \bar{T}$$

are două componente: *reacţiunea normală* $\bar{N}$ şi *reacţiunea tangenţială* $\bar{T}$.

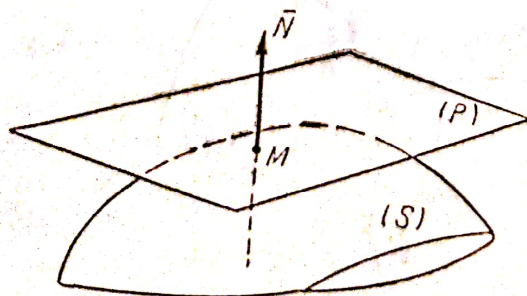


Fig. 4.A.2

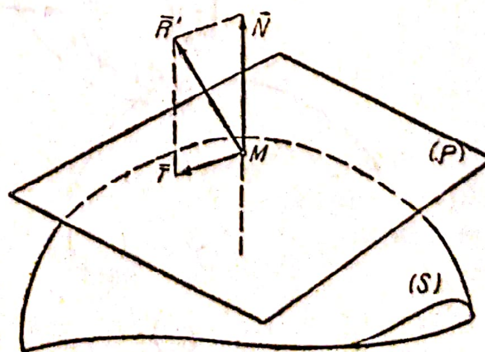


Fig. 4.A.3

4.A.5. Legile frecării uscate (Coulomb)

I. Modulul forței de frecare de alunecare este dat de inegalitatea:

$$|\overline{T}| \leqslant \mu|\overline{N}|,$$

în cazul repausului la limită (în statică), $|\overline{T}_{max}| = \mu_0|\overline{N}|$.

II. Coeficientul de frecare (μ sau μ_0) nu depinde de N și *nici de mărimea ariei suprafeței comune de contact.*

III. Coeficientul de frecare (μ sau μ_0) depinde de *natura* suprafețelor solidelor în punctele de contact, de felul *prelucrării* lor și de natura substanțelor interpuse.

IV. Coeficientul de frecare de *alunecare în mișcare* (μ) nu depinde de viteza relativă dintre cele două solide.

Observații

Legile și coeficienții de frecare sînt determinați experimental.

Legile lui Coulomb sînt legi aproximative cu valabilitate restrînsă strict la frecarea uscată. Mai mult, legile II și IV sînt supuse unor critici justificate.

În dinamică: $|\overline{T}| = \mu|\overline{N}|$.

Se numește *unghi de frecare de alunecare* (φ_0) unghiul pe care-l formează reacțiunea statică maximă:

$$\overline{R}'_{max} = \overline{N} + \overline{T}_{max},$$

cu normala la suprafața (S) în punctul de contact M (fig. 4.A.4)

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{|\overline{T}_{max}|}{|\overline{N}|} = \operatorname{arctg} \mu_0.$$

Cu ajutorul unghiului de frecare se poate construi, în orice punct M al suprafeței (S), o suprafață conică (fig. 4.A.4) avînd ca axă normala în M la (S) iar ca generatoare dreptele duse prin M înclinate cu unghiul φ_0 față de axă. Suprafața generată se numește *conul de frecare în* M al suprafeței (S) cu punctul material (sau cu solidul dacă contactul poate fi conceput punctual).

În general, acest con depinde de valoarea φ_0 care este o funcție de direcția considerată pe planul tangent (P).

Dacă frecarea este *izotropă*, aceeași în orice direcție, conul de frecare este un con circular drept.

Conul de frecare, ca și unghiul de frecare, este utilizat deseori în calculele grafice. Astfel dacă se construiește unghiul și conul de frecare (Geometrie descriptivă) cu vîrful în punctul material, precum și rezultanta *forțelor* date aplicate punctului, se poate deduce ușor dacă punctul material rămîne sau nu în repaus.

Dacă rezultanta $\overline{R}$ are suportul plasat în interiorul conului, punctul M rămîne în repaus, dacă e în afara conului, punctul M nu rămîne în repaus, iar dacă suportul coincide cu o generatoare a conului, repausul este la limită.

Legătura unui punct material cu o curbă (C). Caracteristicile forței de legătură $\overline{R}'$.

Componenta normală $\overline{N}$ (fig. 4.A.5) are punctul de aplicație în M, suportul în planul normal (P) la curbă în M, dacă curba este strîmbă, deci *necunoscută*.

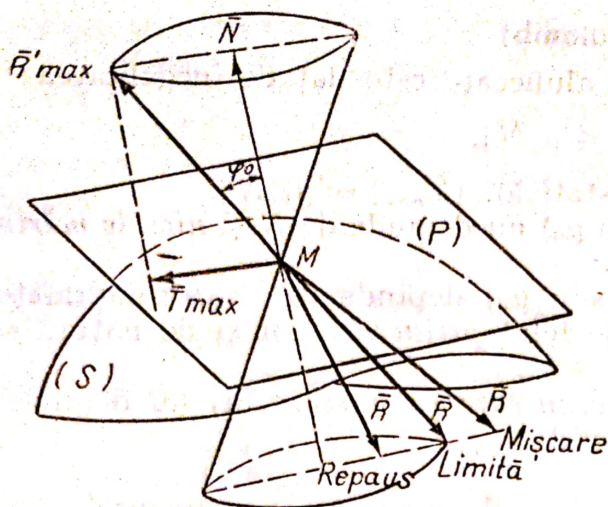


Fig. 4.A.4

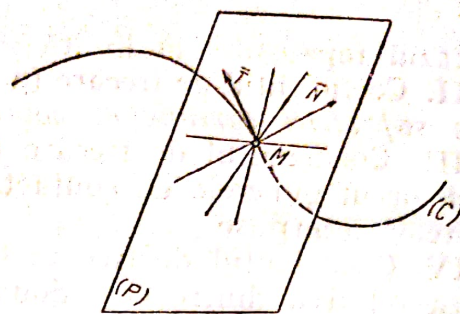


Fig. 4.A.5

Dacă curba este plană, suportul coincide cu unica[1] normală la curbă iar sensul *necunoscut*, în afara cazului unei legături unilaterale cînd se cunoaşte şi sensul.

Mărimea este întotdeauna necunoscută, determinarea ei, ca şi a celorlalte caracteristici, depinzînd de ecuaţiile de echilibru.

Componenta tangenţială $\bar{T}$ (fig. 4.A.5) are M ca punct de aplicaţie, suportul, tangenta în M la C, sensul şi mărimea necunoscute. Ceea ce se ştie este că $\bar{T}$ se opune mişcării sau tendinţei de mişcare, iar în cazul forţelor de frecare are mărimea limitată de:

$$|\bar{T}| \leqslant \mu|\bar{N}|.$$

Legătura unui punct material printr-o bară sau printr-un fir. Legătura prin bară rigidă se încadrează în legătura bilaterală cu o suprafaţă sferică sau dacă sistemul e plan, cu un cerc. Dacă legătura este realizată prin fir, ea este unilaterală.

Dacă se neglijează rezistenţa mediului care ar constitui *reacţiunea tangenţială*, reacţiunea este dirijată după bară sau după fir (fig. 4.A.6), adică se reduce numai la *reacţiunea normală*. Numai la legătura prin fir se cunoaşte dinainte sensul forţei de legătură.

4.A.6. Statica punctului material cu legături

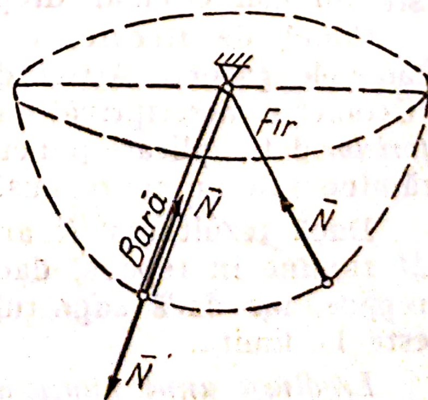


Fig. 4.A.6

În general, problemele staticii punctului material cu legături se rezolvă folosind următoarele indicaţii:

— se scoate în evidenţă aspectul fizic şi dacă este cazul, cel tehnic;

— se scot în evidenţă datele problemei: forţe cunoscute, parametri ai poziţiei de repaus date, coeficienţi de frecare etc.;

[1] dacă punctul este nesingular.

— se notează caracteristicile cunoscute și necunoscute ale forțelor de legătură, precum și parametrii necunoscuți ai poziției de repaus;
— se eliberează punctul material de legături și se alege sistemul de referință cel mai convenabil care să permită scrierea unor ecuații de proiecție cît mai simple, fără însă a modifica datele problemei.

Condiția vectorială necesară și suficientă pentru echilibrul forțelor, $\bar{R} + \bar{R}' = 0$, se proiectează pe axele sistemului de referință ales, de exemplu pe $Oxyz$:

$$X + X' = 0; \qquad Y + Y' = 0; \qquad Z + Z' = 0,$$

unde $R(X, Y, Z)$ este rezultanta forțelor date aplicate punctului material iar $R'(X', Y', Z')$ este rezultanta forțelor de legătură conținînd în expresiile scalare și necunoscutele problemei. În afară de cele 3 ecuații (în spațiu, în cazul sistemelor plane, numai două ș.a.m.d.) se mai pot scrie și inecuații de forma: $|\bar{T}| \leqslant \mu|\bar{N}|$ pentru forțele de frecare, dacă sînt.

Se rezolvă sistemul de ecuații și inecuații scalare. Problemele cu inecuații datorită frecărilor sînt *nedeterminate*. În anumite cazuri de *legături multiple*, numărul necunoscutelor forțelor de legătură pot depăși numărul ecuațiilor scalare de echilibru în care intervin aceste necunoscute. Asemenea sisteme de legături se numesc *static nedeterminate*.

Mai sînt sisteme în care numărul necunoscutelor forțelor de legătură este mai mic decît cel al ecuațiilor scalare de echilibru. Un asemenea sistem se numește *mecanism*, deoarece legăturile nu au suprimat toate gradele de libertate ale sistemului. Ecuațiile de echilibru nefolosite servesc la calculul parametrilor de poziție, adică la *determinarea poziției* în care sistemul *trebuie așezat* astfel încît sub acțiunea forțelor date și a legăturilor el să rămînă în *repaus*.

La sfîrșit, se va trece la interpretarea fizică și la explicarea rezultatelor obținute.

4.B. APLICAȚII LA STATICA PUNCTULUI MATERIAL

4.B.1. Un punct material M este atras de 3 puncte fixe, A, B și C, aflate la distanța l unul de altul (fig. 4.B.1), cu forțe proporționale cu distanța de la punctul M la fiecare din ele, coeficienții de proporționalitate fiind K_1, K_2, K_3. Se cere poziția de echilibru a punctului M.

Rezolvare. Expresiile vectoriale ale forțelor sînt date de:

$$\bar{F}_1 = K_1\overline{MA}; \quad \bar{F}_2 = K_2\overline{MB}; \quad \bar{F}_3 = K_3\overline{MC}.$$

În raport cu sistemul de axe xAy, poziția punctului M este dată de parametrii x, y necunoscuți. Deci se pot scrie vectorii:

$$\bar{F}_1 = -K_1x\bar{i} - K_1y\bar{j}$$

$$\bar{F}_2 = K_2(l - x)\bar{i} - K_2y\bar{j}$$

$$\bar{F}_3 = K_3\left(\frac{l}{2} - x\right)\bar{i} + K_3\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - y\right)\bar{j}.$$

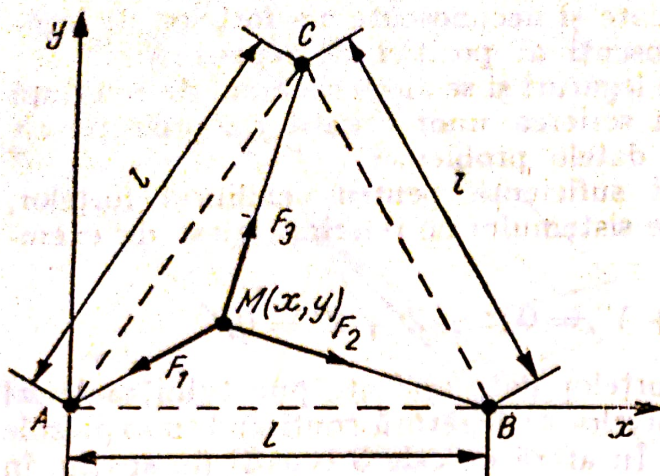


Fig. 4.B.1

Proiectînd forțele pe axele Ax, Ay, rezultă sistemul de ecuații:

$$(\Sigma X_i = 0);$$

$$-K_1x + K_2(l - x) + + K_3\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0);$$

$$-K_1y - K_2y + K_3\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - y\right) = 0,$$

de unde

$$x = \frac{\left(K_2 + \frac{K_3}{2}\right)l}{K_1 + K_2 + K_3}; \quad y = \frac{K_3\frac{l\sqrt{3}}{2}}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

Caz particular:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}l}{3} = \frac{l}{2}; \quad y = \frac{\sqrt{3}l}{6}.$$

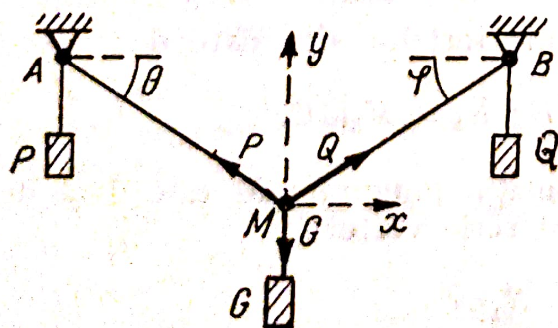
Poziția de echilibru a punctului M coincide cu centrul de simetrie al triunghiului.

4.B.2. De un inel M de greutate neglijabilă sînt prinse trei fire la capetele cărora acționează greutățile P, G și Q. Două dintre fire trec fără frecare prin două inele fixe situate în A și B. Se cere poziția de echilibru a inelului M dată de unghiurile θ și φ (fig. 4.B.2, *a*).

Rezolvare. Se izolează inelul M introducînd forțele care acționează firele respective. Proiectînd după sistemul xMy se obțin ecuațiile de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad Q\cos\varphi - P\cos\theta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Q\sin\varphi + P\sin\theta - G = 0.$$



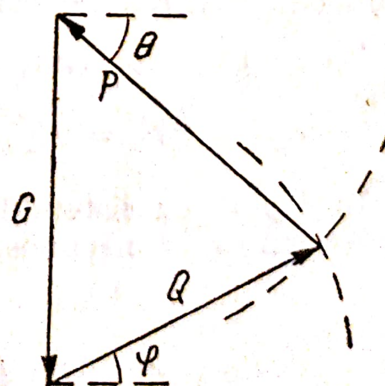


Fig. 4.B.2

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$\sin\varphi = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ}; \quad \sin\theta = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2GP}.$$

Deoarece $\sin\varphi \in [-1;\ +1]$ și $\sin\theta \in [-1;\ +1]$, pentru poziția de echilibru trebuie îndeplinite condițiile:

$$-1 \leqslant \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ} \leqslant 1; \quad -1 \leqslant \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2GP} \leqslant 1.$$

Din aceste condiții rezultă:

$$P \leqslant Q + G; \quad G \leqslant Q + P; \quad Q \leqslant P + G.$$

Soluția grafică.

Pentru ca forțele G, P și Q să fie în echilibru, trebuie ca poligonul forțelor să fie închis. Problema revine la construirea unui triunghi cînd se cunosc mărimile a trei laturi și direcția uneia dintre ele (fig. 4.B.2, *b*). Din construcția grafică rezultă mărimile unghiurilor θ și φ, relațiile între laturile triunghiului format de forțe regăsind valorile din rezolvarea analitică.

4.B.3. Să se determine tensiunile din cele trei cabluri de prindere ale greutății P, poziția de echilibru M fiind dată de distanțele a, b, c, d și h (fig. 4.B.3).

R e z o l v a r e. Se izolează corpul P, punînd în evidență tensiunile S_1, S_2, S_3; ecuațiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad S_1 \cos\alpha - S_2 \sin\beta - S_3 \sin\gamma \cdot \cos\delta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -S_1 \sin\alpha + S_2 \cos\beta - S_3 \sin\gamma \cdot \sin\delta = 0;$$

$$(\Sigma Z_i = 0); \quad S_3 \cos\gamma - P = 0.$$

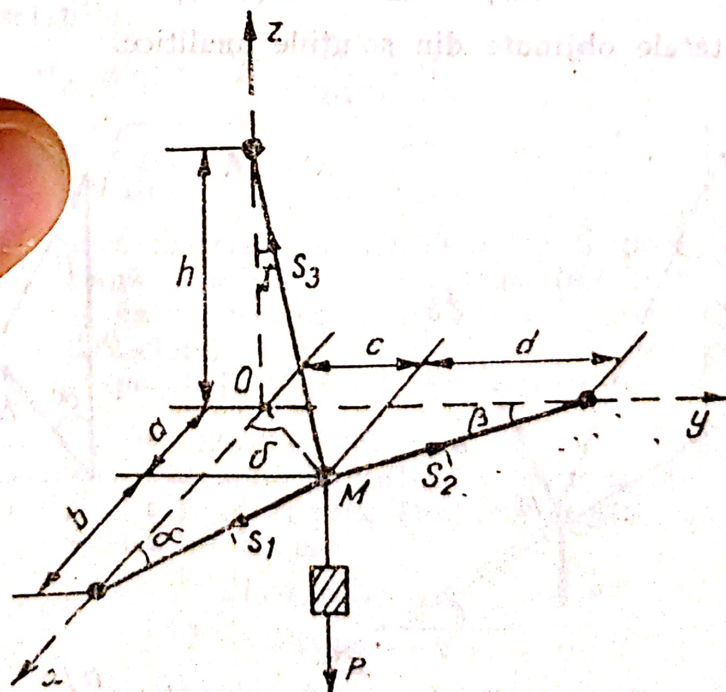


Fig. 4.B.3

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$S_1 = P\,\mathrm{tg}\,\gamma \frac{\cos(\beta - \delta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{P}{h} \cdot \frac{a(d + c)}{bd - ac} \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$S_2 = P\,\mathrm{tg}\,\gamma \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{P}{h} \cdot \frac{c(a + b)}{bd - ac} \sqrt{a^2 + d^2};$$

$$S_3 = \frac{P}{\cos\gamma} = \frac{P}{h} \sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.$$

4.B.4. Un punct material M de greutate G este legat cu un fir de punctul fix A şi se sprijină pe un plan înclinat cu unghiul α. Cunoscînd unghiul β dintre fir şi perete, să se determine forţele de legătură (fig. 4.B.4, *a*).

R e z o l v a r e. Se eliberează punctul material M de legături punînd în evidenţă tensiunea S în fir şi reacţiunea normală N. Faţă de sistemul de axe xMy, ecuaţiile scalare de echilibru se scriu:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad G \sin\alpha - S \sin(\alpha + \beta) = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N + S \cos(\alpha + \beta) - G \cos\alpha = 0.$$

Rezultă: $S = G \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$; $N = G \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Soluţia grafică.

Se construieşte poligonul forţelor începînd cu forţa complet cunoscută G, prin extremităţile căreia se duc paralele la direcţiile lui N şi S astfel încît poligonul să fie închis (fig. 4.B.4, *b*). Relaţiile ce se deduc din triunghi

$$\frac{N}{\sin\beta} = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{G}{\sin(\alpha + \beta)}$$

regăsesc rezultatele obţinute din soluţiile analitice.

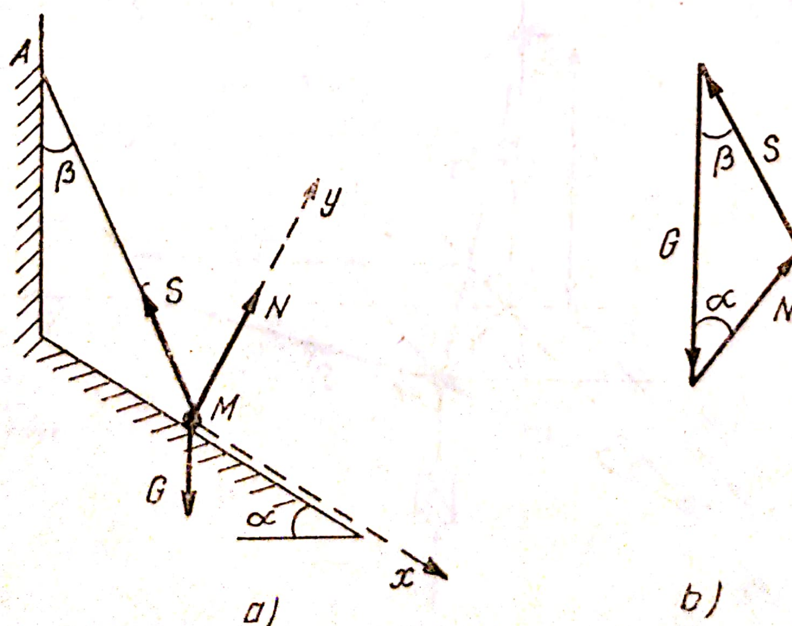


Fig. 4.B.4

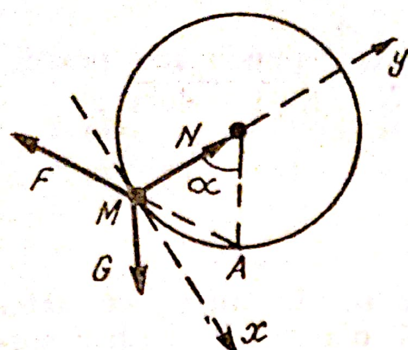


Fig. 4.B.5

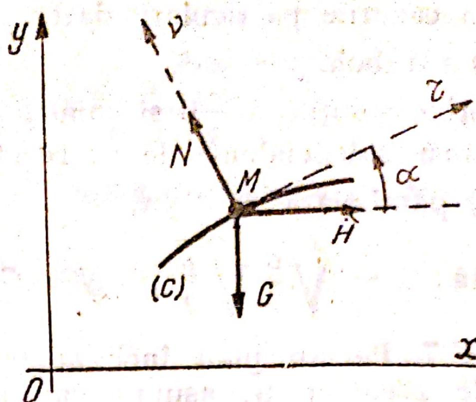


Fig. 4.B.6

4.B.5. Un punct M de greutate G poate aluneca fără frecare pe un cerc, fiind respins de extremitatea inferioară a diametrului vertical al cercului cu o forță F invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două puncte. Să se determine poziția α de echilibru a punctului pe cerc și reacțiunea cercului (fig. 4.B.5).

R e z o l v a r e. Se eliberează inelul M de legătura cu cercul punînd în evidență reacțiunea normală N. În sistemul de axe xMy, ecuațiile scalare de proiecție pentru echilibru sînt:

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \quad G \sin \alpha - F \cos \frac{\alpha}{2} = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad N - G \cos \alpha - F \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

unde $F = \dfrac{k}{AM^2} = \dfrac{k}{4R^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$.

Rezultă soluțiile:

a) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = 0\,; \quad \alpha = \pi\,; \quad N = \dfrac{k}{4R^2} - G;$

b) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt[3]{\dfrac{k}{GR^2}}\,; \quad N = G.$

4.B.6. Un punct material M de greutate G poate aluneca fără frecare pe curba plană $y = f(x)$, fiind respins (respectiv atras) de o forță orizontală $H = \pm kx$ proporțională cu abscisa punctului (fig. 4.B.6). Să se afle poziția de echilibru a punctului și reacțiunea normală la curbă. Caz particular: a) parabola $y = ax^2$; b) parabola $y^2 = 2\,px$.

R e z o l v a r e. Se eliberează punctul M de legătură, înlocuind legătura cu reacțiunea N normală la curbă. Se notează cu α unghiul pe care tangenta la curbă îl face cu axa Ox. Proiectînd forțele pe direcția tangentei și normalei la curbă, se obțin:

$$H \cos \alpha - G \sin \alpha = 0\,;$$

$$N - G \cos \alpha - H \sin \alpha = 0\,;$$

rezultă: $H = Gy' = \pm kx$ ecuația ce definește poziția de echilibru;
$N = G\sqrt{1 + y'^2}$ reacțiunea normală.

În cazurile particulare date:

a) parabola $y = ax^2$,

se obține soluția $x = 0$ și condiția $k = 2Ga$ ce corespunde unei poziții de echilibru independente de x; reacțiunea este $N = G\sqrt{1 + 4a^2x^2}$;

b) parabola $y^2 = 2\,px$,

rezultă: $x = \sqrt[3]{\frac{G}{k}\sqrt{\frac{p}{2}}}$; $\quad N = G\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$.

4.B.7. Pe un plan înclinat cu unghiul α se află un punct material M de greutate G, asupra căruia acționează o forță P al cărui suport face cu planul un unghi constant β. Dîndu-se coeficientul de frecare μ pe plan, se cere valoarea lui P pentru care punctul M stă în repaus (fig. 4.B.7).

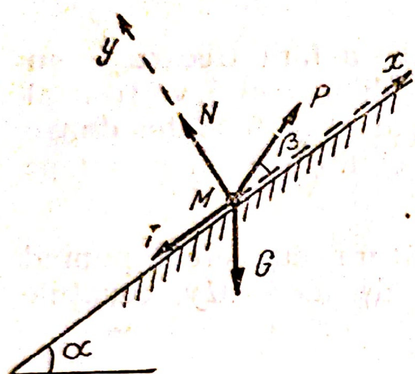


Fig. 4.B.7

R e z o l v a r e. Problema implică două posibilități de mișcare. Presupunînd că sub acțiunea forțelor efectiv aplicate G și P, punctul M are tendința de a aluneca în sus, se eliberează punctul de legături introducînd forțele de legătură, reacțiunea normală N și forța de frecare T orientată în sens opus, adică în jos.

Ecuațiile scalare de echilibru față de sistemul xMy sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad P\cos\beta - G\sin\alpha - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N + P\sin\beta - G\cos\alpha = 0.$$

Se adaugă inecuația $T \leqslant \mu N$.

Rezolvînd sistemul se obține:

$$P \leqslant G\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$$

sau, punînd $\mu = \operatorname{tg}\varphi$, rezultă:

$$P \leqslant G\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

dacă $\beta - \varphi < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $\beta - \varphi > \frac{\pi}{2}$ lunecarea în sus nu poate apărea.

Dacă tendința de alunecare este în jos, sensul forței T se schimbă, adică este în sus, rezultînd:

$$P \geqslant G\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta},$$

sau:

$$P \geqslant G\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)},$$

dacă $\beta + \varphi < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $\alpha < \varphi$ lunecarea în jos nu poate apărea.

Pentru a avea echilibru trebuie ca:

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}G \leqslant P \leqslant G\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta-\varphi)}.$$

Pentru ca punctul M să-şi păstreze legătura trebuie ca $N > 0$. Se obţine:

$$G\cos\alpha - P\sin\beta \geqslant 0$$

$$P_{*} \leqslant \frac{G\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

— În cazul cînd $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, cazul general, se observă că valoarea limită $P_{*}=G\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ se află în afara intervalului de valori de sus şi echilibrul punctului se poate strica numai prin lunecare.

Deci:

$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} \leqslant P \leqslant G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} < G < G\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = P_{*}.$$

— În cazul cînd $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$

$$G < G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} \leqslant P \leqslant G\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

4.B.8. Un inel M de greutate G reazemă pe un cerc vertical cu coeficient de frecare μ, fiind acţionat şi de forţa orizontală $F=G$. Să se determine poziţia de echilibru dată de unghiul θ (fig. 4.B.8).

R e z o l v a r e. Se eliberează inelul M de legături introducînd forţele de legătură: reacţiunea normală N şi forţa de frecare T orientată în sus, presupunînd tendinţa de alunecare în jos. Ecuaţiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referinţă xMy sînt:

$$(\Sigma X_i = 0);\quad G\sin\theta - F\cos\theta - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0);\quad N - G\cos\theta - F\sin\theta = 0.$$

Se adaugă inecuaţia: $T \leqslant \mu N$.

Rezolvînd sistemul şi luînd în considerare şi tendinţa de mişcare în sus, se obţine pentru echilibru domeniul de variaţie pentru θ:

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} \leqslant \operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

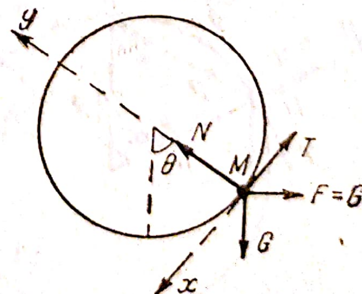


Fig. 4.B.8

4.B.9. Un punct material de greutate G se află pe curba plană de ecuaţie $y=f(x)$, fiind acţionat de o forţă P avînd direcţia tangentei la curbă. Să se determine între ce limite variază raportul $\frac{P}{G}$, dacă punctul ocupă o poziţie de echi-

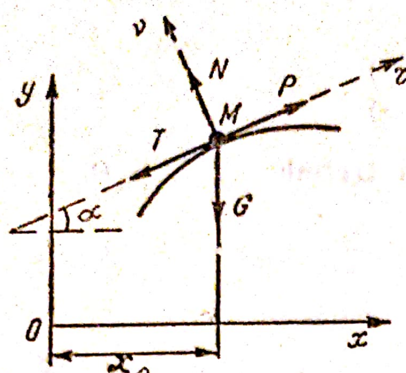


Fig. 4.B.9

libru într-un punct M de abscisă $x = x_0$, coeficientul de frecare fiind μ (fig. 4.B.9). Aplicaţie numerică: a) $y = \sin x$; $\mu = 0{,}2$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $y = \frac{x^2}{2} - 1$; $\mu = 0{,}2$; $x_0 = 1$.

R e z o l v a r e. Se presupune că sub acţiunea forţelor efectiv aplicate G şi P, punctul ar avea tendinţa de alunecare în sus; eliberînd punctul de legături, se introduc forţele de legătură: reacţiunea normală N şi forţa de frecare T orientată în jos. Notînd cu α unghiul pe care tangenta la curbă îl face cu axa Ox, proiecţiile forţelor faţă de sistemul $\tau M \nu$ conduc la ecuaţiile scalare de echilibru:

$$P - G \sin \alpha - T = 0;$$

$$N - G \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuaţia: $T \leqslant \mu N$.

Rezolvînd sistemul, rezultă:

$P \leqslant G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

Deoarece $\operatorname{tg} \alpha = y'$ şi ţinînd seama şi de tendinţa de mişcare în jos, rezultă pentru echilibru dubla inegalitate:

$$\frac{y'_0 - \mu}{\sqrt{1 + y'^2_0}} \leqslant \frac{P}{G} \leqslant \frac{y'_0 + \mu}{\sqrt{1 + y'^2_0}}.$$

Pentru aplicaţia numerică se obţin valorile:

a) $0{,}268 \leqslant \frac{P}{G} \leqslant 0{,}627$ b) $0{,}496 \leqslant \frac{P}{G} \leqslant 0{,}925$.

4.B.10. Un inel M de greutate G alunecă pe un cerc situat într-un plan vertical. Inelul M este legat cu un fir trecut în punctul B peste un scripete fix avînd la capăt o greutate P (fig. 4.B.10). Cunoscînd coeficientul de frecare μ, să se determine valorile lui P pentru poziţia de echilibru.

R e z o l v a r e. Inelul are două posibilităţi de mişcare, se consideră tendinţa de mişcare spre dreapta. Se eliberează punctul M de legături introducînd forţele de legătură: reacţiunea normală N, forţa de frecare T opusă mişcării, tensiunea P din fir. Se aleg axele xMy şi se proiectează totalitatea forţelor ecuaţiilor scalare de echilibru:

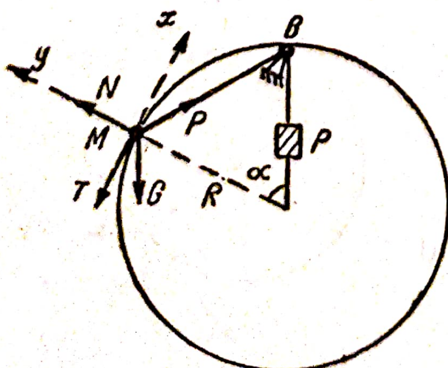


Fig. 4.B.10

$$(\Sigma X_i = 0); \quad P \cos \frac{\alpha}{2} - G \sin \alpha - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - P \sin \frac{\alpha}{2} - G \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuaţia: $T \leqslant \mu N$.

Rezolvînd, se obţine:

$$P \leqslant G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \mu \sin \frac{\alpha}{2}}$$

sau, înlocuind $\text{tg}\ \varphi = \mu$, rezultă:

$$P \leqslant G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)} \text{ condiţia să nu alunece în sus.}$$

Condiţia este valabilă pentru $\frac{\alpha}{2} + \varphi < \frac{\pi}{2}$, deci $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \varphi$.

În cazul tendinţei de alunecare în jos, se va schimba sensul forţei de frecare T rezultînd:

$$P \geqslant G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} + \mu \sin \frac{\alpha}{2}},$$

sau:

$$P \geqslant G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}.$$

Condiţia este valabilă pentru $\frac{\alpha}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$, adică $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + \varphi$, deci pentru toate poziţiile inelului pe cerc.

4.B.11. Două inele A şi B sînt prinse prin trei fire, poziţia de echilibru fiind dată de unghiurile de 60°, 30° şi respectiv 45°. Cunoscînd greutatea P a inelului A, să se determine greutatea Q a inelului B, precum şi mărimea tensiunilor în fire (fig. 4.B.11) pentru echilibru.

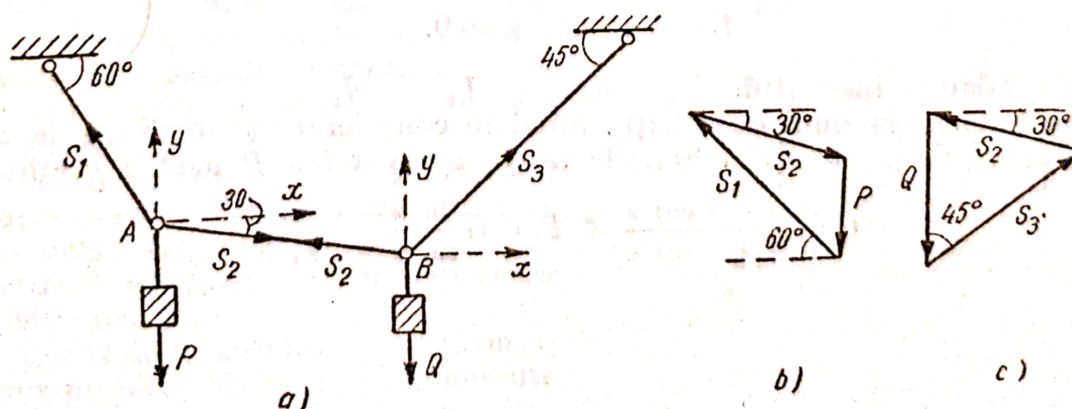


Fig. 4.B.11

R e z o l v a r e. Se eliberează inelele de legături punînd în evidență tensiunile S_1, S_2 și S_3 din fire. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$S_2 \cos 30° - S_1 \cos 60° = 0$$
$$S_1 \sin 60° - S_2 \sin 30° - P = 0$$
$$S_2 \cos 30° - S_3 \cos 45° = 0$$
$$S_2 \sin 30° + S_3 \sin 45° - Q = 0.$$

Rezultă:

$$Q = \frac{P}{2}(1 + \sqrt{3})\,;\ S_1 = P\sqrt{3}\,;\ S_2 = P\,;\ S_3 = P\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Soluția grafică. Se construiește poligonul de echilibru al forțelor inelului A (fig. 4.B.11, *b*), apoi al inelului B (fig. 4.B.11, *c*).

4.B.12. Se consideră sistemul format din două corpuri A și B legate printr-un fir, rezemînd pe planurile aspre de înclinare α (fig. 4.B.12). Cunoscînd greutatea G a corpului din stînga și coeficientul μ de frecare de alunecare, să se determine greutatea P a corpului din dreapta pentru echilibru.

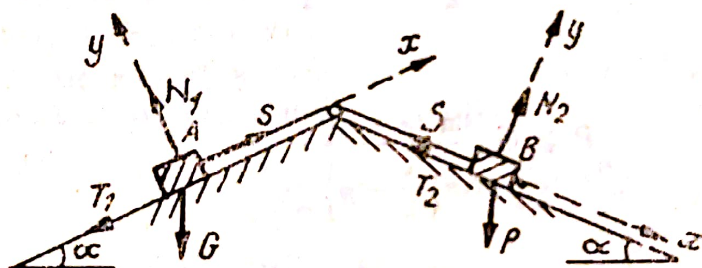


Fig. 4.B.12

R e z o l v a r e. Se eliberează corpurile de legături introducînd tensiunea S din fir, reacțiunile normale N_1 și N_2, forțele de frecare T_1 și T_2, considerînd tendința de mișcare spre dreapta. Ecuațiile scalare de echilibru vor fi:

$$S - G \sin \alpha - T_1 = 0;$$
$$N_1 - G \cos \alpha = 0;$$
$$P \sin \alpha - S - T_2 = 0;$$
$$N_2 - P \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuațiile $T_1 \leqslant \mu N_1$ și $T_2 \leqslant \mu N_2$.

Rezolvînd sistemul de ecuații, luînd în considerare și tendința de mișcare spre stînga, se obțin limitele între care variază P pentru echilibru:

$$G\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \leqslant P \leqslant G\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

Capitolul 5

STATICA SOLIDULUI RIGID LIBER ȘI CU LEGĂTURI

5.A. PREZENTARE TEORETICĂ

5.A.1. Grade de libertate

Un solid rigid liber în spațiu are 6 grade de libertate, adică poziția lui în spațiu depinde de 6 parametri scalari independenți între ei.

Se știe că pentru a fixa, în raport cu un reper $Oxyz$, un solid rigid este suficient să fie fixate trei puncte ale solidului:

$$A\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\qquad B\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\qquad C\ (x_3,\ y_3,\ z_3),$$

cu condiția ca cele trei puncte *să nu se afle pe o aceeași dreaptă* (fig. 5.A.1).

5.A.2. Statica solidului rigid liber

Pentru ca un solid rigid liber, în repaus în raport cu un reper fix $Oxyz$ și acționat de un sistem de forțe, să rămînă mai departe în repaus, este necesar și suficient ca torsorul sistemului de forțe compus din:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i;\quad \bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

să fie nul:

$$\bar{R} = 0,\quad \bar{M} = 0, \tag{5.1}$$

adică sistemul de forțe aplicat solidului rigid să se echilibreze.

Cele două condiții vectoriale se traduc prin șase condiții scalare:

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0, \tag{5.2}$$
$$M_x = 0,\ M_y = 0,\ M_z = 0,$$

unde X este suma scalarilor proiecțiilor forțelor pe axa Ox și M_x este scalarul momentului rezultant în raport cu axa Ox; în mod corespunzător se consideră și Y, M_y și Z, M_z.

Cei 6 scalari ai ecuațiilor (5.2) conțin atît *caracteristici* ale forțelor care acționează, cît și parametri de poziție ai solidului rigid în raport cu reperul fix.

Ecuațiile de echilibru permit rezolvarea problemelor în care necunoscute pot fi atît unele caracteristici ale forțelor, cît și parametri de poziție.

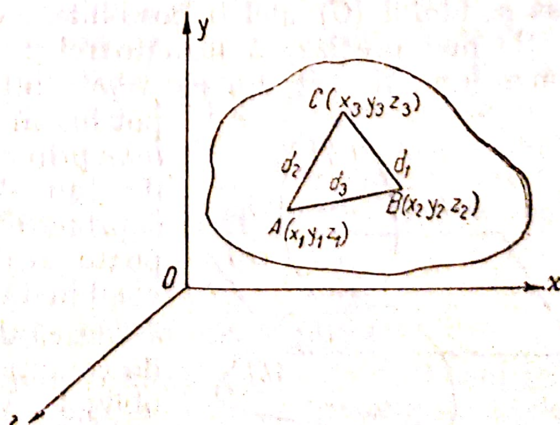


Fig. 5.A.1

Numărul total al acestor necunoscute, care pot fi determinate, nu poate fi mai mare ca 6.

Cazuri particulare. Dacă sistemul de forțe acționează astfel încît suporturile lor să fie situate într-un plan solidar cu solidul, condițiile de echilibru, exprimate scalar în raport cu un reper avînd axele Ox și Oy în acest plan, se reduc la:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad M_z = M_0 = 0. \tag{5.3}$$

În cazul în care sistemul de forțe care acționează solidul este cu suporturile paralele, condițiile de echilibru exprimate în raport cu un reper ales cu axa Oz paralelă cu direcția comună a suporturilor, sînt:

$$Z = 0, \qquad M_x = 0 \quad \text{și} \quad M_y = 0. \tag{5.4}$$

Dacă solidul este acționat numai de trei forțe, sînt *necesare* următoarele condiții pentru suporturile acestor forțe:

— ori toate trei concurente și distincte,
— ori toate trei paralele și distincte,
— ori toate trei confundate.

Condițiile *nefiind și suficiente*, mai trebuie satisfăcute și alte condiții care se deduc ușor pentru diferite cazuri particulare.

5.A.3. Legăturile unui solid, deplasări

În practică, solidele reale au diferite tipuri de legături între ele. Legăturile se realizează în punctele lor comune de contact. Mulțimea acestor puncte poate fi considerată, cu o bună aproximație, ca fiind continuă, constituind o suprafață de contact limitată de o anumită curbă închisă. Această suprafață de contact poate fi datorită unor prelucrări sau consecința deformărilor superficiale cînd solidele reale în contact sînt acționate de forțe.

Legătura pe această suprafață a celor două solide (C) și (C'), (C') fiind considerat fix (fig. 5.A.2), reduce din cele 6 grade de libertate ale lui C permițîndu-i numai anumite deplasări și un anumit număr de grade de libertate $p < 6$, în funcție de tipul legăturii.

Astfel, legătura prin reazem reduce un grad de libertate a solidului (C), lăsîndu-i $p = 5$. Legătura prin *articulație sferică* suprimă 3 grade de libertate, lăsîndu-i $p = 3$. Legătura prin *articulație cilindrică* suprimă 5 grade de libertate, lăsîndu-i $p = 1$. În sfîrșit, legătura prin *încastrare* nu-i lasă solidului (C) nici o posibilitate de deplasare față de (C'), adică $p = 0$.

Se mai precizează următoarele: aceste legături sînt în spațiul cu trei dimensiuni, fiecare din ele reprezintă un anumit tip *unic* de legătură, se pot lua în considerare și legături *multiple simultane* prin care se pot suprima un număr anumit de grade de libertate ale solidului (C). De pildă, suprimarea celor 6 grade de libertate se mai poate realiza și printr-o articulație cilindrică combinată cu un reazem, adică $p = 6 - 5 - 1 = 0$.

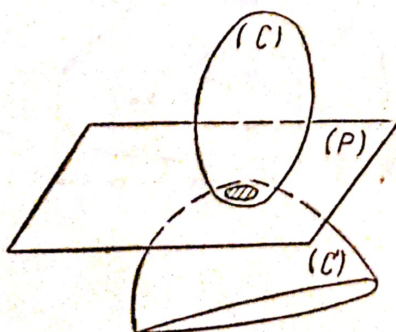


Fig. 5.A.2

Dacă deplasarea unui solid (C) este limitată de condiția ca un plan (P) solidar cu (C) să fie obligat să se deplaseze într-un plan fix (P'), solidul (C) nu mai are decît 3 grade de libertate. Aceasta este deplasarea *plan-paralelă* a unui

solid. Studiul ei se poate face cu ajutorul deplasărilor și a legăturilor unei plăci plane (P) care este obligată să rămînă în același plan fix cu o altă placă plană (P') fixă. Placa (P), dacă este *liberă* în planul fix (P') are 3 grade de libertate. În cazul în care (P) este legată de placa fixă (P') în punctele de contact situate pe un arc de curbă comun AB (fig. 5.A.3), se pot distinge următoarele tipuri de legături:

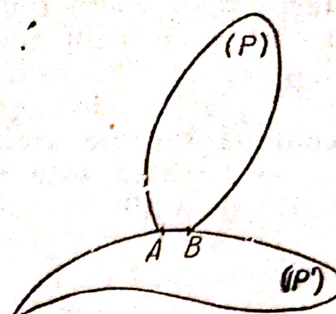


Fig. 5.A.3

— *reazemul* care reduce numărul gradelor de libertate la 2 și permite plăcii (P) deplasări de alunecare și de rostogolire față de (P');
— *articulația* care reduce la 1 numărul de grade de libertate, permițînd plăcii (P) numai rotația față de un punct fix comun (P'). Acestei legături îi corespunde, în spațiul cu trei dimensiuni, articulația cilindrică;
— *încastrarea* care reduce toate gradele de libertate ale plăcii (P) față de (P'). Lucrurile se petrec ca și cum (P) ar avea două puncte fixe comune cu (P'), adică două articulații sau o articulație și un reazem;
— *un solid liber în spațiu poate fi deplasat oricum.* De îndată ce el este legat de un solid fix, tipurile de deplasări sînt limitate la următoarele: *alunecare, rotație, rostogolire* cu diferite variante sau compuneri între aceste tipuri. Cele care prezintă un interes mai mare în aplicații vor fi prezentate mai departe.

Oricare ar fi deplasările permise de legăturile solidului (C) cu solidul (C') fix, *toate aceste deplasări* ale lui (C) întîmpină opuneri din partea solidului (C') datorită *frecărilor* care apar în punctele de contact de pe suprafața comună. Aceste opuneri se pot exprima prin sisteme de forțe pasive.

Despre frecări și despre forțele de frecare se știu următoarele:

— ele *nu reduc mai mult numărul gradelor de libertate* rămas solidului (C) după considerarea legăturii respective cu (C');

— forțele de frecare au valori limitate.

5.A.4. Forțe de legătură sau reacțiuni

Dacă legăturile sînt concepute ca ideale, model corespunzător frecărilor foarte mici, neglijabile, forțele de legătură sau reacțiunile sînt distribuite după normalele comune în punctele suprafeței de contact. Ele se numesc *reacțiuni normale,* iar dacă se folosește și modelul rigidității, ele pot primi orice valori în funcție de forțele active.

Dacă se ține seamă și de frecări, acestea sînt legături *tangențiale* și se înlocuiesc prin forțe de legătură sau *reacțiuni tangențiale.* Aceste forțe depind de reacțiunile normale, de caracteristicile fizice ale materialelor suprafețelor celor două solide în contact și de forțele care tind să deplaseze solidul (C) față de (C'). Întotdeauna reacțiunile tangențiale, datorită frecărilor, se opun tendinței de deplasare, au valori *nedeterminate* și *limitate,* valorile lor maxime pot apare numai în momentul în care dispare repausul solidului (C) față de (C').

5.A.5. Ipoteze cu privire la distribuția forțelor de legătură

În general, forțele de legătură sînt distribuite pe o suprafață sau pe o curbă comună de contact. Legile după care ele sînt distribuite se stabilesc experimental. La fel se determină și legile privind frecările. Toate aceste

legi empirice sînt folosite în problemele de mecanică aplicată. În mecanica teoretică, într-un prim studiu aproximativ se admit uneori următoarele ipoteze simplificatoare:

— forțele de legătură normale sînt *uniform* distribuite pe suprafața comună sau pe arcul de curbă comun de contact;

— frecarea este *izotropă*, adică coeficienții de frecare sînt aceiași în toate direcțiile pe suprafața sau curba de contact.

Dacă la baza studiului teoretic stau aceste ipoteze simplificatoare, se demonstrează că în multe situații lucrurile se petrec, din punct de vedere al așezării forțelor de legătură, ca și cum contactul dintre (C) și (C'), respectiv dintre (P) și (P'), ar fi punctual. Sînt însă unele probleme de frecare, de pildă: frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare, frecarea în articulații, în care una din ipoteze sau ambele nu pot fi admise. În aceste cazuri, sistemul forțelor de frecare se reduce și la cupluri de forțe care nu pot acționa într-un singur punct, punctul de contact. Totuși, cum în ecuațiile de echilibru cuplurile sînt reprezentate prin momentele lor, vectori simpli, acești vectori pot fi așezați ca și forțele, în punctul presupus de contact al legăturii schematizate.

5.A.6. Necunoscutele reacțiunilor pentru legăturile curente

Reazemul în spațiu

Reacțiunea normală $\overline{N}$ are suportul dirijat după normala comună $\overline{n}$ (fig. 5.A.4) dusă în punctul O de contact la suprafața solidelor (C) și (C') sensul și modulul necunoscute. Sensul este cunoscut numai dacă legătura este unilaterală.

Forța de frecare de alunecare $\overline{T}$ are suportul care trece prin O, situat în planul tangent (P_t) comun la suprafețele solidelor, direcția și sensul necunoscute, iar modulul limitat de inecuația: $|\overline{T}| \leqslant \mu|\overline{N}|$, unde μ este coeficientul de frecare de alunecare.

Cuplul de frecare de pivotare este reprezentat prin momentul $\overline{M}_p$ situat pe suportul $\overline{N}$, sensul opus sensului de pivotare, iar modulul limitat de inecuația $|\overline{M}_p| \leqslant \mu r'|\overline{N}|$, în care μ este coeficientul de frecare la alunecare, iar r' o lungime depinzînd de caracteristicile geometrice ale suprafeței comune de contact (de obicei o coroană circulară), în care caz:

$$r' = \frac{2}{3}\,\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}\,.$$

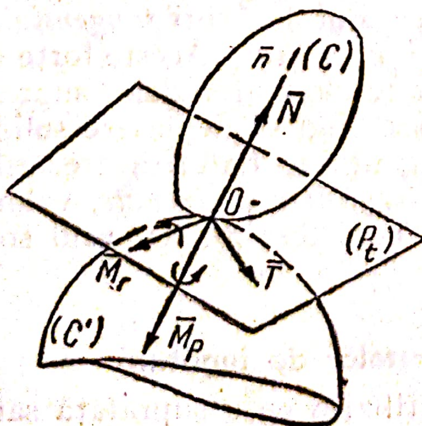


Fig. 5.A.4

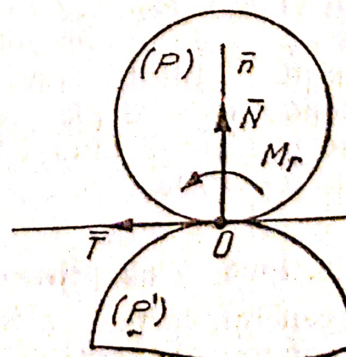


Fig. 5.A.5

Cuplul de frecare de rostogolire este reprezentat prin momentul $\bar{M}_r$ situat în planul tangent (P_t) de direcţie şi sens necunoscute, iar modulul limitat de inecuaţia $|\bar{M}_r| \leqslant s|\bar{N}|$, în care s este coeficientul *liniar* de frecare de rostogolire stabilit experimental în funcţie de natura materialelor solidelor în contact.

Reazemul în plan

Reacţiunea normală $\bar{N}$ are suportul dirijat după normala comună[1] $\bar{n}$ (fig. 5.A.5) din punctul O de contact al curbelor care mărginesc plăcile (P) şi (P'), sensul şi modulul necunoscute. Sensul se cunoaşte numai dacă legătura este unilaterală.

Forţa de frecare de alunecare $\bar{T}$ are suportul dirijat după tangenta comună din O, sensul opus tendinţei de deplasare, modulul limitat de inecuaţia $|\bar{T}| \leqslant \mu|\bar{N}|$, unde μ este coeficientul de frecare de alunecare dintre plăcile (P) şi (P').

Cuplul de frecare de rostogolire este reprezentat prin momentul $\bar{M}_r$, perpendicular în O pe planul plăcilor, avînd sensul necunoscut, iar modulul limitat de inecuaţia $|\bar{M}_r| \leqslant s|\bar{N}|$, s fiind coeficientul liniar de frecare de rostogolire.

Articulaţia sferică

Legătura solidului (C) printr-o articulaţie sferică (raza sferei r) cu solidul (C') fix, îi permite 3 grade de libertate. Prin reacţiunea $\bar{N}$ normală la suprafeţele sferice în punctul de contact al celor două solide (C) şi (C'), legătura se opune forţelor active la desprinderea solidelor. Tot în punctul de contact mai apar şi frecări, dar care nu se aseamănă cu frecarea de alunecare, deoarece deplasarea solidului (C) faţă de (C') este complexă, părînd a fi compusă din rostogolire şi alunecare. De aceea forţa de frecare T din O (fig. 5.A.6) nu poate fi exprimată după legile frecării coulombiene.

Datorită frecărilor în articulaţie apare şi un cuplu de frecare care se opune cuplului activ. Momentul cuplului de frecare în articulaţie este reprezentat printr-un vector M' trecînd prin O, dar cu direcţie necunoscută şi al cărui modul este limitat de inecuaţia:

$$|\bar{M}'| \leqslant \mu' r |\bar{R}'| \tag{5.5}$$

unde: μ' este un coeficient de frecare în articulaţie determinat experimental, r este raza sferei şi $\bar{R}'$ *reacţiunea totală din articulaţie*.

În concluzie, într-o articulaţie sferică, forţele de legătură pot fi reprezentate prin $\bar{R}'$ şi $\bar{M}'$ (fig. 5.A.7), $\bar{R}' = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k}$, unde X', Y',

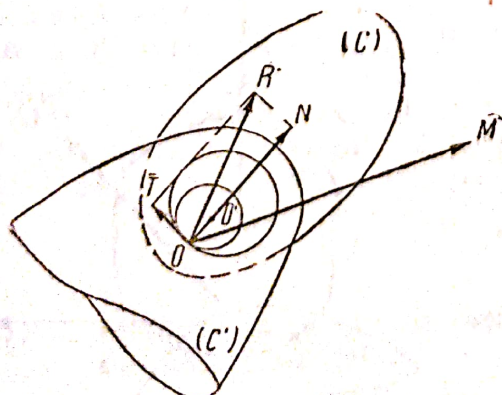


Fig. 5.A.6

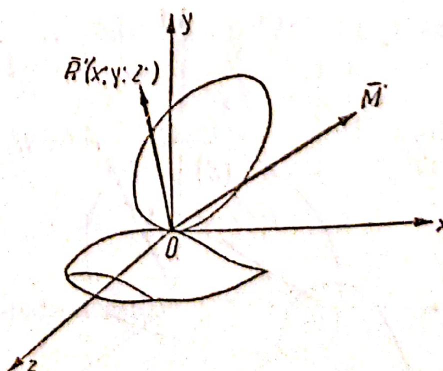


Fig. 5.A.7

[1] numai dacă punctul nu este singular.

Z' sînt necunoscutele scalare ale proiecţiilor reacţiunii totale pe cele trei axe ale reperului $Oxyz$, iar $\overline{M}'$ are direcţia şi sensul necunoscute, modulul limitat de inecuaţia (5.5).

Articulaţia cilindrică

Această legătură lasă solidului (C) un singur grad de libertate faţă de (C'). Dacă *se neglijează frecarea*, această legătură corespunde cu modelul teoretic a două articulaţii sferice în două puncte fixe O_1 şi O_2 (fig. 5.A.8). Cu această modelare legătura poate fi înlocuită prin reacţiunile $\overline{R}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ şi $\overline{R}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ din cele două articulaţii sferice. Sînt în total şase necunoscute scalare ale acestor forţe, pentru determinarea cărora se pot scrie cele şase condiţii de echilibru al sistemului de forţe date şi de legătură. Cu toate acestea sistemul de legături rămîne *simplu static nedeterminat* deoarece în ecuaţia de momente faţă de axa Oz, care trece prin cele două articulaţii, nu pot apare nici una din necunoscutele scalare ale reacţiunilor $\overline{R}_1$ şi $\overline{R}_2$. Această ecuaţie este o condiţie pentru parametrul θ al poziţiei în care trebuie aşezat solidul (C) pentru a rămîne în repaus faţă de (C').

Observaţii

Dacă se asimilează articulaţia cilindrică cu o articulaţie sferică fără frecare O_1 şi un reazem simplu O_2 în care reacţiunea fiind normală pe O_1z, $\overline{R}_2$ are numai două necunoscute X_2 şi Y_2, în aceste condiţii sistemul devine *static determinat*, ultima ecuaţie de momente în raport cu O_1z servind, la fel, pentru determinarea parametrului θ.

Mai mult, reazemul O_2 poate fi considerat ca un fus, lagăr etc. şi se poate adăuga şi cuplul de frecare corespunzător al cărui moment este limitat de:

$$|\overline{M}_2'| \leqslant \mu' r |\overline{R}_2|.$$

Articulaţia în plan

Aceasta este asemănătoare articulaţiei cilindrice în spaţiu în forma prezentată la observaţii. Legătura îi mai lasă plăcii (P) un singur grad de libertate faţă de (P'). Legătura poate fi înlocuită prin reacţiunea $\overline{R}'(X', Y')$ din O, necunoscute fiind X', Y' (fig. 5.A.9). Cea de-a treia necunoscută este θ, parametrul scalar al poziţiei de repaus a plăcii (P) faţă de (P'). Dacă articulaţia este cu frecare (frecare în fusul O), momentul $\overline{M}'$ necunoscut

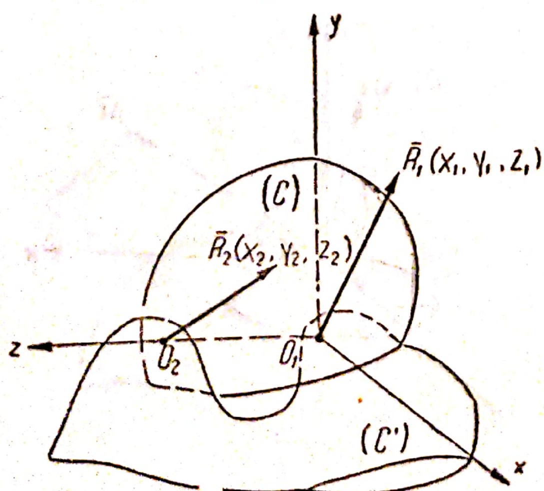


Fig. 5.A.8

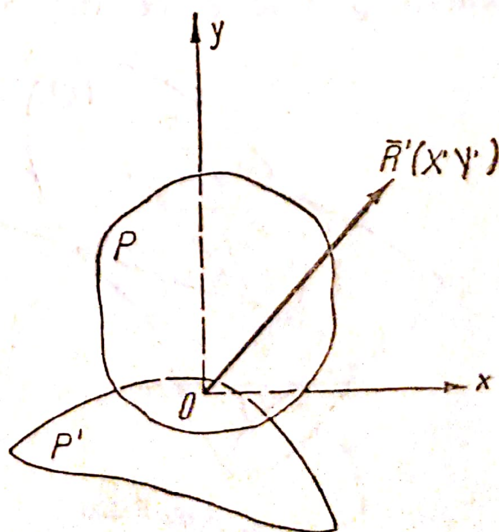


Fig. 5.A.9

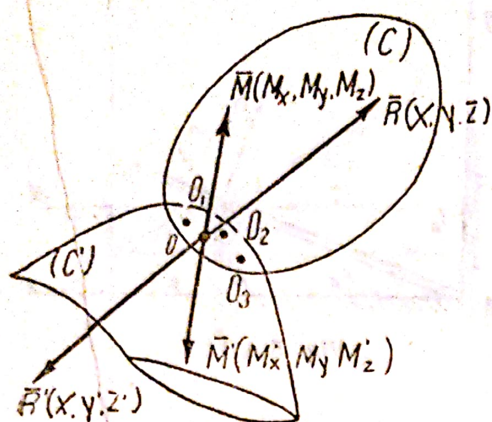


Fig. 5.A.10

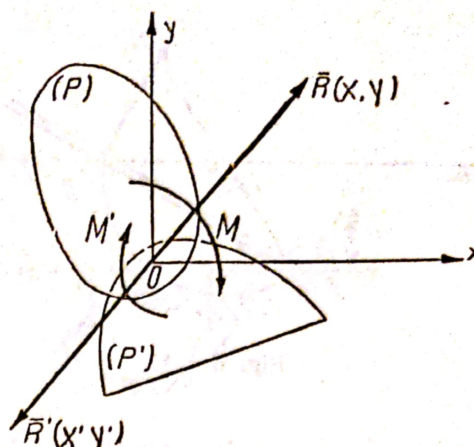


Fig. 5.A.11

al cuplului de frecare are direcţia perpendiculară pe planul plăcilor, sensul necunoscut, iar modulul limitat de inecuaţia:

$$|\bar{M}'| \leqslant \mu' r |\bar{R}'|,$$

unde μ' este coeficientul de frecare a fusului, r raza fusului şi $\bar{R}'$ — reacţiunea totală din fus.

Încastrarea este legătura care suprimă solidului (C) toate gradele de libertate faţă de solidul (C'). În acest scop solidele trebuie să aibă cel puţin trei puncte comune O_1, O_2 şi O_3 nesituate pe o linie dreaptă (fig. 5.A.10). În realitate legătura se face pe o mulţime de puncte situate pe o suprafaţă complexă comună. Din această cauză forţele de legătură nu pot fi determinate static. De aceea, în mecanică, o încastrare este considerată, în ansamblu, ca legătura care prin forţele ei de legătură echilibrează torsorul forţelor date $\bar{R}$, $\bar{M}$, obţinut în orice punct O al încastrării (fig. 5.A.10). Cu alte cuvinte, încastrarea poate fi înlocuită în O printr-un torsor $\bar{R}'$, $\bar{M}'$ necunoscut dar care poate fi determinat prin ecuaţiile vectoriale:

$$\bar{R}' + \bar{R} = 0; \qquad \bar{M}' + \bar{M} = 0,$$

respectiv prin ecuaţiile scalare:

$$X' + X = 0; \qquad Y' + Y = 0; \qquad Z' + Z = 0;$$
$$M_x' + M_x = 0; \qquad M_y' + M_y = 0; \qquad M_z' + M_z = 0.$$

Observaţie.

În cazul unei plăci plane (P) încastrată în placa fixă (P') în planul ei (fig. 5.A.11), legătura se înlocuieşte printr-o forţă $\bar{R}'(X', Y')$ necunoscută dar cu suportul trecînd prin punctul O reprezentînd încastrarea şi printr-un cuplu de moment $\bar{M}$ perpendicular pe planul fix, avînd modulul şi sensul necunoscute care pot fi determinate prin ecuaţiile scalare:

$$X' + X = 0; \qquad Y' + Y = 0; \qquad M' + M = 0.$$

5.A.7. Indicaţii cu privire la rezolvarea problemelor de statica solidului

Sînt corespunzătoare celor date la statica punctului material cu legături şi constau din: analiza aspectului fizic al problemei, notarea datelor (forţe date, poziţii de repaus dacă sînt cunoscute, coeficienţi de frecare

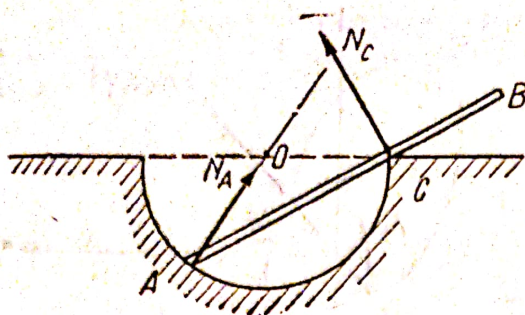


Fig. 5.A.12

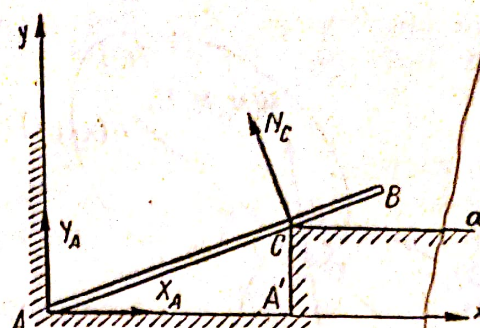


Fig. 5.A.13

etc.), înlocuirea legăturilor prin forţe de legătură scoţîndu-se în evidenţă caracteristicile cunoscute şi cele necunoscute ale acestor forţe, adică să se ajungă la eliberarea solidului de legături, alegerea celui mai convenabil sistem de referinţă, scrierea condiţiilor scalare de echilibru pentru sistemul de forţe date şi de legătură (inclusiv forţele datorită frecărilor), completarea ecuaţiilor privind forţele de frecare şi momentele cuplurilor de frecare, rezolvarea sistemului de ecuaţii şi inecuaţii şi interpretarea fizică sau chiar tehnică a rezultatului obţinut.

O atenţie deosebită trebuie dată cazurilor în care contactele fiind considerate punctuale, punctele de legătură sînt singulare pentru unul sau chiar pentru ambele solide.

În asemenea cazuri se poate greşi cu uşurinţă atît la reprezentarea forţelor de legătură cît şi la calculul lor.

Astfel, în cazul unei bare drepte AB rezemată în A şi C pe un contur format dintr-un semicerc continuat cu o dreaptă (fig. 5.A.12), punctul A este singular pentru bară dar ordinar pentru cerc, iar punctul C este singular pentru conturul cerc-dreaptă şi ordinar pentru bară.

În asemenea situaţii, în baza principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii, direcţia reacţiunii normale este normală la curba care în punctul de contact nu prezintă singularitate.

Însă, dacă punctul de contact este singular pentru ambele solide, cum este cazul barei AB care are în A un contact obligat cu colţul unghiului drept al conturului $AA'Cd$ (fig. 5.A.13), în asemenea cazuri nu se cunoaşte în prealabil direcţia forţei de legătură normală. Lucrurile se petrec ca şi cum în A ar fi un punct de articulaţie pentru bară, iar forţa de legătură are două componente X_A, Y_A necunoscute dacă sistemul este plan şi trei componente necunoscute dacă sistemul este în spaţiu.

5.B. APLICAŢII LA STATICA SOLIDULUI RIGID, LIBER ŞI CU LEGĂTURI

5.B.1. Bara AB omogenă, de greutate G şi lungime $2l$ este rezemată în A de un perete vertical, iar în C de muchia unui alt perete, situat la distanţa a de primul (fig. 5.B.1). Contactul are loc fără frecare.

Să se determine unghiul θ de înclinaţie al barei faţă de orizontală în poziţia de repaus, precum şi reacţiunile din reazemele A şi C.

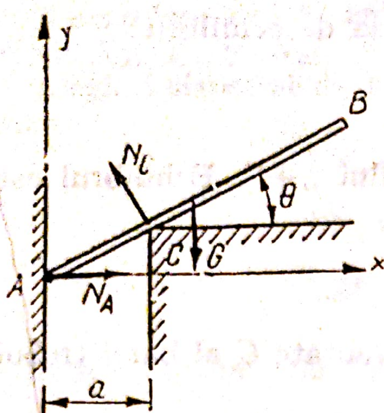


Fig. 5.B.1

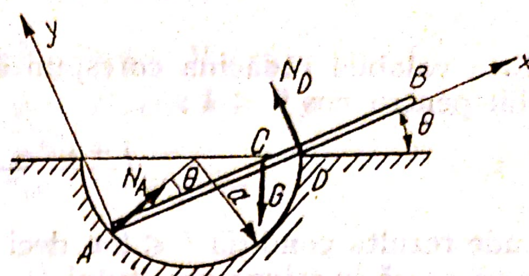


Fig. 5.B.2

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături prin introducerea reacțiunilor în reazemele A și C, fiecare reacțiune avînd ca direcție normala la suprafața care nu prezintă punct singular în punctul de contact.

Pentru obținerea unor ecuații de proiecții cît mai simple, se alege sistemul de referință xOy astfel încît să se proiecteze cît mai multe forțe în adevărata mărime.

Ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_A - N_C \sin\theta = 0,$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_C \cos\theta - G = 0,$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -Gl\cos\theta + N_C \frac{a}{\cos\theta} = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține pentru poziția de echilibru:

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{l}} \leqslant 1, \text{ deci } a \leqslant l.$$

Reacțiunile vor fi:

$$N_A = G\sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\,; \quad N_C = G\sqrt[3]{\frac{l}{a}}.$$

5.B.2. O bară AB omogenă de greutate G și lungime $2l$ este așezată în interiorul unei semisfere de rază a (fig. 5.B.2).

Să se determine unghiul θ de înclinație al barei față de orizontală în poziția de repaus, precum și reacțiunile din reazemele A și D.

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături, prin introducerea reacțiunilor în reazemele A și D. Alegînd sistemul de referință xAy, ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_A \cos\theta - G\sin\theta = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_A \sin\theta - G\cos\theta + N_D = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad N_D 2a\cos\theta - Gl\cos\theta = 0.$$

Rezolvînd acest sistem, se obține pentru poziția de echilibru:

$$\cos\theta = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32a^2}}{8a}.$$

Este valabilă rădăcina corespunzătoare semnului „+". Echilibrul este posibil pentru $\cos\theta \leqslant 1$:

$$\frac{l + \sqrt{l^2 + 32a^2}}{8a} \leqslant 1,$$

de unde rezultă condiția $l \leqslant 2a$, deci centrul de greutate C al barei trebuie să se găsească în stînga punctului D.

Reacțiunile vor fi:

$$N_A = G \operatorname{tg}\theta; \quad N_D = \frac{Gl}{2a}.$$

5.B.3. O bară AB omogenă de greutate G și lungime l se reazemă cu capetele pe două plane înclinate cu unghiurile α, respectiv β față de orizontală (fig. 5.B.3.). Contactul are loc fără frecare.

Să se determine unghiul φ de înclinație al barei față de planul AC, în poziția de repaus, de asemenea reacțiunile.

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături introducînd reacțiunile corespunzătoare în reazemele A și B, apoi se scriu ecuațiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referință ales în figură.

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_A \sin\alpha - N_B \sin\beta = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_A \cos\alpha - G + N_B \cos\beta = 0;$$
$$\Sigma M_B = 0; \quad -N_A l \cos\varphi + G\frac{l}{2}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă:

$$N_A = \frac{G \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad N_B = \frac{G \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \sin\beta}{\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)} - \operatorname{ctg}\alpha.$$

5.B.4. Bara AB omogenă, de greutate G și lungime $2l$ este rezemată într-un locaș de secțiune dreptunghiulară (fig. 5.B.4).

Cunoscînd distanța a și unghiul α, să se determine reacțiunile din reazemele A și C.

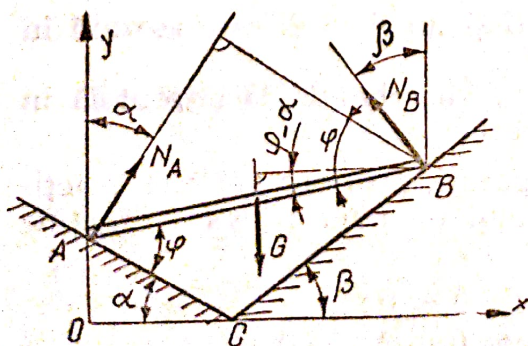


Fig. 5.B.3

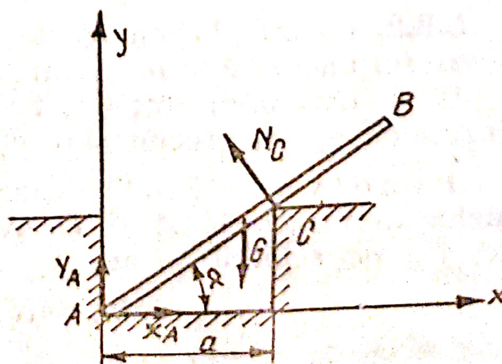


Fig. 5.B.4

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături, prin introducerea reacţiunilor X_A, Y_A şi N_C.

Alegînd sistemul de referinţă ca în figură, ecuaţiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0;\quad X_A - N_C \sin\alpha = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0;\quad Y_A - G + N_C \cos\alpha = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0;\quad N_C \frac{a}{\cos\alpha} - Gl\cos\alpha = 0,$$

de unde se obţin valorile reacţiunilor:

$$X_A = G\frac{l}{a}\sin\alpha\cos^2\alpha;\quad Y_A = G\left(1 - \frac{l}{a}\cos^3\alpha\right).$$

Deci:

$$R_A = G\sqrt{1 + \frac{l}{a}\cos^3\alpha\left(\frac{l}{a}\cos\alpha - 2\right)}.$$

Iar:

$$N_C = G\frac{l}{a}\cos^2\alpha.$$

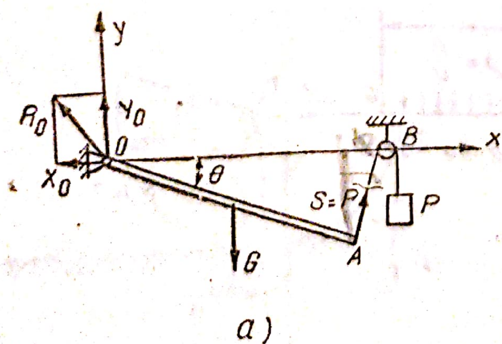
5.B.5. O bară OA omogenă, de greutate G şi lungime $2l$ este articulată în punctul fix O, iar extremitatea A a barei este prinsă cu un fir, petrecut peste scripetele B, aflat pe orizontala punctului O la distanţa $OB = l$. De capătul firului este suspendată greutatea P cunoscută (fig. 5.B.5, *a*). Să se determine unghiul θ pe care îl face bara cu orizontala în poziţia de repaus, de asemenea forţele de legătură.

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături, introducînd cele două componente necunoscute X_0 şi Y_0 ale forţei de legătură $\bar{R}_0$ din articulaţia O şi forţa de tensiune din fir $|\bar{S}| = |\bar{P}|$. În sistemul de referinţă ales, ecuaţiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0;\quad -X_0 + S\sin\frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0;\quad Y_0 - G + S\cos\frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_0 = 0;\quad -Gl\cos\theta + S\,2l\cos\frac{\theta}{2} = 0.$$



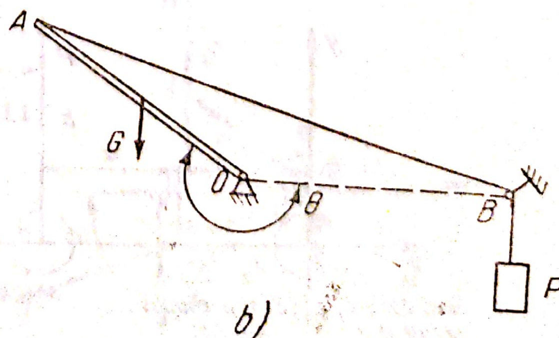


Fig. 5.B.5

Înlocuind $S = P$ în ecuaţia de momente, se obţine pentru poziţia de echilibru:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 + 2G^2}}{2G}.$$

Analizînd rezultatul se constată că ambele soluţii corespund. Soluţia cu semnul (+) corespunde numai dacă $P < \frac{G}{2}$. Soluţia cu semnul (−) corespunde cazului reprezentat în figura 5.B.5.*b*.

Înlocuind unghiul θ în celelalte ecuaţii de echilibru se obţin X_0, Y_0, respectiv $\bar{R}_0$.

5.B.6. Grinda *ABC*, de greutate neglijabilă, avînd forma şi dimensiunile indicate în figura 5.B.6, este rezemată în punctul *D* şi articulată în punctul *E*. Asupra grinzii acţionează forţele verticale *P* respectiv 2*P* şi o forţă orizontală 3*P*, reprezentate în figură. Să se determine reacţiunile din reazemul *D* şi articulaţia *E*.

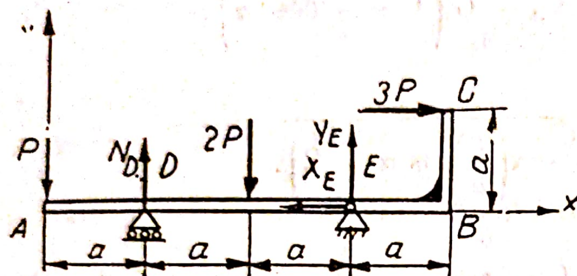


Fig. 5.B.6

Rezolvare. Se înlocuiesc legăturile cu reacţiunile corespunzătoare şi se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -X_E + 3P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad -P + N_D - 2P + Y_E = 0;$$

$$\Sigma M_E = 0; \quad P3a - N_D \cdot 2a + 2P \cdot a - 3P \cdot a = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, se obţine:

$$N_D = P; \qquad X_E = 3P; \qquad Y_E = 2P,$$

respectiv

$$R_E = P\sqrt{13}.$$

5.B.7. O grindă cotită OABC, de greutate neglijabilă, este încastrată la extremitatea *O*. Forma, dimensiunile şi încărcarea grinzii sînt date în figura 5.B.7. Să se determine torsorul forţelor de legătură din încastrarea *O*.

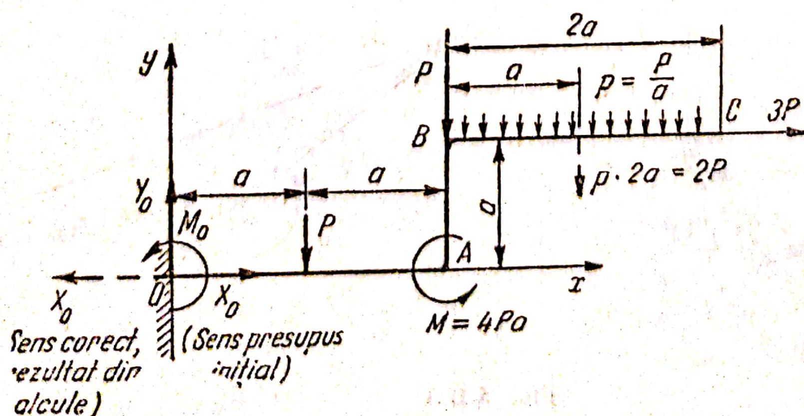


Fig. 5.B.7

Rezolvare. Se alege sistemul de referință xOy (fig. 5.B.7). Se eliberează grinda de legături, înlocuind încastrarea O cu torsorul forțelor de legătură format din reacțiunea $\overline{R}_o$ de componente X_o, Y_o și cuplul de moment M_o. Sarcina $p = \frac{P}{a}$ uniform distribuită pe porțiunea $BC = 2a$, se înlocuiește cu rezultanta $p \cdot 2a = 2P$ aplicată în centrul de greutate, deci la jumătatea intervalului BC. Se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0;\quad X_o + 3P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0;\quad Y_o - P - P - 2P = 0;$$

$$\Sigma M_o = 0;\quad M_o - Pa + 4Pa - P2a - 2P3a - 3Pa = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă:

$X_o = -3P$ (semnul minus arată că sensul componentei X_o este invers celui inițial ales în figură, sensul corect fiind reprezentat cu linie întreruptă);

$$Y_o = 4P, \text{ respectiv } |\overline{R}_o| = 5P;\ M_o = 8Pa.$$

5.B.8. O emisferă omogenă de greutate G și rază R este așezată cu partea convexă pe un plan orizontal. În punctul B al emisferei este agățată greutatea Q. Să se determine unghiul φ format în poziția de repaus de axa de simetrie a emisferei cu verticala (fig. 5.B.8).

Rezolvare. Se înlocuiește reazemul A cu forța de legătură normală N. Dintre ecuațiile scalare de echilibru se utilizează numai suma de momente, în care apare ca necunoscută doar unghiul φ cerut.

$$\Sigma M_A = 0;\ GOC \sin\varphi - QR\cos\varphi = 0;$$

unde $OC = \frac{3}{8}R$(v. cap. „Centre de greutate").

Rezultă: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{8Q}{3G}$.

5.B.9. Bara cotită ABC, omogenă, de greutate P, cu laturile $AB = l$ și $BC = 2l$ formînd un unghi $\varphi = 60°$, este suspendată de capătul A printr-un fir fixat în punctul D (fig. 5.B.9). Să se determine unghiul α al laturii BC cu orizontala, pentru poziția de repaus.

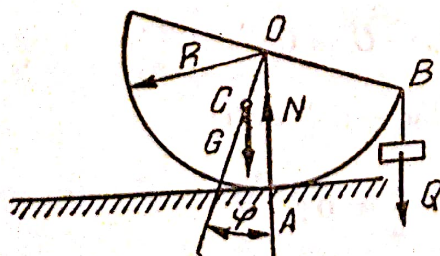


Fig. 5.B.8

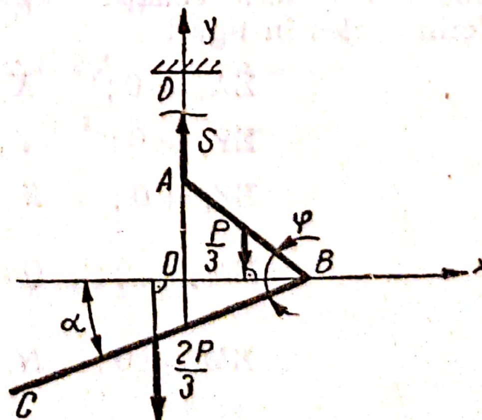


Fig. 5.B.9

R e z o l v a r e. Se izolează bara, introducînd tensiunea S în fir și se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma Y_i = 0;\ S - \frac{P}{3} - \frac{2P}{3} = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \frac{2P}{3}\,[l\cos\alpha - l\cos(\varphi - \alpha)] - \frac{P}{3}\,\frac{l}{2}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

Rezultă: $S = P$ și $tg\,\alpha = \dfrac{4 - 5\cos\varphi}{5\sin\varphi}$.

Pentru

$$\varphi = 60°;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

respectiv

$$\alpha \approx 19°7'.$$

5.B.10. Un cub omogen de greutate G și latură a, cu fața $ABCD$ conținută într-un plan orizontal, este articulat în A și simplu rezemat în B și D, iar în punctul I este prins cu un fir orizontal în prelungirea muchiei EI, fixat în J (fig. 3.B.10). Asupra cubului acționează forțele P și Q, de-a lungul muchiilor HI, respectiv IE. Să se determine reacțiunile din A, B și D, precum și tensiunea în firul IJ.

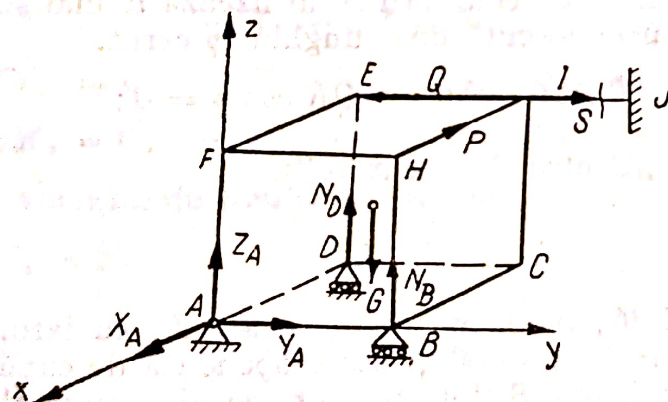


Fig. 5.B.10

R e z o l v a r e. Se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură corespunzătoare și se scriu ecuațiile scalare de echilibru, în raport cu sistemul de referință ales în figură.

$$\Sigma X_i = 0; \qquad X_A - P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \qquad Y_A - Q + S = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; \qquad Z_A + N_D + N_B - G = 0;$$

$$\Sigma M_x = 0; \qquad Qa + N_B a - Sa - G\frac{a}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_y = 0; \qquad N_D a - Pa - G\frac{a}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_z = 0; \qquad Qa + Pa - Sa = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se obţine:

$$X_A = P; \quad Y_A = -P; \quad Z_A = -2P.$$

Semnul minus arată că sensul componentelor Y_A şi Z_A este invers celui iniţial ales în figură.

$$R_A = P\sqrt{6}; \quad N_D = N_B = \frac{2P+G}{2}; \quad S = P + Q.$$

5.B.11. O grindă cotită $OABC$, de greutate neglijabilă, este încastrată la extremitatea O. Forma, dimensiunile şi încărcarea grinzii sînt date în figura 5.B.11. Să se determine torsorul forţelor de legătură din încastrarea O.

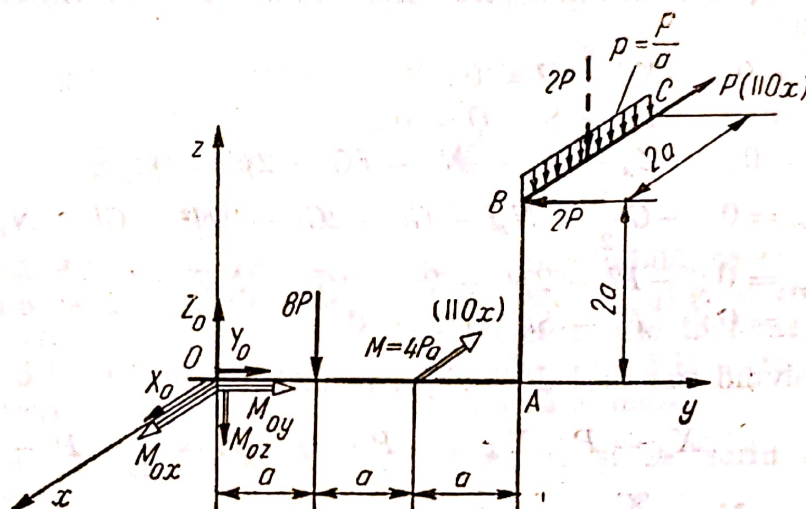


Fig. 5.B.11

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă $Oxyz$ (fig. 5.B.11). Se înlocuieşte încastrarea O cu torsorul forţelor de legătură format din reacţiunea $\bar{R}_o$ de componente X_o, Y_o, Z_o şi cuplul de moment $\bar{M}_o$, de componente M_{ox}, M_{oy} şi M_{oz}. Se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_o - P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_o - 2P = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_o - 8P - 2P = 0;$$

$$\Sigma M_{xi} = 0; \quad M_{ox} - 8Pa - 4Pa + 4Pa - 6Pa = 0;$$

$$\Sigma M_{yi} = 0; \quad M_{oy} - 2Pa - 2Pa = 0;$$

$$\Sigma M_{zi} = 0; \quad 3Pa - M_{oz} = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, rezultă:

$$X_o = P; \quad Y_o = 2P; \quad Z_o = 10P,$$

respectiv, $|\bar{R}_o| = \sqrt{105}\,P = 10{,}25P$;

$$M_{ox} = 14Pa; \quad M_{oy} = 4Pa; \quad M_{oz} = 3Pa,$$

respectiv, $|\bar{M}_o| = \sqrt{221}\,Pa = 14{,}87Pa$.

5.B.12. Cadrul $ABDC_3EF$ este compus din tronsoanele (1), (2) şi (4) de lungime l şi greutate G fiecare, respectiv tronsonul (3) de lungime l şi greutate $2G$, tronsoanele fiind dispuse ca în figura 5.B.12. Cadrul are o articulaţie sferică în A, două reazeme în B şi F şi o legătură prin firul C_3H. Asupra cadrului acţionează forţele concentrate P şi Q, precum şi sarcina p uniform distribuită pe porţiunea $DE = 2l$. Să se determine reacţiunile din articulaţia sferică A, reazemele B şi F şi tensiunea din firul C_3H.

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă $Axyz$ (fig. 5.B.12). Se eliberează cadrul de legături, înlocuind articulaţia A cu reacţiunea $\bar{R}_A$ de componente X_A, Y_A şi Z_A, reazemele B şi F cu reacţiunile N_B, respectiv N_F, iar firul C_3H cu tensiunea S din fir. Sarcina p uniform distribuită pe intervalul $DE = 2l$ se înlocuieşte cu rezultanta $2pl$ aplicată în centrul de greutate C_3, deci la jumătatea intervalului DE. Se scriu ecuaţiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_A - P = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A + S - Q = 0;$$
$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_A + N_B + N_F - 5G - 2pl = 0;$$
$$\Sigma M_{xi} = 0; \quad -G\frac{l}{2} + N_B l - Gl - 2Gl - 2pl^2 - Gl + N_F l - Sl + Ql = 0;$$
$$\Sigma M_{yi} = 0; \quad -Pl - 2pl^2 - 2Gl - Gl + N_F l = 0;$$
$$\Sigma M_{zi} = 0; \quad Pl - Sl + Q2l = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, rezultă:

$$X_A = P; \; Y_A = -P - Q; \; Z_A = \frac{G}{2} - P - Q;$$
$$N_B = \frac{3G}{2} + Q; \; N_F = 3G + P + 2pl; \; S = P + 2Q.$$

5.B.13. O bară AB omogenă, de greutate G şi lungime l, este prinsă de capătul A cu un fir de lungime $OA = l$, fixat în O, iar capătul B se reazemă cu frecare pe un perete vertical (fig. 5.B.13). Cunoscînd valoarea coeficientului de frecare μ, să se determine unghiul θ, pe care îl face bara cu verticala, în poziţia de echilibru, de asemenea valorile reacţiunilor.

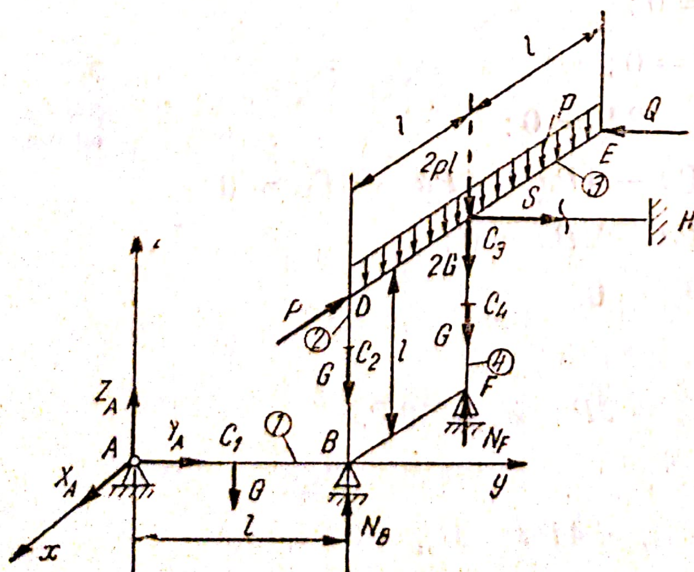


Fig. 5.B.12

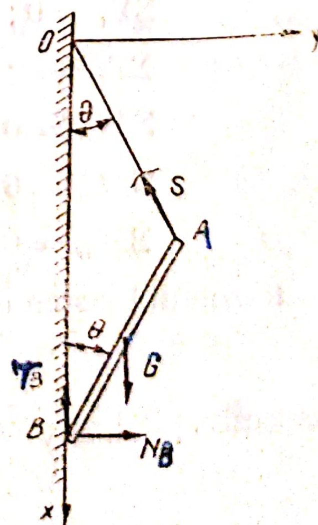


Fig. 5.B.13

R e z o l v a r e. Se eliberează bara de legături, introducînd reacțiunea normală la perete N_B, forța de frecare T_B, opusă tendinței de mișcare, și tensiunea în fir S.

Se scriu ecuațiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referință ales în figură:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -T_B + G - S\cos\theta = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_B - S\sin\theta = 0;$$

$$\Sigma M_o = 0; \quad N_B 2l\cos\theta - G\frac{l}{2}\sin\theta = 0.$$

Se adaugă inecuația: $T_B \leqslant \mu N_B$.

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$\operatorname{tg}\theta \geqslant \frac{3}{\mu}; \quad \text{respectiv} \quad \theta \geqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{\mu};$$

$$N_B \geqslant \frac{3}{4\mu}G; \quad S \geqslant \frac{G}{4\mu}\sqrt{9+\mu^2}.$$

5.B.14. O scară AB, de lungime l și greutate neglijabilă, se reazemă cu frecare în A pe un plan orizontal (coeficient de frecare μ_1) și în B pe un perete vertical (coeficient de frecare μ_2), față de care este înclinată cu un unghi θ dat (fig. 5.B.14). Să se determine distanța x pînă la care se poate urca un om de greutate G pe scară, fără ca scara să alunece.

R e z o l v a r e. Se eliberează solidul de legături și se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_B - T_A = 0;$$

$\Sigma Y_i = 0;$ [illegible] $= 0;$

$$\Sigma M_o = 0; \quad N_A l\sin\theta - G(l-x)\sin\theta - N_B l\cos\theta = 0.$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T_A \leqslant \mu_1 N_A; \quad T_B \leqslant \mu_2 N_B.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$x \leqslant \frac{\mu_1(\mu_2 + \operatorname{ctg}\theta)\,l}{1+\mu_1\mu_2}.$$

Problema se pretează la o rezolvare grafică cu ajutorul unghiurilor de frecare φ_1 și φ_2:

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\mu_1; \quad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\mu_2.$$

Se construiesc dreptele Aab, Aa_1b_1 și Ba_1a, Bb_1b care limitează direcțiile reacțiunilor totale din A și B:

$$\bar{R}_A = \bar{N}_A + \bar{T}_A; \quad \bar{R}_B = \bar{N}_B + \bar{T}_B.$$

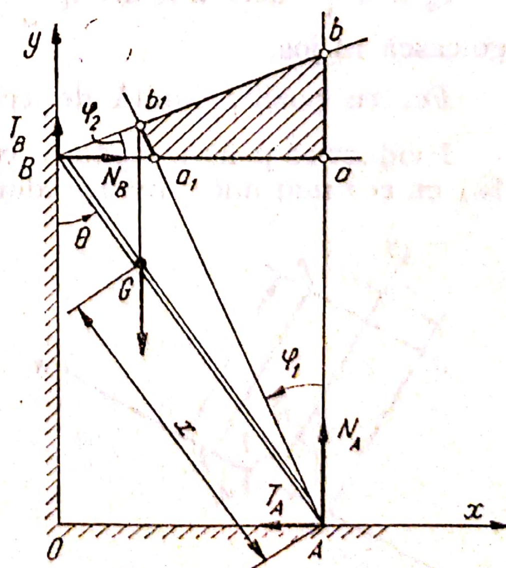


Fig. 5.B.14

Pentru echilibrare trebuie ca: $\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{G} = 0$, adică forțele coplanare $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ și $\bar{G}$ să fie concurente.

Deoarece intersecția suporturilor reacțiunilor totale se găsește în patrulaterul aa_1bb_1 sau pe laturile lui, pentru echilibru trebuie ca și suportul forței G să treacă prin această intersecție. În consecință, conform figurii 5.B.14, poziția limită a omului este determinată de verticala vîrfului b_1. Patrulaterul aa_1bb_1 se numește patrulaterul frecărilor.

5.B.15. Un paralelipiped omogen $ABCD$, de greutate G, avînd laturile a și b, se reazemă cu fața AB pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, coeficientul de frecare între fața AB și plan fiind μ (fig. 5.B.15). Știind că unghiul α crește, să se determine valoarea sa pentru poziția limită de echilibru.

Rezolvare. Se eliberează paralelipipedul de legătura cu planul înclinat, introducînd reacțiunile N și T, de asemenea cuplul M_r care se opune tendinței de rostogolire.

Se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad T - G\sin\alpha = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad N - G\cos\alpha = 0;$$
$$\Sigma M_0 = 0; \quad G\frac{b}{2}\sin\alpha - M_r = 0.$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T \leqslant \mu N, \quad M_r \leqslant sN.$$

Se observă că în poziția limită de echilibru $s = \frac{a}{2}$, adică paralelipipedul se reazemă doar cu muchia A pe planul înclinat, reacțiunea N avînd punctul de aplicație în A.

Rezolvînd sistemul rezultă condițiile pentru unghiul α:

$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu$, deci $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg}\mu$ pentru ca paralelipipedul să nu alunece în jos.

Pentru poziția limită de echilibru: $\alpha_{max} = \operatorname{arc\,tg}\mu$.

$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{a}{b}$ deci $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ pentru ca paralelipipedul să nu se rostogolească în jos.

Pentru poziția limită de echilibru: $\alpha_{max} = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$.

Evident că pentru repaus α trebuie să fie mai mic, cel mult egal (la limită) cu cea mai mică din cele două valori.

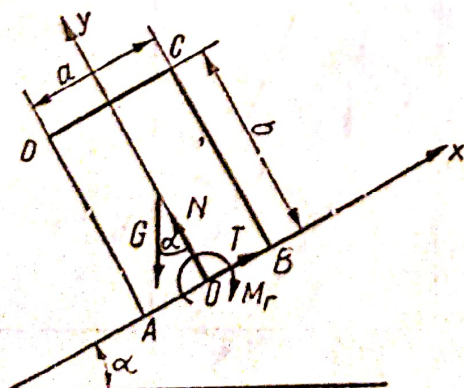


Fig. 5.B.15

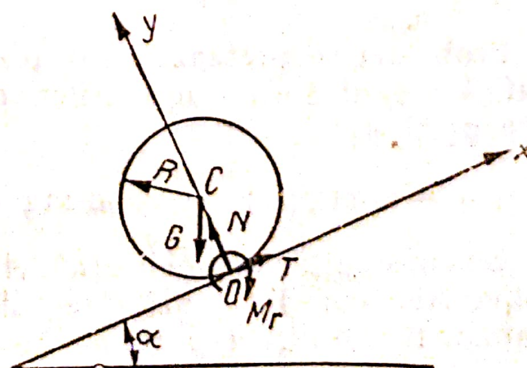


Fig. 5.B.16

Dacă $\frac{a}{b} < \mu$ iar unghiul α crește, pierderea echilibrului se va face prin rostogolire; dacă $\frac{a}{b} > \mu$, pierderea echilibrului se face prin alunecare.

5.B.16. O roată de rază R și greutate G se reazemă pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 5.B.16), Cunoscînd coeficienții de frecare la alunecare μ și rostogolire s, dintre roată și plan, să se determine unghiul α pentru care roata rămîne în repaus.

Rezolvare. Se izolează roata, introducînd reacțiunea normală N, forța de frecare T opusă tendinței de alunecare și cuplul M_r opus tendinței de rostogolire.

Condițiile de echilibru exprimate scalar în raport cu sistemul de referință xOy, sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \qquad T - G \sin \alpha = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \qquad N - G \cos \alpha = 0;$$
$$\Sigma M_o = 0; \qquad GR \sin \alpha - M_r = 0.$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T \leqslant \mu N; \quad M_r \leqslant sN.$$

Rezolvînd sistemul se obțin următoarele condiții pentru unghiul α: $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \mu$, respectiv $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg} \mu$ pentru ca roata să nu alunece în jos; deci: $\alpha_{max} = \operatorname{arc\,tg} \mu$,

și $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \frac{s}{R}$ respectiv $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{R}$ pentru ca roata să nu se rostogolească în jos; deci: $\alpha_{max} = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{R}$.

Evident că pentru echilibru trebuie ca unghiul α să fie mai mic, cel mult egal cu cea mai mică din cele două valori.

Capitolul 6

STATICA SISTEMELOR DE SOLIDE

6.A. PREZENTARE TEORETICĂ

5.A.1. Generalități

Prin sistem de solide se înțelege o mulțime finită de solide care se interacționează. În statică se studiază cazul special al solidelor legate între ele avînd și legături exterioare. Legăturile pot fi astfel încît sistemul de solide să fie deformabil sau să fie *nedeformabil*, adică sistemul întreg, în care nu joacă rol micile deformații ale fiecărui solid în parte, să poată fi considerat un rigid. Cele mai des întîlnite sisteme de solide din viața practică și din tehnică sînt constituite din bare drepte legate între ele. *Mecanismele* sînt sisteme de bare legate între ele prin articulații sau reazeme și care au unul sau mai multe (în număr finit) grade de libertate. Fermele, stîlpii, grinzile se pot realiza și prin sistem de bare legate între ele prin articulații, astfel încît sistemul să nu mai aibă nici un grad de libertate. În general, asemenea sisteme de bare se numesc *grinzi cu zăbrele*. Ele sînt folosite pe o scară largă în tehnica construcțiilor.

Cu toate că teoretic sistemul este considerat nedeformabil, totuși, în practica, sarcinile și variațiile de temperatură produc barelor metalice și sistemului întreg mici deformații și deplasări. Pentru evitarea efectelor dăunătoare ale deformațiilor și deplasărilor, unele din legăturile exterioare ale sistemului sînt reazeme așezate pe role care permit sistemului mici deplasări dar care nu-i aduc sistemului nici un grad de libertate.

Problemele staticii sistemelor de solide. Problema directă: dîndu-se un sistem nedeformabil de solide, cu legături exterioare și interioare, în repaus, acționat de forțe exterioare, să se determine forțele de legătură exterioare și interioare sistemului.

Problema inversă sau mixtă. Dîndu-se un mecanism (sistem deformabil de solide) cu legături exterioare și interioare, acționat de forțe exterioare, să se determine pozițiile în care trebuie așezat mecanismul pentru ca el să rămînă în repaus, precum și forțele de legătură exterioare și interioare pentru aceste poziții.

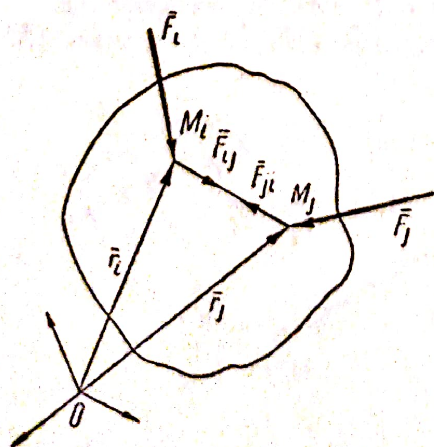


Fig. 6.A.1

6.A.2. Condițiile repausului

Un model satisfăcător pentru un sistem de solide în repaus este un sistem de puncte materiale (fig. 6.A.1) în repaus.

Notații. O, originea sistemului de referință fix; M_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, unul din cele n (finit) puncte materiale; $\bar F_i$, rezultanta forțelor exterioare date și de legătură aplicate punctului M_i; $\bar F_{ij}$, forță interioară, reprezen-

tînd acţiunea punctului material M_j asupra lui M_i iar $\bar{F}_{ji}$, reacţiunea lui M_i asupra lui M_j; $\bar{r}_i$, $\bar{r}_j$ vectori de poziţie. Forţele interioare ascultă de principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii, de pildă pentru forţele interioare dintre M_i şi M_j:

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \text{ şi } \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (6.1)$$

Definiţie. Un sistem de puncte materiale (sistem material deformabil) în repaus în raport cu un reper fix, rămîne în această stare dacă fiecare din punctele sistemului rămîne în repaus faţă de acelaşi reper şi reciproc.

Condiţiile necesare de echilibru pentru forţele exterioare sînt:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0 \qquad (6.2)$$

Însă, aceste condiţii *nu sînt şi suficiente* pentru ca *sistemul deformabil* să rămînă în repaus.

Numai dacă sistemul ar fi nedeformabil aceste condiţii sînt şi suficiente pentru ca sistemul să rămînă în continuare în repaus.

Condiţiile (6.2) se pot scrie, *pe baza definiţiei*, atît pentru întregul sistem, cît şi pentru o parte din sistem ca şi cum fie întregul, fie partea considerată ar fi rigide *(teorema solidificării)*.

În acest fel se elimină din scriere total sau parţial forţele de legătură interioare.

Cele stabilite pentru un sistem de puncte materiale se extind şi asupra unui sistem de solide.

Pentru rezolvarea problemelor de statica solidelor sînt mai multe metode, dintre care vor fi prezentate cele mai des folosite în aplicaţii.

6.A.3. Metoda izolării solidelor

Această metodă comportă următoarele etape principale:

se izolează fiecare solid în parte de celelalte solide ale sistemului, prin introducerea forţelor de legătură interioare;

se eliberează solidul de legăturile sale exterioare, introducîndu-se forţele de legătură corespunzătoare;

se scriu condiţiile ca sistemul de forţe, date şi de legătură exterioare şi interioare, să se echilibreze.

Cînd se trece de la un solid la următorul se ţine seamă de faptul că forţele de legătură dintre ele sînt două cîte două egale şi direct opuse.

În cazul a n solide legate între ele se obţin $2n$ ecuaţii vectoriale, respectiv $6n$ ecuaţii scalare pentru sisteme de solide în spaţiu acţionate de forţe în spaţiu şi $3n$ ecuaţii scalare pentru sisteme de plăci plane, acţionate de forţe în planul lor.

Se mai poate aplica teorema solidificării fie întregului sistem de solide, fie uneia sau alteia din grupele de solide legate între ele. Ecuaţiile obţinute nu conţin, total sau parţial, forţele de legătură, în consecinţă scrierea lor prezintă avantaje pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii. Aceste ecuaţii nu sînt independente de ecuaţiile scrise pentru fiecare solid izolat, ci numai consecinţe ale lor.

O b s e r v a ţ i

Cele $6n$ ecuaţii scalare pentru sisteme în spaţiu, respectiv cele $3n$ ecuaţii scalare pentru sisteme de solide în plan, sînt *necesare* pentru determinarea

necunoscutelor problemei : forțe de legătură exterioare și interioare, poziții de repaus. În cazul în care numărul ecuațiilor este mai mic decît cel al necunoscutelor, sistemul de legături este *static nedeterminat.*

Aplicarea metodei izolării poate fi greoaie pentru sisteme cu multe solide, cazul grinzilor cu zăbrele. În asemenea cazuri și în anumite condiții se pot adopta ipoteze simplificatoare, care, cu toate că duc la rezultate aproximative, sînt pe deplin satisfăcătoare pentru nevoile tehnicii.

6.B. APLICAȚII LA STATICA SISTEMELOR

6.B.1. Un cilindru de greutate $\bar{Q}$ și raza R este așezat la baza unui perete vertical cu care vine în contact în A, punctul de contact cu pămîntul fiind B. Pe cilindru se reazemă o bară de greutate neglijabilă, articulată în C și care are la capătul liber o greutate $\bar{P}$, lungimea barei fiind l, iar punctul de contact cu cilindrul D. Se dă unghiul 2α pe care bara îl face cu peretele și se cer forțele de legătură din A, B, C și D (fig. 6.B.1, *a*).

R e z o l v a r e. Se izolează corpurile sistemului, introducînd asupra fiecăruia forțele corespunzătoare și se scriu condițiile de repaus:

— la cilindru (axele $x_1O_1y_1$) (fig. 6.B.1, *c*):

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \quad N_A - N_D \cos 2\alpha = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad N_B - Q - N_D \sin 2\alpha = 0\,;$$

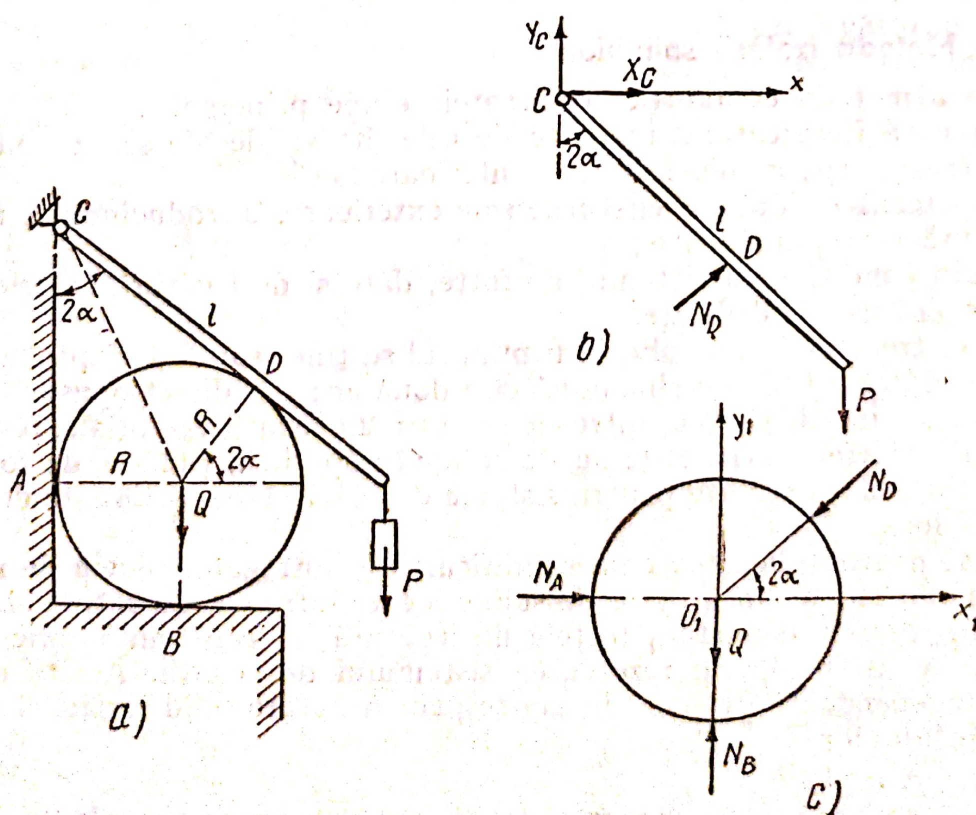


Fig. 6.B.1

— la bara CD (axele xCy) (fig. 6.B.1, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad X_C + N_D \cos 2\alpha = 0;$$
$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad Y_C - P + N_D \sin 2\alpha = 0;$$
$$(\Sigma M_{i_C} = 0); \qquad -Pl \sin 2\alpha + N_D R \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

Sînt 5 ecuații cu 5 necunoscute: N_A, N_B, X_C, Y_C, N_D.
Rezolvînd sistemul se obține:

$$N_D = \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha;$$

$$N_A = -X_C = \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \cos 2\alpha;$$

$$N_B = Q + \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha;$$

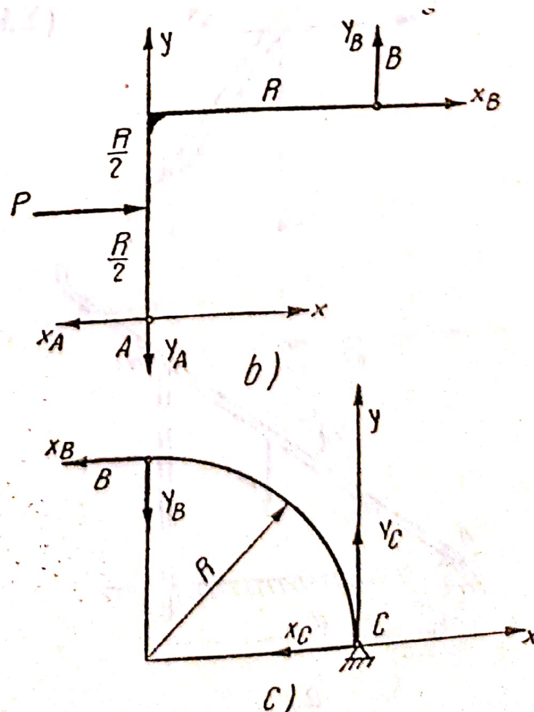
$$Y_C = P - \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

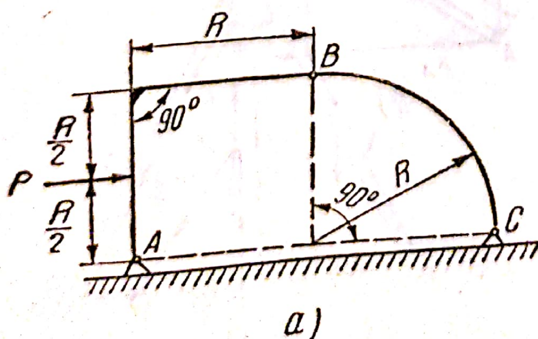
6.B.2. Se dă sistemul de bare din figura 6.B.2, a acționat de forța P. Se cer forțele de legătură din A, B, C.

R e z o l v a r e. Se aplică metoda izolării elementelor sistemului și se pune condiția ca fiecare element să rămînă în repaus. Se introduc forțele de legătură interioare și exterioare. În raport cu sistemele de axe indicate, ecuațiile de echilibru sînt:

— corpul AB (fig. 6.B.2, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad -X_A + P + X_B = 0;$$
$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad -Y_A + Y_B = 0;$$
$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \qquad -P\frac{R}{2} - X_B R + Y_B R = 0.$$





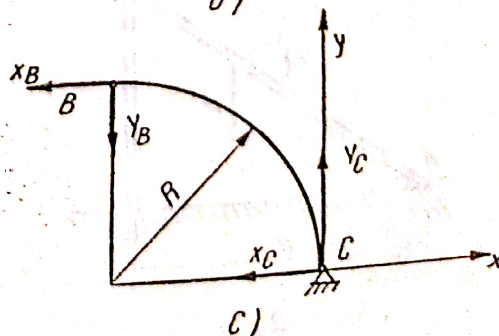


Fig. 6.B.2

— corpul BC (fig. 6.B.2, c) ; $(\Sigma X_i = 0)$; $\quad -X_B - X_C = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad -Y_B + Y_C = 0$;

$(\Sigma M_{i_C} = 0)$; $\quad Y_B R + X_B R = 0.$

Alegînd în mod convenabil ecuațiile, se găsesc următoarele rezultate:

$$Y_B = -X_B = \frac{P}{4}; \quad Y_A = \frac{P}{4}, \quad Y_C = \frac{P}{4}.$$

$$X_A = \frac{3P}{5}; \quad X_C = \frac{P}{4}.$$

Se observă că forța X_B este desenată în sens invers sensului real de acțiune.

6.B.3. Bara AB de greutate $\overline{P}$ și lungime l, articulată în A și făcînd unghiul α cu orizontala, se sprijină în D pe o bară verticală CD, încastrată în C. Cunoscînd distanța a de la A la C, să se determine forțele de legătură din punctele A, C și D (fig. 6.B.3, a).

R e z o l v a r e. Se obțin următoarele ecuații de echilibru, folosind sistemele de axe xAy, respectiv xCy:

— corpul AB (fig. 6.B.3, b) $(\Sigma X_i = 0)$; $\quad X_A - N \sin \alpha = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad Y_A + N \cos \alpha - P = 0$;

$(\Sigma M_{i_A} = 0)$; $\quad -P\frac{l}{2} \cos \alpha - N\frac{a}{\cos \alpha} = 0$;

— corpul CD (fig. 6.B.3, c) $(\Sigma X_i = 0)$; $\quad X_C + N \sin \alpha = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad Y_C - N \cos \alpha = 0$;

$(\Sigma M_{i_C} = 0)$; $\quad M_C - N\frac{a \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 0.$

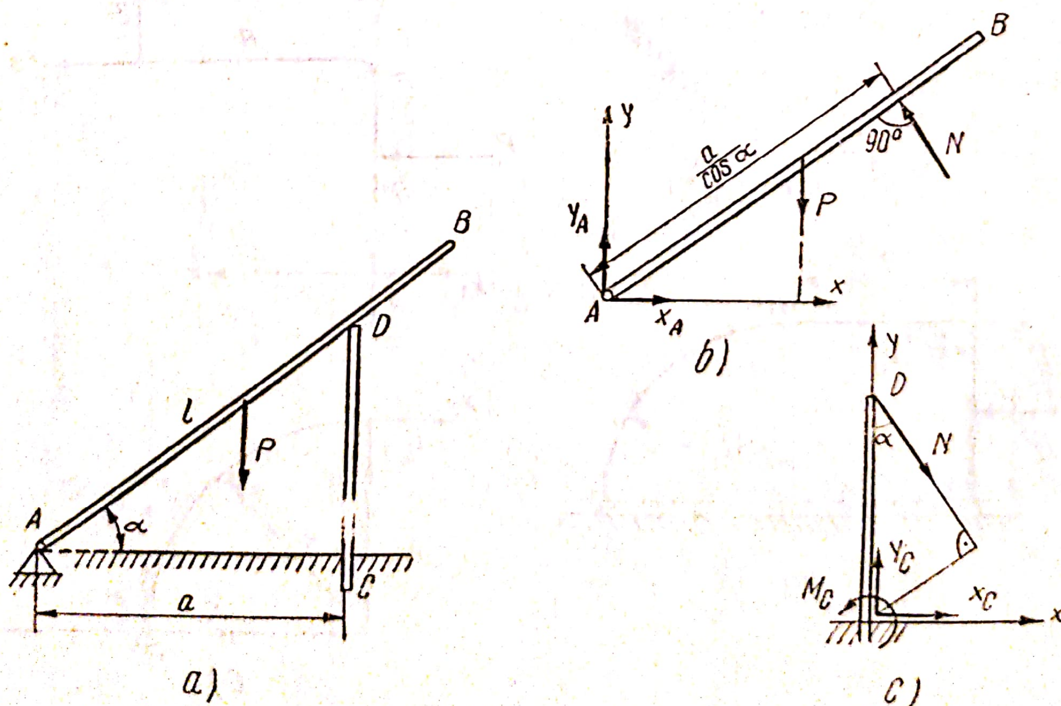


Fig. 6.B.3

Rezolvînd ecuaţiile, se obţine:

$$N = \frac{Pl}{2a}\cos^2\alpha; \quad Y_C = \frac{Pl}{2a}\cos^3\alpha;$$

$$X_A = \frac{Pl}{2a}\sin\alpha\cos^2\alpha; \quad Y_A = P\left(1 - \frac{l\cos^3\alpha}{2a}\right);$$

$$X_C = -\frac{Pl}{2a}\sin\alpha\cos^2\alpha; \quad M_C = \frac{Pl}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Reacţiunea X_C are sensul real, invers celui de pe desen.

6.B.4. O scară ABC cu braţe egale $AB = AC = l$ şi de greutăţi egale G, stă în poziţia de echilibru dată de unghiul 2α în A, capetele B şi C fiind legate cu un fir şi sprijinindu-se pe pămînt. Se cere tensiunea din firul BC la echilibru (fig. 6.B.4, *a*).

R e z o l v a r e. Se aplică în sistemul nedeformabil, dat, metoda izolării corpurilor din sistem. Scriind, în raport de axele alese în figură, ecuaţiile de echilibru ale sistemului de forţe, se obţine:

— corpul AB (fig. 6.B.4, *b*) $(\Sigma X_i = 0)$; $\quad S - X_A = 0;$

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad N_B - G - Y_A = 0;$

$$(\Sigma M_{iA} = 0); \quad -N_B l\sin\alpha + G\frac{l}{2}\sin\alpha + Sl\cos\alpha = 0;$$

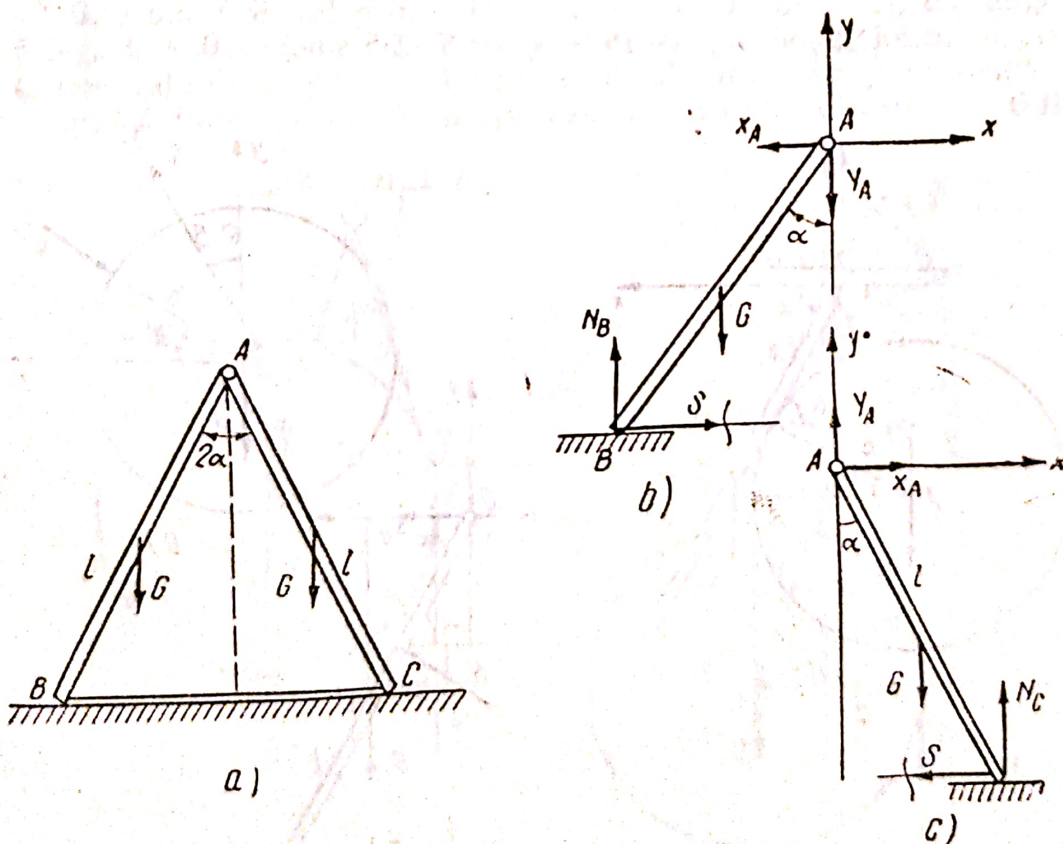


Fig. 6.B.4

— corpul AC (fig. 6.B.4, c) $(\Sigma X_i = 0)$; $X_A - S = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_A + N_C - G = 0$;

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad N_C l \sin \alpha - Sl \cos \alpha - G \frac{1}{2} \sin \alpha = 0.$$

Avem 6 ecuaţii cu 5 necunoscute: X_A, Y_A, S, N_B, N_C. Se observă că două ecuaţii sînt identice, deci sistemul este determinat.

Rezolvînd, se obţine:

$$Y_A = 0; \; N_B = N_C = G; \quad X_A = S = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

6.B.5. O sferă de greutate necunoscută şi rază R este legată cu un fir de lungime a, de punctul fix O, care este locul de articulaţie al unei bare de greutate $\bar{G}$ şi lungime l. Cunoscînd unghiul α pe care bara îl face cu orizontala şi unghiul β pe care firul îl face cu orizontala, se cer reacţiunile din O şi B, tensiunea din fir şi greutatea $\bar{P}$ a sferei (fig. 6.B.5, a).

R e z o l v a r e. Se aplică metoda izolării solidelor. O ecuaţie de momente faţă de punctul A arată că tensiunea S din fir trece prin centrul sferei (fig. 6.B.5, b):

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -Sd = 0; \text{ deci } d = 0.$$

Ecuaţiile de proiecţie pe xAy dau:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -N \sin \alpha + S \cos \beta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -P - N \cos \alpha + S \sin \beta = 0.$$

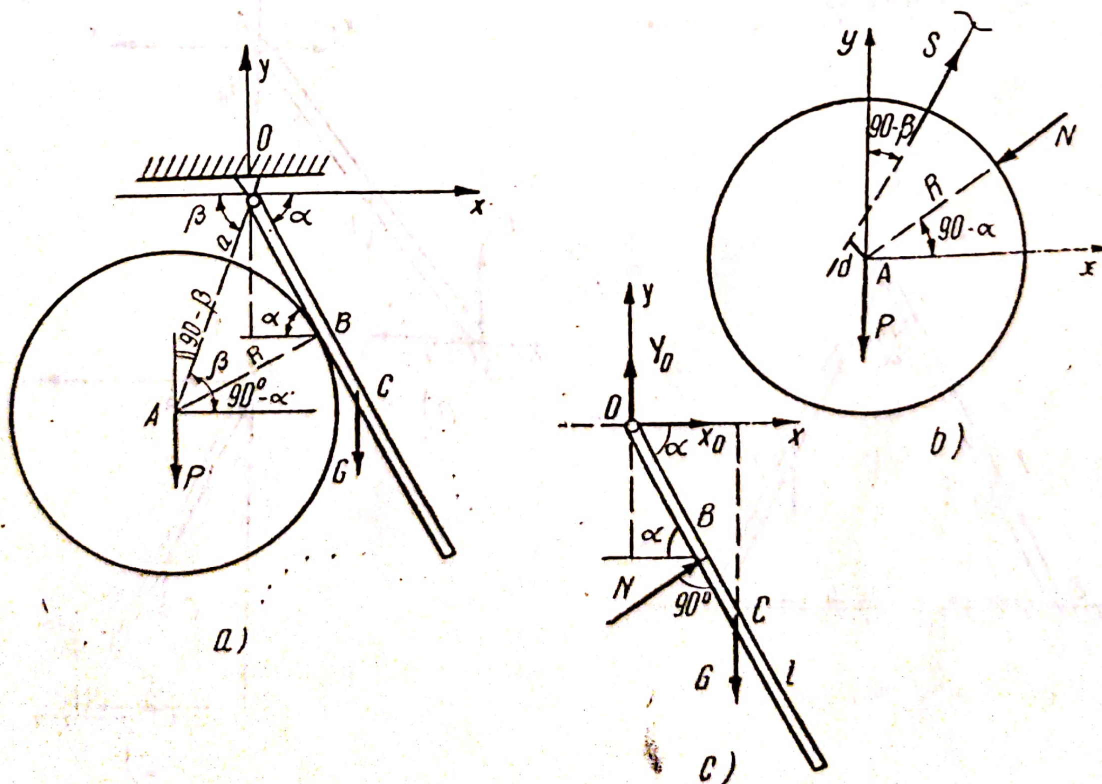


Fig. 6.B.5

Asupra barei (fig. 6.B.5, *c*) acţionează forţele din articulaţia O, X_o, Y_o, reacţiunea interioară N şi greutatea G.
Ecuaţiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N \sin \alpha + X_o = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_o - G + N \cos \alpha = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_o} = 0); \quad -G \frac{l}{2} \cos \alpha + N \sqrt{(a+R)^2 - R^2} = 0.$$

Din triunghiul OAB se deduce:

$$(a + R) \cos (\alpha + \beta - 90) = R.$$

Ultima relaţie arată că α, β, a şi R nu sînt independente. Rezolvînd sistemul se obţine:

$$N = \frac{Gl \cos \alpha}{2\sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$Y_o = G\left(1 - \frac{l \cos^2 \alpha}{2\sqrt{a^2 + 2aR}}\right),$$

$$X_o = \frac{Gl \sin 2\alpha}{4\sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$S = \frac{Gl \sin 2\alpha}{4 \cos \beta \sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$P = \frac{Gl \cos \alpha}{2\sqrt{a^2 + 2aR}} (\text{tg}\, \beta \sin \alpha - \cos \alpha).$$

6.B.6. Două fire sînt prinse de un punct fix O: de unul, cu lungimea l, fiind legată o sferă de rază R şi greutate G, iar de-al doilea, o greutate P. Cunoscîndu-se unghiul α dintre cel de-al doilea fir şi verticală, să se afle unghiul dintre primul fir şi verticală şi tensiunea din fir (fig. 6.B.6, *a*)

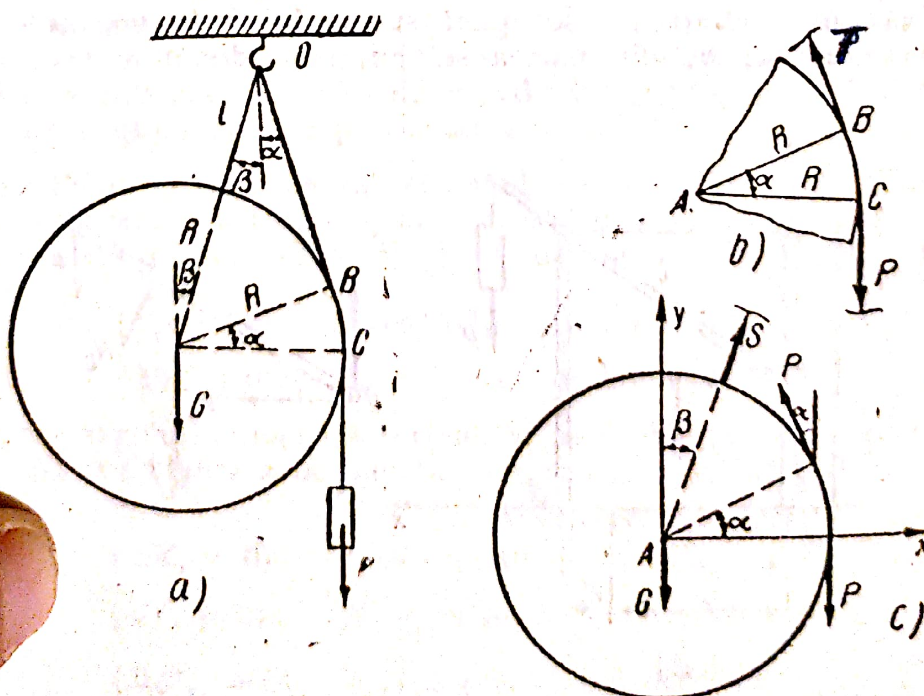


Fig. 6.B.6

R e z o l v a r e. Se aplică metoda izolării solidelor; se izolează întîi firul (fig. 6.B.6, *b*) de care este legată greutatea P. Fie T tensiunea în fir. O ecuaţie de momente faţă de punctul A dă $T = P$.

$$(\Sigma M_{i_A} = 0)\,; \quad TR - PR = 0.$$

Se izolează apoi sfera împreună cu firul (fig. 6.B.6, *c*) tăind legătura sferei cu punctul O şi introducînd tensiunea S. Faţă de axele xAy, condiţiile de echilibru devin:

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \quad -P \sin\alpha + S \sin\beta = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad P \cos\alpha + S\cos\beta - G - P = 0.$$

Se mai adaugă, din OAB, relaţia:

$$(l + R)\sin(\alpha + \beta) = R.$$

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile de echilibru şi relaţia geometrică, rezultă:

$$S = (G + P)\frac{l + R}{R}\sin\alpha\,;$$

$$\sin\beta = \frac{P}{G + P}\,\frac{R}{l + R}\,.$$

6.B.7. O bară de greutate neglijabilă şi lungime l este articulată la jumătatea peretelui unui cilindru gol, de înălţime h şi rază R, aşezat vertical pe sol (fig. 6.B.7, *a*). Cunoscînd greutatea G a cilindrului, să se determine valoarea sarcinii care se poate lega de capătul liber al barei astfel ca cilindrul să nu se răstoarne precum şi reacţiunea din C.

R e z o l v a r e. Este un sistem nedeformabil de corpuri la care poziţia de echilibru este dată de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{4R}$. Pentru a găsi sarcina necesară ca sistemul să nu se răstoarne, se aplică sistemului forţa necunoscută P şi reacţiunea normală N_0 din partea solului, la o distanţă x necunoscută

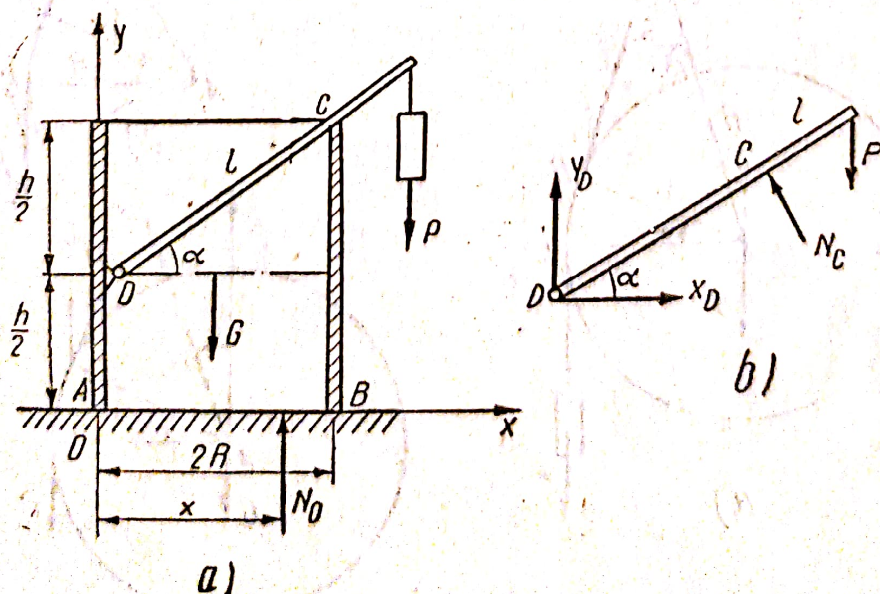


Fig. 6.B.7

de punctul A. Se aplică metoda solidificării și scriind în raport cu axele xAy, ecuațiile de echilibru, se obține:

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad -G + N_0 - P = 0\,;$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0)\,; \quad -GR - Pl\cos\alpha + N_0 x = 0,$$

de unde:

$$N_0 = G + P,$$

$$x = \frac{GR + Pl\cos\alpha}{G + P}\,.$$

Condiția de stabilitate este ca $x \leqslant 2R$, deci:

$$\frac{GR + Pl\cos\alpha}{G + P} \leqslant 2R,$$

de unde:

$$P \leqslant \frac{GR}{l\cos\alpha - 2R}\,.$$

Pentru reacțiunea din C se izolează bara (fig. 6.B.7, b) și se scrie ecuația de momente în raport cu articulația D:

$$(\Sigma M_{i_D} = 0)\,; \quad N_C \frac{2R}{\cos\alpha} - Pl\cos\alpha = 0.$$

Rezultă:

$$N_C = \frac{Pl\cos^2\alpha}{2R}\,.$$

6.B.8. Pe un plan înclinat cu unghiul α se găsește un cilindru de rază R și greutate G care este împiedicat să se deplaseze de un prag paralelipipedic, de greutate neglijabilă (fig. 6.B.8, a). Se cere să se determine unghiul de frecare dintre prag și plan și reacțiunile în ipoteza că înălțimea pragului este $R/2$ și că frecarea dintre cilindru și prag ca și dintre cilindru și plan este neglijabilă. Caz particular $\alpha = 30°$.

R e z o l v a r e. Se izolează cele două elemente ale sistemului. Asupra sferei introducem reacțiunea planului N_E și reacțiunea pragului N, de direcții cunoscute (fig. 6.B.8, b). Față de axele xEy avem ecuațiile de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \quad N\cos 30° - G\sin\alpha = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad N_E - G\cos\alpha + N\sin 30° = 0.$$

Asupra pragului acționează forțele N, forța de frecare T și reacțiunea planului N_2 la distanța x de punctul A necunoscută. Ecuațiile de echilibru sînt (fig. 6.B.8, c):

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \quad -N\cos 30° + T = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \quad N_2 - N\sin 30° = 0 \text{ și } T \leqslant \mu N_2,$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0)\,; \quad -N_2 x + N\frac{R}{2}\cos 30° = 0.$$

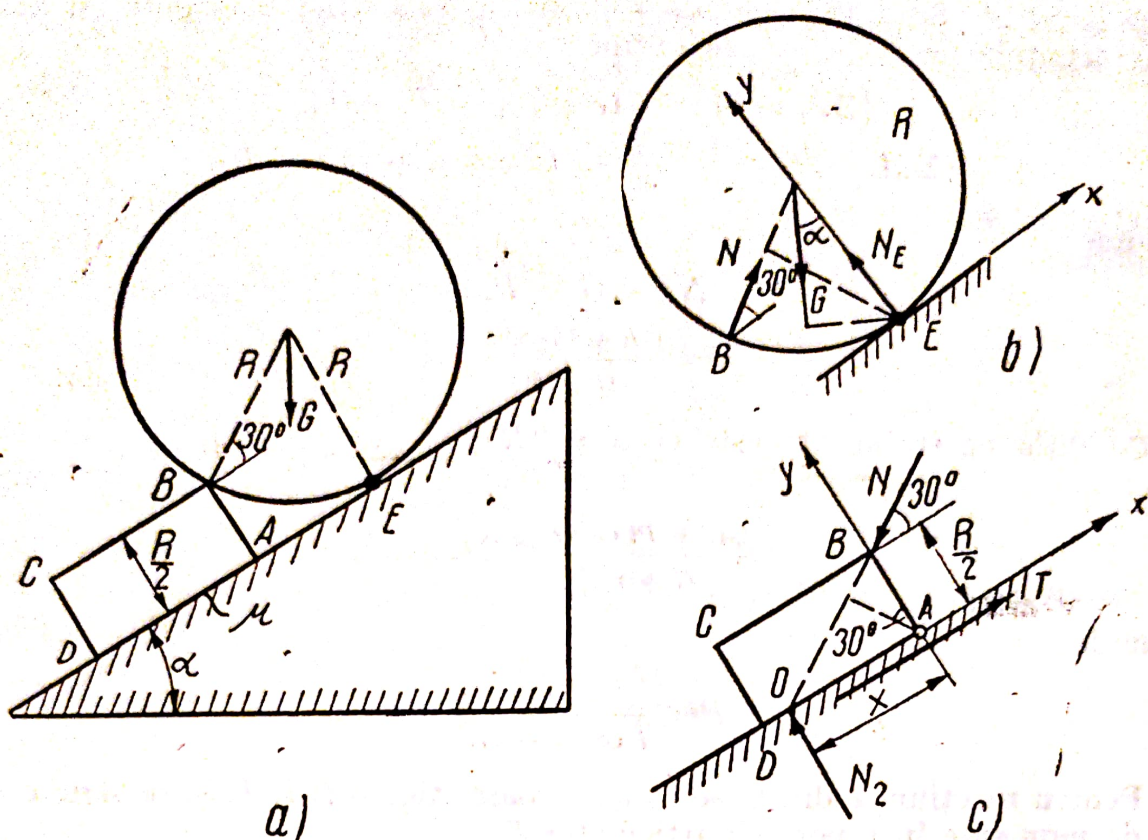


Fig. 6.B.8

Înlocuind în condiţia de echilibru cu frecare rezultă:

$$T = G \sin \alpha ; \quad N_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sqrt{3}} ;$$

$$N = \frac{2G \sin \alpha}{\sqrt{3}} ;$$

$$N_E = G\left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha\right) .$$

Notînd cu φ unghiul de frecare, rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi \geqslant \sqrt{3}, \quad \varphi \geqslant \frac{\pi}{3} .$$

Determinînd pe x din ultima ecuaţie, obţinem:

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{2} .$$

Deci forţele $\bar{N}$ şi $\bar{N}_2$ au punctul de aplicaţie comun O. Pentru cazul particular $\alpha = 30°$, rezultă:

$$T = \frac{G}{2} ; \quad N_2 = \frac{G}{2\sqrt{3}} ; \quad N = N_E = \frac{G}{\sqrt{3}} ,$$

6.B.9. O bară de lungime l şi greutate $\bar{G}$, articulată în A, se sprijină în B pe un semicilindru de rază R şi greutate neglijabilă aşezat pe sol, cu

partea bombată în sus. Cunoscîndu-se coeficientul de frecare μ dintre semicilindru şi sol şi μ_1 între bară şi semicilindru, se cere poziţia de echilibru a sistemului (fig. 6.B.9, *a*).

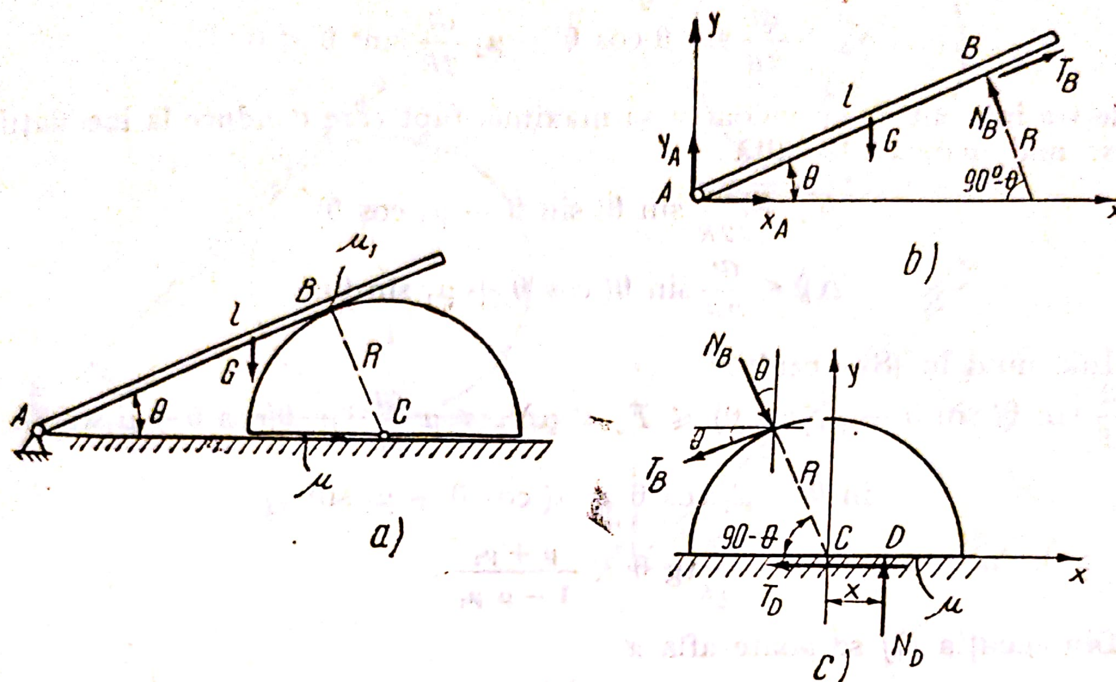


Fig. 6.B.9

R e z o l v a r e. Fie θ parametrul cerut. Se izolează elementele sistemului. Faţă de axele *xAy* se obţin ecuaţiile de echilibru (fig. 6.B.9, *b*):

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad T_B \cos\theta - N_B \sin\theta + X_A = 0; \tag{1}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad -G + T_B \sin\theta + N_B \cos\theta + Y_A = 0; \tag{2}$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -G\frac{l}{2}\cos\theta + N_B\frac{R}{\operatorname{tg}\theta} = 0; \tag{3}$$

$$T_B \leqslant \mu_1 N_B. \tag{4}$$

Faţă de axele *xCy* se obţin ecuaţiile (fig. 6.B.9, *c*):

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad -T_D + N_B \sin\theta - T_B \cos\theta = 0; \tag{5}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad N_D - N_B \cos\theta - T_B \sin\theta = 0; \tag{6}$$

$$(\Sigma M_{i_C} = 0); \quad N_D x + T_B R = 0; \tag{7}$$

$$T_D \leqslant \mu N_D. \tag{8}$$

Sînt şase ecuaţii şi două inecuaţii. Se va rezolva exerciţiul integral, pentru a arăta modul de lucru cu cele două inecuaţii.

Din relaţia (3) avem $N_B = \frac{Gl}{2R}\sin\theta$.

Înlocuind în (4), $T_B \leqslant \mu_1 \frac{Gl}{2R}\sin\theta$.

Înlocuind N_B şi T_B în (5) şi (6), se obţine:

$$-T_D + \frac{Gl}{2R}\sin^2\theta - \mu_1\frac{Gl}{2R}\sin\theta\cos\theta \leqslant 0$$

$$N_D - \frac{Gl}{2R}\sin\theta\cos\theta - \mu_1\frac{Gl}{2R}\sin^2\theta \leqslant 0$$

unde s-a înlocuit T cu valoarea sa maximă, fapt care conduce la inecuaţiile scrise mai înainte. Rezultă:

$$T_D \geqslant \frac{Gl}{2R}\sin\theta(\sin\theta - \mu_1\cos\theta),$$

$$N_D \leqslant \frac{Gl}{2R}\sin\theta(\cos\theta + \mu_1\sin\theta),.$$

Înlocuind în (8), rezultă:

$$\frac{Gl}{2R}\sin\theta(\sin\theta - \mu_1\cos\theta) \leqslant T_D \leqslant \mu N_D \leqslant \mu\frac{Gl}{2R}\sin\theta(\cos\theta + \mu_1\sin\theta).$$

$$\sin\theta - \mu_1\cos\theta \leqslant \mu(\cos\theta + \mu_1\sin\theta)$$

$$\operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{\mu + \mu_1}{1 - \mu\,\mu_1}.$$

Din ecuaţia (7) se poate afla x:

$$x = \frac{-R\cdot\mu_1}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta},$$

ultima relaţie arătînd că punctul D se găseşte la stînga lui C.

Se vede că pentru $\mu_1 = 0$ (caz particular) $\operatorname{tg}\theta \leqslant \mu$ iar $x = 0$ (forţa normală este aplicată în punctul C).

6.B.10. O bară omogenă de greutate $\bar{G}$ şi lungime l, articulată în A, se sprijină în B pe un cilindru de rază R şi greutate $\bar{Q}$, aşezat pe un plan orizontal în C. Se cere unghiul θ al poziţiei de echilibru al barei, cunoscînd coeficientul de frecare μ al cilindrului cu bara şi μ_1 al cilindrului cu solul. Se neglijează frecarea de rostogolire ($s \approx 0$). (fig. 6.B.10, *a*).

R e z o l v a r e. Se izolează cilindrul. Ecuaţiile de echilibru faţă de axele xOy sînt (fig. 6.B.10, *b*):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -T_B\cos\theta + N_B\sin\theta - T_C = 0; \qquad (1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_C - Q - T_B\sin\theta - N_B\cos\theta = 0; \qquad (2)$$

$$(\Sigma M_{i_O} = 0); \quad T_B R - T_C R = 0; \qquad (3)$$

$$T_C \leqslant \mu_1 N_C; \qquad (4)$$

$$T_B \leqslant \mu N_B \qquad (5)$$

Se izolează bara. Ecuaţiile de echilibru faţă de axele xAy sînt (fig. 6.B.10, *c*):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_A + T_B\cos\theta - N_B\sin\theta = 0; \qquad (6)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -G + Y_A + N_B\cos\theta + T_B\sin\theta = 0; \qquad (7)$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -G\frac{l}{2}\cos\theta + N_B R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 0. \qquad (8)$$

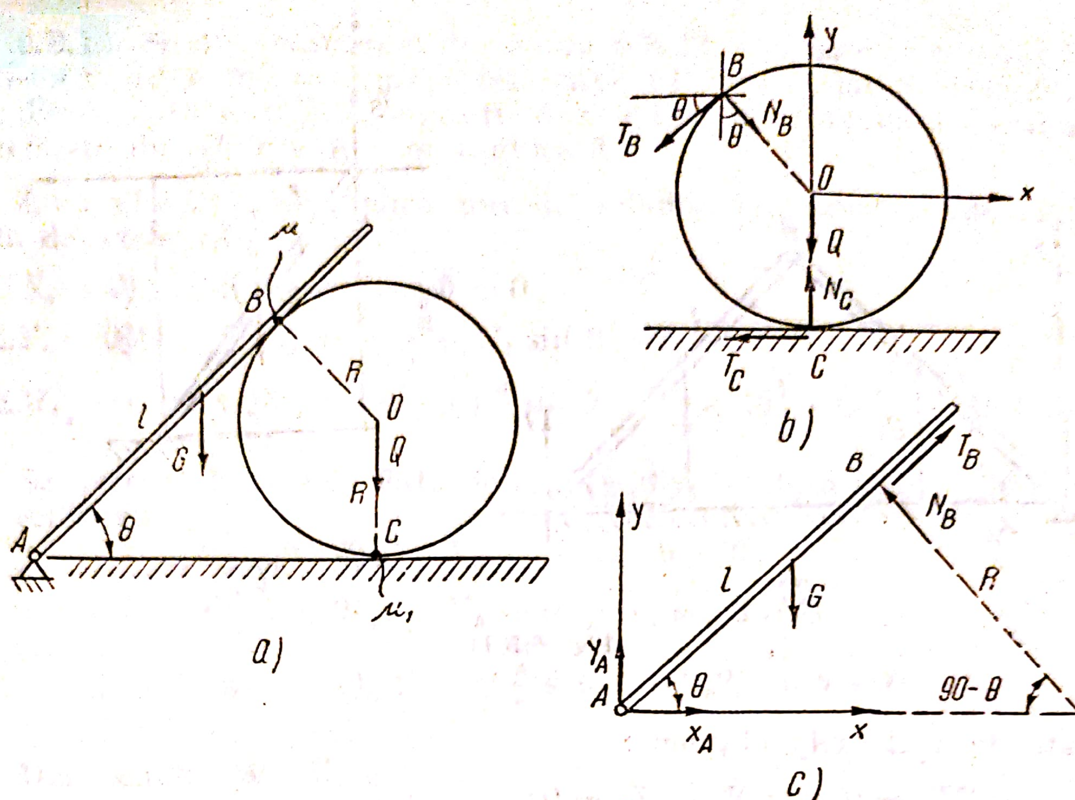


Fig. 6.B.10

Ecuațiile (6) și (7) servesc la determinarea lui X_A și Y_A.

Din (8)

$$N_B = \frac{Gl \cos \theta}{2R} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Din (3) avem

$$T_C = T_B,$$

iar (1) dă:

$$T_C = T_B = \frac{Gl \cos \theta \sin \theta}{2R(1 + \cos \theta)} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Din (2) rezultă:

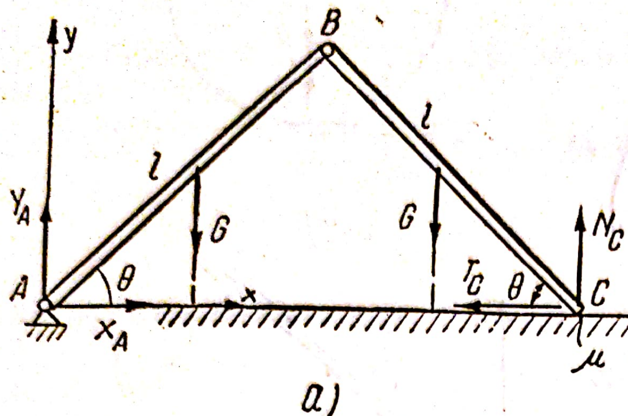
$$N_C = Q + N_B \geqslant N_B.$$

Rezultă că inecuația (5) este inclusă în (4) și că echilibrul se strică întîi în B unde avem alunecare, care începe, odată cu rostogolirea fără alunecare în C, la:

$$T_B = \mu N_B; \ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \mu.$$

6.B.11. Se dă mecanismul format din barele AB și BC, de lungimi egale cu l și greutăți identice $\overline{G}$, articulat în A și simplu rezemat în C pe un plan orizontal, cu coeficientul de frecare μ. În B avem o articulație interioară. Se cere unghiul θ, pentru poziția de echilibru și reacțiunile din figura 6.B.11, *a*.

R e z o l v a r e. Se aplică teorema solidificării.



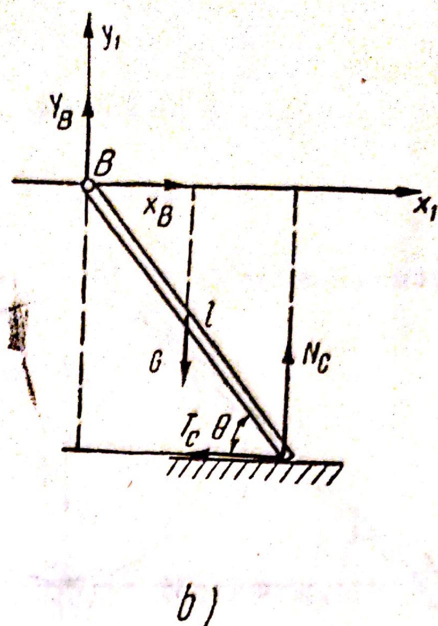


Fig. 6.B.11

Față de axele xAy obținem:

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \qquad X_A - T_C = 0\,; \tag{1}$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \qquad Y_A - 2G + N_C = 0\,; \tag{2}$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0)\,; \quad N_C 2l \cos\theta - G\frac{l}{2}\cos\theta - G\frac{3l}{2}\cos\theta = 0\,; \tag{3}$$

$$T_C \leqslant \mu N_C. \tag{4}$$

Se izolează bara BC, introducînd forțele de legătură, interioare X_B și Y_B în B și se scrie echilibrul forțelor ce acționează bara față de axele xBy (fig. 6.B.11, b)

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \qquad X_B - T_C = 0\,; \tag{5}$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \qquad Y_B - G + N_C = 0\,; \tag{6}$$

$$(\Sigma M_{i_B} = 0)\,; \quad N_C l \cos\theta - T_C \cdot l \sin\theta - G\frac{l}{2}\cos\theta = 0. \tag{7}$$

Ecuațiile (1), (2), (5), (6) servesc la aflarea reacțiunilor X_A, Y_A, X_B, Y_B. Pentru poziția de echilibru, ne folosim de restul ecuațiilor:

$$N_C = G, \text{ din ecuația (3)}\,;$$

$$T_C = \frac{G}{2}\operatorname{ctg}\theta \text{ din, ecuația (7)}.$$

Înlocuind în (4), se obține:

$$\operatorname{ctg}\theta\frac{G}{2} \leqslant \mu G,$$

deci:

$$\operatorname{ctg}\theta \leqslant 2\mu, \quad \theta \geqslant \operatorname{arc\,ctg} 2\mu\,;$$

$$X_A = X_B = T_C \leqslant \mu G\,; \quad Y_A = G\,; \quad Y_B = 0.$$

6.B.12. Se dă mecanismul din figura 6.B.12, a la care se cunosc: lungimile $AB = l$ şi $BC = a$, greutatea barei AB este G, iar a barei BC este $\bar{Q}$; distanţa $AD = l$. Se cere poziţia de echilibru θ a sistemului şi reacţiunile interioare din B. Frecarea se neglijează.

Rezolvare. Se aplică metoda solidificării. Ecuaţiile de echilibru faţă de axele xAy sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad X_A + N_D \cos\theta = 0; \tag{1}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad Y_A - G - Q + N_D \sin\theta = 0; \tag{2}$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \qquad -N_D l \sin\theta + Q\left(\frac{a}{2}\sin\theta + l\cos 2\theta\right) - G\frac{l}{2}\cos 2\theta = 0. \tag{3}$$

Se izolează bara BC. Faţă de axele x_1By_1 se obţin următoarele ecuaţii de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad X_B + N_D \cos\theta = 0; \tag{4}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad Y_B - Q + N_D \sin\theta = 0; \tag{5}$$

$$(\Sigma M_{i_B} = 0); \qquad -Q\frac{a}{2}\sin\theta + N_D 2l \sin\theta = 0. \tag{6}$$

Din ecuaţia (6), $N_D = \frac{Q}{4}\frac{a}{l}$.

Introducînd în ecuaţia (3), se obţine:

$$4l(2Q + G)\sin^2\theta - Qa\sin\theta - 2l(2Q + G) = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$\sin\theta_{1,2} = \frac{Qa \pm \sqrt{Q^2a^2 + 32l^2(2Q + G)^2}}{8l(2Q + G)}.$$

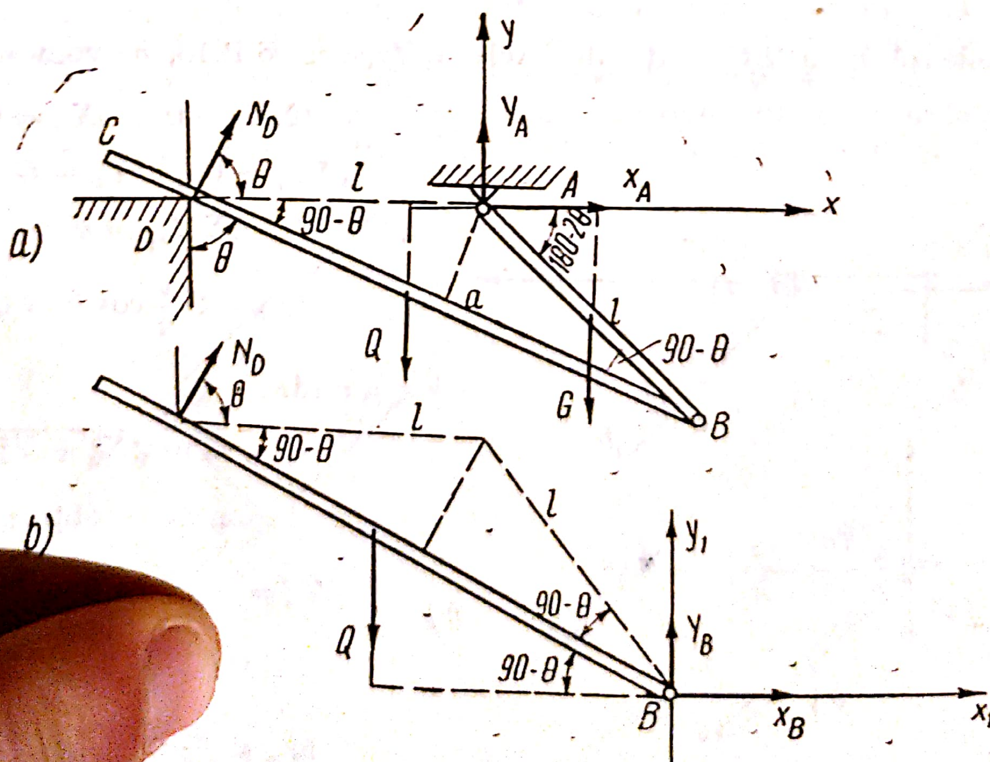


Fig. 6.B.12

Considerînd soluția cu semnul (+), rezultă $\sin\theta_1 > 0$.
Ecuația (3) se poate pune sub forma:

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} = -\frac{Q\frac{a}{4}}{l\left(Q+\frac{G}{2}\right)}, \quad \text{deci} \quad \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} < 0.$$

De aici rezultă $\cos 2\theta_1 > 0$, deci $45° < \theta_1 < 135°$.

Considerînd soluția cu semnul (—), rezultă $\sin\theta_2 < 0$ și din aceeași condiție se obține $\cos 2\theta_2 > 0$, ceea ce conduce la $-45° < \theta_2 < 45°$ Această soluție nu poate fi aleasă.

Din condiția $\sin\theta \leqslant 1$, rezultă

$$Q > \frac{2G}{a-4l} \quad \text{sau} \quad a > 4l\left(1+\frac{G}{2Q}\right).$$

Cu valoarea lui θ astfel obținută se determină componentele reacțiunilor din articulațiile A și B: X_A, Y_A, X_B, Y_B.

6.B.13. Se dă sistemul din figura 6.B.13, *a* la care în punctul B există frecare în articulație, coeficientul de frecare fiind μ, iar raza articulației r. Să se determine unghiul θ la echilibru și reacțiunile.

R e z o l v a r e. Se aplică teorema solidificării. Față de axele xAy avem:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_A = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_A - G - Q = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad M_A - Q\frac{l}{2} - G\left(l + \frac{a}{2}\cos\theta\right) = 0.$$

Se izolează bara BC. Față de axele x_1By_1 (fig. 6.B.13, *b*) vom avea:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_B = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_B - G = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_B} = 0);$$

$$M_{fB} - G\frac{a}{2}\cos\theta = 0,$$

unde:

$$M_{fB} \leqslant \mu r\sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

De unde se obține:

$$Y_B = G; \quad \cos\theta \leqslant \frac{2\mu r}{a};$$

$$Y_A = G + Q;$$

$$M_A \leqslant \frac{Ql}{2} + G(l + \mu r).$$

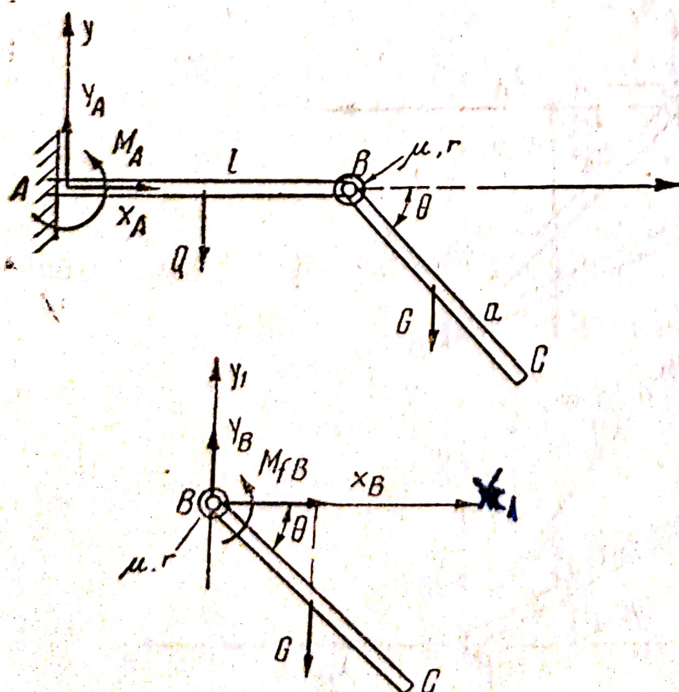


Fig. 6.B.13

Capitolul 7

GRINZI CU ZĂBRELE

7.A. PREZENTARE TEORETICĂ

7.A.1. Generalități

Grinzile cu zăbrele sînt sisteme de bare solide rigide, articulate între ele la capete. Ele pot fi sisteme *plane* sau *spațiale*. Fiind sisteme rigide, necunoscutele problemelor de grinzi cu zăbrele sînt forțele de legătură exterioare și interioare.

Deoarece metoda izolării fiecărei bare este extrem de greoaie și deoarece în tehnica construcției unor asemenea sisteme se cer rezultate cu aproximație, cel mult a celei de a treia cifre semnificative, se fac unele ipoteze simplificatoare care dau rezultate satisfăcătoare.

7.A.2. Ipotezele calculului grinzilor cu zăbrele

Sarcinile exterioare se aplică numai la noduri.

În primul calcul aproximativ, cînd nu se cunosc greutățile barelor grinzii, nu se ține seamă de aceste greutăți.

Dacă se cunosc după determinarea lorl prin dimensionare, greutățile barelor se consideră aplicate în articulații (noduri), de obicei cîte o jumătate din greutatea barei la fiecare din cele două noduri.

Consecințe

Ca urmare a ipotezelor, în orice secțiune normală pe axa longitudinală a barei, forța de legătură dintr-o parte a secțiunii (efortul S) este echivalentă cu sistemul de forțe aplicat asupra părții suprimate.

Deoarece între noduri nu sînt forțe exterioare, în orice secțiune normală a barei considerate (fig. 7.A.1) efortul S este axial și constant.

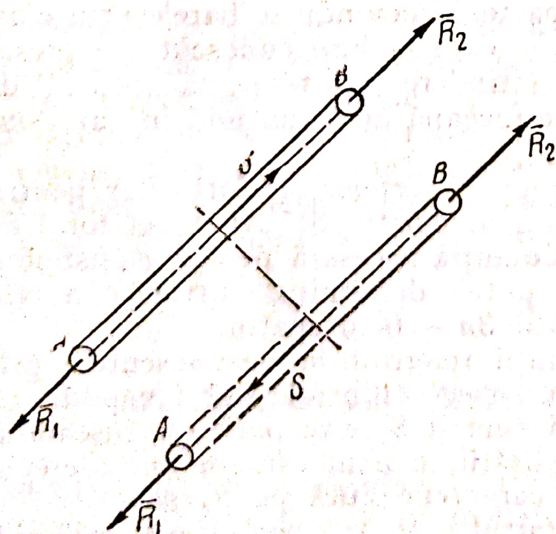


Fig. 7.A.1

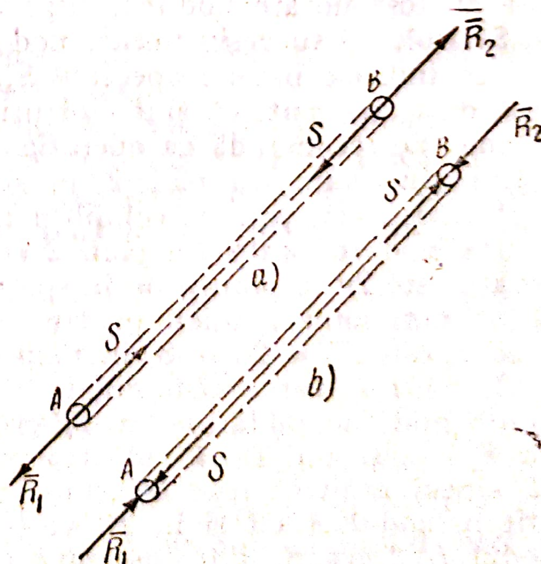


Fig. 7.A.2.

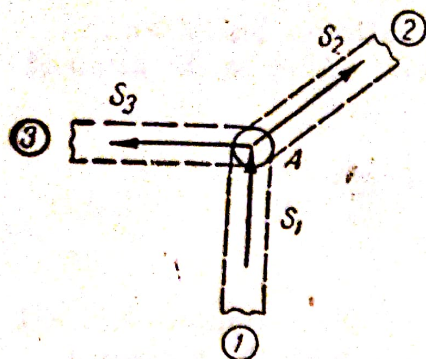


Fig. 7.A.3

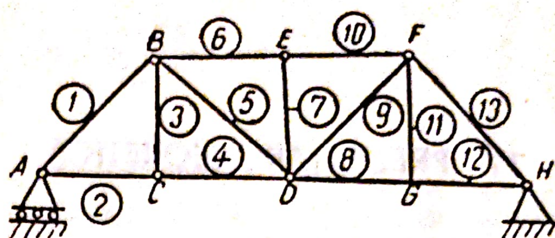


Fig. 7.A.4

În consecință, ducînd secțiunile chiar prin noduri, bara întreagă este suprimată și înlocuită prin efortul S. Dacă bara este *întinsă* efortul „pleacă" de la nodul considerat, A sau B (fig. 7.A.2, *a*). Dacă bara este *comprimată* efortul „vine" la nodul considerat, A sau B (fig. 7.A.2, *b*).

Dacă într-un nod sînt articulate mai multe bare, nodul este acționat de *rezultanta forțelor exterioare* $\bar{R}$ și de eforturile din barele legate de nod și care au fost înlocuite prin aceste eforturi. De pildă în nodul A (fig. 7.A.3) acționează rezultanta forțelor date și de legătură exterioare cunoscute $\bar{R}$ și eforturile S_1 de compresiune care înlocuiește bara suprimată, numerotată 1 și S_2, S_3 de întindere din barele suprimate 2 și 3.

Așa după cum întregul sistem și fiecare bară izolată rămîn în repaus, tot astfel și *fiecare nod izolat rămîne în repaus*, sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor din barele articulate aplicate în nod.

7.A.3. Aplicarea metodei izolării nodurilor

Se calculează toate forțele active aplicate la noduri.

Se determină forțele de legătură exterioare scriind condițiile de echilibru pentru întreaga grindă în repaus.

Se notează toate cele n noduri cu literele A, B, C, D etc. într-o ordine anumită și se numerotează cele b bare ținîndu-se seamă și de ordinea în care au fost notate nodurile (fig. 7.A.4).

Se izolează succesiv fiecare nod în parte, înlocuindu-se barele prin eforturi cu indicele barei respective S_1, S_2 și care nefiind cunoscute se presupun, de la început, că sînt eforturi de întindere (pozitive), că „pleacă" de la nod. Se recomandă ca operația să se înceapă de la un nod în care sînt mai puține bare (în plan 2, în spațiu 3).

Se scriu ecuațiile de echilibru ale tuturor forțelor și eforturilor pentru fiecare nod în parte (în plan 2 ecuații, în spațiu 3). Numărul total de ecuații este $2n$ în plan și $3n$ în spațiu. Condiția necesară pentru ca sistemul să fie determinat, adică pentru a se putea determina eforturile în cele b bare, este: $b = 2n - 3$, în plan și $b = 3n - 6$ în spațiu.

După rezolvarea sistemului de ecuații referitor la necunoscutele primului nod (de pildă A, cu S_1 și S_2) se trece la următorul (de pildă B, cu S_2, S_3, și S_4). Dacă valoarea găsită pentru S_2 este pozitivă, înseamnă că sensul arbitrar luat corespunde realității, efortul este de întindere și atît în nodul A cît și în B, vectorul care reprezintă pe S_2 *pleacă* de la nodul B. Dacă $S_2 < 0$, înseamnă că efortul este de *compresiune*, în acest caz, cînd se trece la nodul următor (B), *efortul se orientează corect* (vine

înspre *B*) şi i se atribuie valoarea pozitivă, de semn contrar cu cea calculată ş.a.m.d.

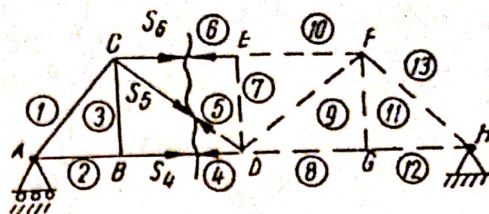


Fig. 7.A.5

Chiar dacă toate eforturile din bare au fost determinate înainte de operaţia de izolare a ultimelor noduri, calculele se vor duce pînă la capăt deoarece prin izolarea ultimelor noduri se obţine cea mai simplă şi eficace verificare a rezultatelor.

Uneori în loc de calcule analitice se folosesc, mai ales în tehnica construcţiilor, operaţii grafice de compuneri şi descompuneri de forţe după două direcţii (pentru sistemele plane).

7.A.4. Metoda secţiunilor (Ritter)

Metoda izolării nodurilor necesită trecerea de la un nod la următorul. Uneori însă trebuie determinat efortul dintr-o anumită bară, mai ales pentru sarcini care se deplasează pe grindă sau variază în mărime. În asemenea cazuri metoda izolării nodurilor este greoaie. Mai ales pentru grinzi plane, *metoda secţionării grinzii* dă rezultate rapide.

Procedînd la fel ca la metoda izolării nodurilor, în continuare printr-o secţiune, care trece prin bara amintită şi prin încă alte două bare, se separă întreaga grindă în două părţi. După ce se introduc eforturile în cele trei bare (fig. 7.A.5), presupunînd că sînt de întindere, se consideră că fiecare din cele două părţi rămîne în repaus.

Pentru calcul se alege partea cea mai simplă şi se scriu condiţiile de echilibru ale forţelor date şi de legătură, exterioare şi interioare, aplicate acestei părţi. Se pot scrie două ecuaţii de proiecţii şi una de momente sau două de momente şi una de proiecţii sau trei ecuaţii de momente în raport cu trei noduri nesituate pe o dreaptă. Pentru exemplul ales, se scriu pentru partea din stînga a grinzii ecuaţiile de momente în raport cu *C* şi *D* şi ecuaţia de proiecţie pe bara *BC*.

O b s e r v a ţ i i

Pentru ca metoda să se poată aplica, este necesar ca cele trei bare secţionate să nu treacă toate prin acelaşi nod.

Pentru ca metoda să fie într-adevăr rapidă, este bine ca numărul barelor secţionate pentru separare să nu fie mai mare ca 3. Dacă nu sînt asemenea situaţii, se repetă aplicarea metodei şi în alte secţiuni care trec prin unele bare ale secţiunii precedente, pînă la determinarea necunoscutei sau a necunoscutelor căutate.

7.B. APLICAŢII LA GRINZI CU ZĂBRELE

7.B.1. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 7.B.1, *a* prin metoda izolării nodurilor, verificînd cu metoda secţiunilor eforturile în barele *1*, *3* şi *4*.

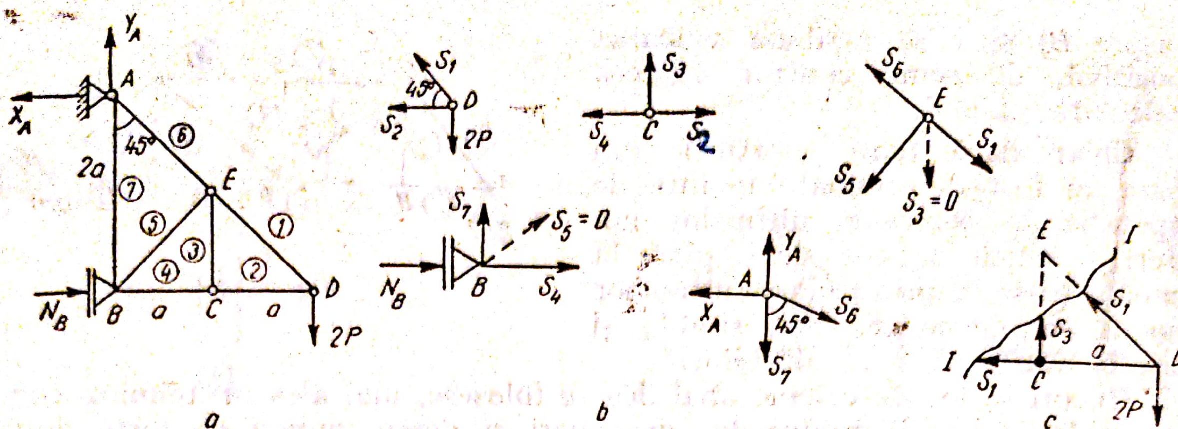


Fig. 7.B.1

R e z o l v a r e. Se determină reacțiunile exterioare din reazemul B și articulația A, aplicînd teorema solidificării, pentru care se scriu ecuațiile de echilibru:

$(\Sigma M_A = 0)$; $\quad N_B 2a - 2P \cdot 2a = 0$; rezultă: $\quad N_B = 2P$;

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad N_B - X_A = 0$, $\quad X_A = 2P$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad Y_A - 2P = 0$; $\quad Y_A = 2P$.

Se aplică metoda izolării nodurilor (fig. 7.B.1, *b*):

Nodul D

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad S_1 \sin 45° - 2P = 0$; rezultă: $\quad S_1 = \frac{4P}{\sqrt{2}}$ (tensiune);

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad S_1 \cos 45° + S_2 = 0$; $\quad S_2 = -2P$ (compresiune).

Nodul C

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad S_2 - S_4 = 0$; rezultă: $S_4 = -2P$ (compresiune);

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad S_3 = 0$; $\quad S_3 = 0$ barea CE are efort nul; ea servește la rigidizare.

Nodul E

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad S_1 - S_6 = 0$; rezultă: $S_6 = \frac{4P}{\sqrt{2}}$ (tensiune);

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad S_5 = 0$; $\quad S_5 = 0$ bara EB este de efort nul.

Nodul B

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad S_7 + S_5 \sin 45° = 0$; rezultă: $S_7 = 0$ bara AB este de efort nul.

A doua ecuație din nodul B și ambele ecuații de echilibru ale ultimului nod A sînt ecuații de verificare.

Pentru verificarea eforturilor din barele *1, 3* și *4* cu metoda secțiunilor, se duce secțiunea I—I ce intersectează barele căutate (fig. 7.B.1, *c*). Se scriu ecuațiile de echilibru pentru tronsonul din dreapta:

$(\Sigma M_C = 0)$; $S_1 \sin 45° \cdot a - 2P \cdot a = 0$; rezultă: $S_1 = \frac{4P}{\sqrt{2}}$;

$(\Sigma M_E = 0)$; $S_4 a + 2Pa = 0$; $S_4 = -2P$;

$(\Sigma M_D = 0)$; $S_3 a = 0$; $S_3 = 0$.

7.B.2. Să se determine reacțiunile din legăturile exterioare A și B, precum și eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.B.2, a.

Rezolvare. Pentru determinarea reacțiunilor din *A* și *B* se scriu ecuațiile de echilibru pentru ansamblul solidificat:

$(\Sigma X_i = 0)$; $P - X_A = 0$; rezultă: $X_A = P$;

$(\Sigma M_A = 0)$; $N_B a - Pa\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $N_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $N_B - Y_A = 0$; $Y_A = \frac{\sqrt{3}}{2}P$.

Se observă că pentru determinarea eforturilor nu se poate aplica deocamdată metoda izolării nodurilor, dat fiindcă în fiecare nod se întîlnesc mai mult de două bare. Se aplică metoda secțiunilor ducînd secțiunea I—I și se scriu ecuațiile de echilibru pentru partea superioară a grinzii (fig. 7.B.2, b):

$(\Sigma M_N = 0)$; $S_1 a - P\frac{a\sqrt{3}}{4} = 0$; rezultă: $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}P$ (tensiune);

$(\Sigma M_G = 0)$; $-S_6 a - P\frac{a\sqrt{3}}{4} = 0$; $S_6 = -\frac{\sqrt{3}}{4}P$ (compresiune)

$(\Sigma X_i = 0)$; $S_5 + P = 0$; $S_5 = -P$ (compresiune);

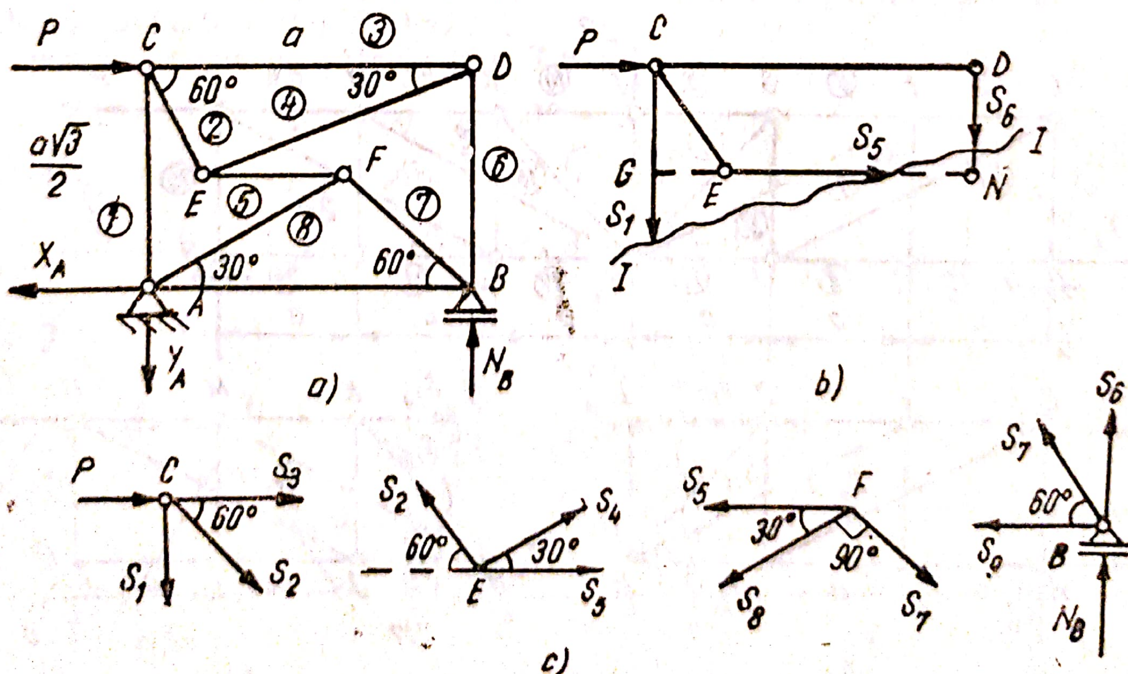


Fig. 7.B.2

Se aplică metoda izolării nodurilor (fig. 7.B.2, *c*) obținînd:

Nodul C

$(\Sigma Y_i = 0)$ $\quad S_2 \sin 60° + S_1 = 0;$ $\quad$ rezultă: $S_2 = -\frac{P}{2}$ (compresiune);

$(\Sigma X_i = 0);$ $\quad S_3 + S_2 \cos 60° + P = 0;$ $\quad S_3 = -\frac{3}{4}P$ (compresiune).

Nodul E

$(\Sigma Y_i = 0);$ $\quad S_4 \sin 30° + S_2 \sin 60° = 0;$ $\quad$ rezultă: $S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$ (tensiune);

$(\Sigma X_i = 0);$ $\quad S_4 \cos 30° + S_5 - S_2 \cos 60° = 0;$ $\quad S_5 = -P$ (compresiune)

Nodul F

$(\Sigma X_i = 0);$ $\quad S_5 \cos 30° + S_8 = 0;$ $\quad$ rezultă: $S_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$ (tensiune);

$(\Sigma Y_i = 0);$ $\quad S_5 \sin 30° - S_7 = 0;$ $\quad S_7 = -\frac{P}{2}$ (compresiune).

Nodul B

$(\Sigma X_i = 0);$ $\quad S_7 \cos 60° + S_9 = 0;$ rezultă: $S_9 = \frac{P}{4}$ (tensiune).

A doua ecuație din nodul *C* și ambele ecuații de echilibru ale ultimului nod *A* sînt ecuații de verificare.

7.B.3. Să se determine reacțiunile din legăturile exterioare *A* și *B*, barele de efort nul și eforturile în barele *10*, *15* și *17*, la grinda cu zăbrele din figura 7.B.3, *a*.

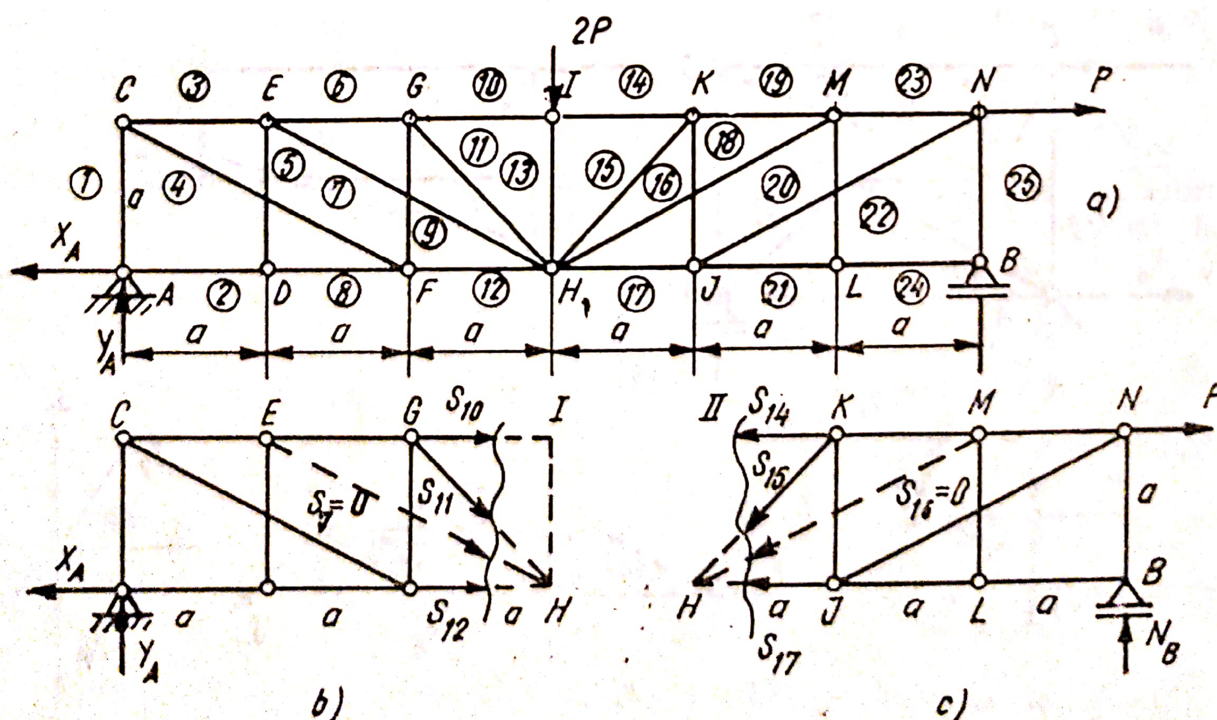


Fig. 7.B.3

R e z o l v a r e. Reacţiunile exterioare se determină aplicînd teorema solidificării:

$(\Sigma X_i = 0)$; $P - X_A = 0$; rezultă: $X_A = P$;

$(\Sigma M_A = 0)$; $N_B 6 - 2P \cdot 3 - P \cdot 1 = 0$; $N_B = \frac{7}{6} P$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_A + N_B - 2P = 0$; $Y_A = \frac{5}{6} P$.

Barele de efort nul se deduc din consideraţii de izolări de noduri. Izolînd succesiv nodurile D, E, L, M şi scriind ecuaţii de proiecţii pe normala barelor cu aceeaşi direcţie ce se întîlnesc în nod, rezultă:

$$S_5 = 0;\ S_7 = 0;\ S_{22} = 0 \text{ şi } S_{16} = 0.$$

Pentru calculul efortului în bara *10*, se duce secţiunea I—I (fig. 7.B.3, *a*) şi se scrie, pentru partea stîngă a secţiunii, ecuaţia:

$(\Sigma M_H = 0)$; $Y_A 3a + S_{10} \cdot a = 0$; rezultă: $S_{10} = -\frac{5}{2} P$ (compresiune).

Pentru calculul eforturilor în barele *15* şi *17* se duce secţiunea II—II (fig. 7.B.5, *c*) şi se scriu, pentru partea dreaptă, ecuaţiile:

$(\Sigma M_K = 0)$; $N_B 2a - S_{17} \cdot a = 0$; rezultă: $S_{17} = \frac{7}{3} P$ (tensiune);

$(\Sigma Y_i = 0)$; $N_B - S_{15} \cos 45° = 0$; $S_{15} = \frac{7}{2\sqrt{3}} P$ (tensiune).

7.B.4. Se consideră sistemul format din grinda cu zăbrele $ADEBF$ şi bara BC (fig. 7.B.4, *a*). Să se determine reacţiunile din articulaţiile A, B şi C, precum şi eforturile din barele DE, DF şi BE.

R e z o l v a r e. Se foloseşte metoda separării corpurilor, scriind ecuaţiile de echilibru (fig. 7.B.4, *b*):

— pentru grinda cu zăbrele (fig. 7.B.4, *b*):

$$(\Sigma X_i = 0);\quad X_B + P\sqrt{3} \cos 60° - X_A = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0);\quad Y_A + Y_B - P - P\sqrt{3} \sin 60° = 0;$$

$$(\Sigma M_B = 0);\quad Y_A 2a - Pa - P\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

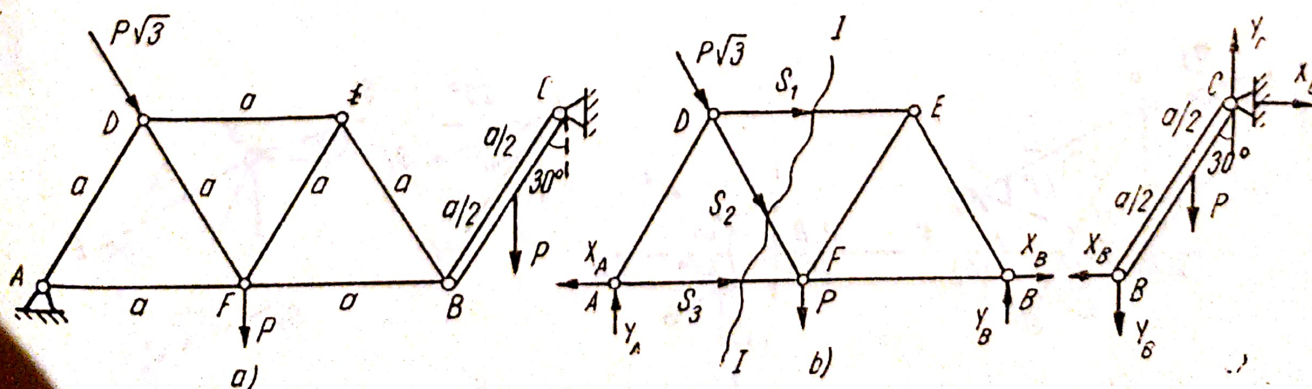


Fig. 7.B.4

— pentru bara BC (fig. 7.B.4, c):

$$(\Sigma X_i = 0);\quad X_C - X_B = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0);\quad Y_C - Y_B - P = 0;$$

$$(\Sigma M_C = 0);\quad P\frac{a}{2}\sin 30° + Y_B a \sin 30° - X_B a \cos 30° = 0$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, se obţine:

$$X_A = \frac{16}{4\sqrt{3}}P;\ Y_A = \frac{5}{4}P;\ X_B = \frac{7}{4\sqrt{3}}P;\ Y_B = \frac{5}{4}P;\ X_C = \frac{7}{4\sqrt{3}}P;\ Y_C = \frac{9}{4}P.$$

Pentru determinarea eforturilor în barele DE şi DF se aplică metoda secţiunilor, ducînd secţiunea I—I şi scriind, pentru tronsonul din stînga sa (fig. 7.B.4, b), ecuaţiile:

$(\Sigma M_F = 0)$; $S_1 a \sin 60° + Y_A a = 0$; rezultă: $S_1 = -\frac{5P}{2\sqrt{3}}$ (compresiune);

$(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_A - P\sqrt{3}\sin 60° - S_2 \sin 60° = 0$; $S_2 = -\frac{P}{2\sqrt{3}}$ (compresiune).

Pentru determinarea efortului în bara BE (adică S_4), se izolează nodul B (fig. 7.B.4, b) scriind ecuaţia pe verticală:

$(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_B + S_4 \sin 60° = 0$; rezultă: $S_4 = -\frac{5P}{2\sqrt{3}}$ (compresiune).

7.B.5. Bara verticală $AB = 3$m a unei macarale (fig. 7.B.5, a) este fixată cu doi tiranţi BE şi BD. Braţele macaralei formate din barele BC şi AC suportă în planul lor forţa P. În plan orizontal proiecţia AC este bisectoarea unghiului EAD. Să se determine eforturile în barele sistemului.

Rezolvare. Se foloseşte metoda izolării nodurilor. În nodul C forţele acţionează în plan; se vor scrie două ecuaţii de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0);\quad S_1 \cos 20° + S_2 \cos 60° = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0);\quad P + S_1 \sin 20° + S_2 \sin 60° = 0.$$

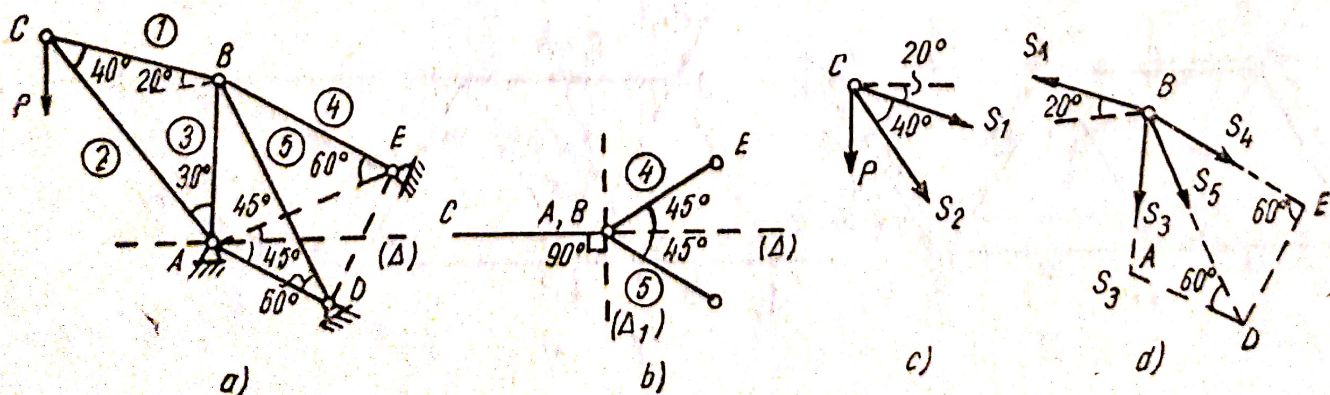


Fig. 7.B.5

unde:

$$\sin 20^\circ = 0{,}342;$$
$$\cos 20^\circ = 0{,}935.$$

Rezultă:

$$S_1 = 0{,}778P \text{ (tensiune)};$$
$$S_2 = -1{,}461P \text{ (compresiune)}$$

În nodul B eforturile au o configurație spațială; se vor scrie trei ecuații de echilibru:

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad S_5 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - S_4 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0;$

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad S_5 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ + S_4 \cos 60 \cdot \sin 45^\circ - S_1 \cos 20^\circ = 0;$

$(\Sigma Z_i = 0)$; $\quad S_3 + S_5 \sin 60^\circ + S_4 \sin 60^\circ - S_1 \sin 20^\circ = 0.$

Rezultă:

$$S_4 = S_5 = \frac{S_1 \cos 20^\circ}{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ} = 1{,}032P \text{ (tensiune)};$$

$$S_3 = S_1 \sin 20^\circ - 2S_4 \sin 60^\circ = -1{,}524P \text{ (compresiune)}.$$

Capitolul 8

STATICA FIRELOR

8.A. PREZENTARE TEORETICA

8.A.1. Generalități

Firul, unul din modelele mecanicii newtoniene, a fost definit la Capitolul 1 ca solidul cu o singură dimensiune (lungimea), inextensibil (lungimea invariabilă) și perfect flexibil.

Pe baza acestui model, se poate construi, pornind de la un sistem de bare articulate între ele, unele după altele, un alt model echivalent (fig. 8.A.1) în următoarele condiții:

a) n, numărul barelor, foarte mare, tinzînd spre infinit;
b) l, lungimea totală a barelor, constantă;
c) la limită, lungimea fiecărei bare tinde spre zero cînd n tinde spre infinit;
d) frecarea din fiecare articulație este nulă.

Cu aceste condiții modelele sînt echivalente deoarece:
— *inextensibilitatea* este asigurată de rigiditatea fiecărei bare în parte;
— forma curbă este asigurată de condițiile a, b și c;
— perfecta flexibilitate este asigurată de condiția d;
— numărul gradelor de libertate ale unui fir este ∞.

Folosind acest model și metoda izolării părților (barelor), se pot stabili cu ușurință condițiile vectoriale sau cele scalare de echilibru ale staticii firelor.

8.A.2. Problemele staticii firelor

Problema directă. Dîndu-se poziția de repaus a firului (curba de echilibru), să se găsească relații între forțele care acționează firul.

Exemplu clasic: un fir de greutate neglijabilă este înfășurat cu unghiul θ (în radiani) pe un disc circular fix și este acționat la capete de forțele $\overline{T}_1$ și $\overline{T}_2$. Dacă μ este coeficientul de frecare de alunecare dintre fir și disc, să se exprime condițiile ca firul să nu se deplaseze în nici unul din cele două sensuri posibile (fig. 8.A.2).

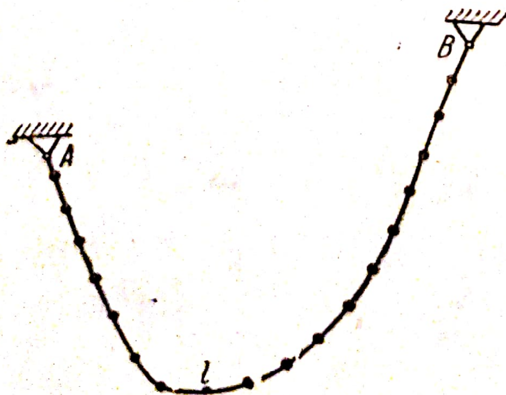


Fig. 8.A.1

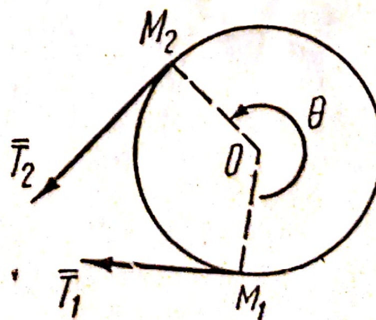


Fig. 8.A.2

Condițiile au fost stabilite de Euler și sînt exprimate prin:

$$e^{-\mu\theta} \leqslant \frac{T_2}{T_1} \leqslant e^{\mu\theta}.$$

Problema inversă. Dîndu-se forțele care acționează firul și condițiile la limită, să se stabilească poziția de repaus, adică curba de echilibru a firului.

Exemplu clasic. Un fir omogen cu lungimea $2l$, și greutatea p pe unitate de lungime de fir, este suspendat la capetele lui în două puncte fixe situate pe aceeași orizontală. Să se determine curba de echilibru a firului (fig. 8.A.3).

Ecuația curbei este:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

denumită lănțișor.

Se mai precizează următoarele:

— a este soluția ecuației transcendente:

$$a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = l;$$

— în aplicațiile tehnice apare și un alt aspect al problemei și anume, efortul într-un punct curent $M(x, y)$ este: $T = py$;

— condițiile la limită intervin la determinarea constantelor care apar la integrarea ecuațiilor diferențiale.

8.A.3. Ecuațiile vectoriale ale staticii firelor

Se notează cu: O, originea sistemului de referință, $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct curent M de coordonată curbilinie s în raport cu originea arcelor, A, $\bar{t}$ versorul tangentei în M la curba de echilibru, $\bar{p}(s)$ forța rezultantă exterioară acționînd în M pe unitatea de lungime a firului, $\bar{T}$ tensiunea în fir, efortul din M (fig. 8.A.4).

Ecuațiile de echilibru al forțelor date și de legătură sînt:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d\bar{r}}{ds} \times \bar{T} = \bar{t} \times \bar{T} = 0, \tag{8.1}$$

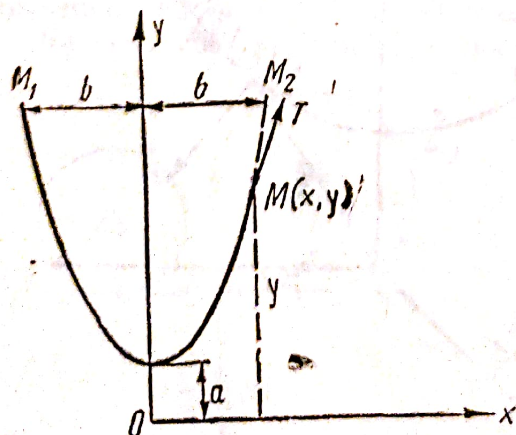


Fig. 8.A.3

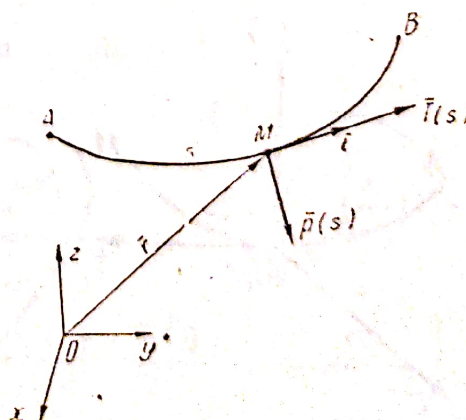


Fig. 8.A.4

prima, dedusă din ecuaţia de însumare, stabileşte variaţia lui $\bar{T}$, iar cea de a doua, consecinţă a ecuaţiei de momente, stabileşte faptul că, dacă firul este perfect flexibil, efortul $\bar{T}$ din fir este orientat după tangentă şi în sensul întinderii firului. În consecinţă, la rezolvarea problemelor, dacă $\bar{T}$ este orientat după tangenta la fir, nu mai este necesar să se scrie ecuaţia (ecuaţiile) de momente, urmînd să se folosească numai prima ecuaţie (8.1) care se proiectează pe axele sistemului de referinţă ales.

O consecinţă a ecuaţiei (8.1) este: forţa unitară $\bar{p}$ se găseşte în planul osculator din M al curbei de echilibru.

8.A.4. Ecuaţiile scalare ale staticii firelor

Se scriu în raport cu triedrul natural (Frenet) (fig. 8.A.5).

Notaţii: $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ versorii axelor triedrului,

$$\bar{p} = p_t\bar{t} + p_n\bar{n} + p_b\bar{b} \tag{8.2}$$

p_t, p_n, p_b, scalarii proiecţiilor forţei unitare $\bar{p}$ pe cele trei axe, $\frac{1}{R}$, curbura în M a curbei de echilibru. Din (8.1) şi (8.2) se obţin ecuaţiile scalare în raport cu triedrul natural:

$$\frac{dT}{ds} + p_t = 0; \quad \frac{T}{R} + p_n = 0; \quad p_b = 0,$$

O b s e r v a ţ i i

Din prima ecuaţie se deduce că variaţia tensiunii din fir este produsă de componenta tengenţială a forţei unitare şi este proporţională cu aceasta.

Din ecuaţia a doua rezultă că curbura liniei de echilibru a firului este proporţională şi de sens opus cu componenta normală a forţei unitare şi este invers proporţională cu tensiunea în fir;

Din ecuaţia a treia, rezultă încă o dată că forţa unitară se află în planul osculator din M al curbei.

Ecuaţiile scalare sînt folosite de preferinţă în cazul problemelor directe cînd se cunoaşte forma curbei de echilibru a firului, de exemplu în problema frecării firelor.

Ecuaţiile scalare ale staticii firelor în raport cu triedrul fix (fig. 8.A.6). Se notează cu: $Oxyz$ reperul cartezian şi cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ versorii axelor,

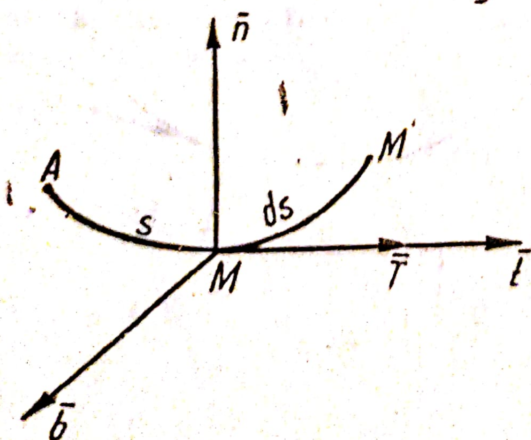


Fig. 8.A.5

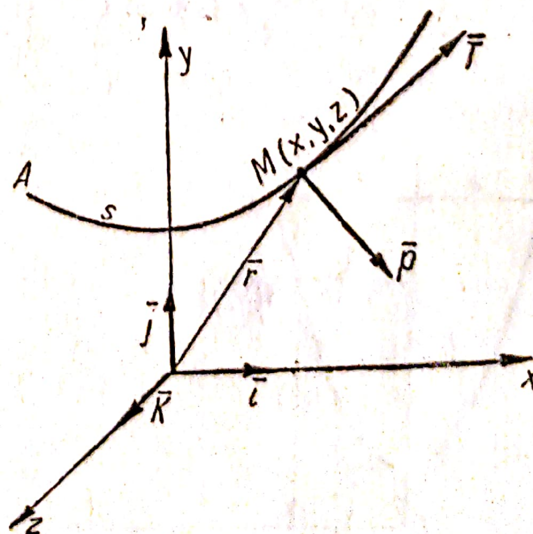


Fig. 8.A.6

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ vectorul de poziţie al punctului curent $M(x, y, z)$ avînd pe s coordonata curbilinie, $\bar{T}$ tensiunea din fir: $\bar{T} = T\bar{t} = T\frac{d\bar{r}}{ds}$, iar $\bar{p} = p_x\bar{i} + p_y\bar{j} + p_z\bar{k}$, forţa unitară.

Din ecuaţia (8.1) se deduc următorele ecuaţii scalare:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + p_x = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + p_y = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + p_z = 0.$$

8.B. APLICAŢII LA STATICA FIRELOR

8.B.1. Un cablu trecut peste doi tamburi ficşi (fig. 8.B.1) are la capete două sarcini P şi Q. Cunoscînd coeficienţii de frecare μ_1 şi μ_2 între cablu şi cei doi tamburi, se cere raportul sarcinilor P şi Q pentru echilibrare.

Rezolvare. Secţionînd cablul între cei doi tamburi şi considerînd tendinţa de mişcare spre P, rezultă:

$$P \leqslant Te^{\mu_1 \frac{3\pi}{2}}; \quad T \leqslant Qe^{\mu_2 \frac{3\pi}{2}}.$$

De aici rezultă:

$$P \leqslant Qe^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1 + \mu_2)}.$$

Avînd în vedere posibilitatea ca efectul lui Q să fie mai mare, tendinţa de mişcare este spre Q, deci:

$$Q \leqslant Pe^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1+\mu_2)}.$$

Pentru echilibru, trebuie deci să fie îndeplinită condiţia:

$$e^{-\frac{3\pi}{2}(\mu_1+\mu_2)} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant e^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1+\mu_2)},$$

8.B.2. Se dă troliul din figura 8.B.2, *a* acţionat la raza r de sarcina Q şi frînat cu ajutorul unui fir apăsat cu frecare pe periferia troliului prin intermediul barei $O_2A = l(O_2B = BC = CA)$.

Se cere valoarea forţei F necesară pentru echilibru.

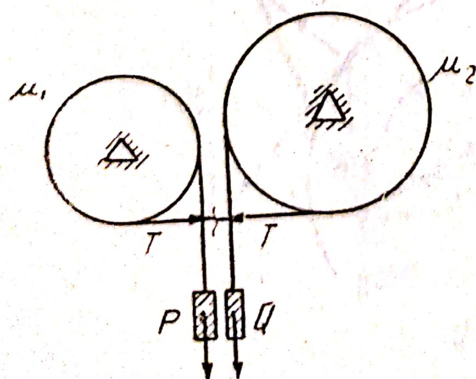


Fig. 8.B.1

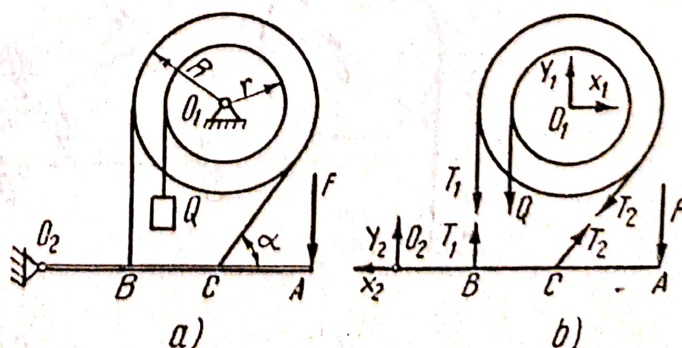


Fig. 8.B.2

R e z o l v a r e. Se separă corpurile din legături (fig. 8.B.2, *b*) și se introduc forțele de legătură. Pentru eliminarea forțelor de legătură din articulația O_1, pentru troliu se va scrie numai ecuația de moment în raport cu O_1 și relația de frecare:

$$(\Sigma M_{O_1} = 0)\,; \quad T_1 R + Qr - T_2 R = 0\,;$$

$$T_2 \leqslant T_1 e^{\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Pentru bara O_2B se va scrie numai ecuația de momente în raport cu punctul O_2, din aceleași considerații ca și la troliu:

$$(\Sigma M_{O_2} = 0)\,; \quad T_1 \frac{l}{3} + T_2 \sin\alpha \frac{2l}{3} - Fl = 0.$$

Rezolvînd sistemul obținut, rezultă:

$$F \geqslant \frac{Qr\left[1 + 2\sin\alpha\, e^{\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}\right]}{3R\left[e^{\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} - 1\right]}.$$

8.B.3. Se dă un fir cu greutatea p pe unitatea de lungime, trecut peste un tambur fix de rază R, ca în figura 8.B.3, *a*. Cunoscînd coeficientul de frecare de alunecare μ între fir și disc, să se calculeze lungimea l a porțiunii de fir care poate atîrna liber de pe disc fără a strica echilibrul.

R e z o l v a r e. În figura 8.B.3, *b* a fost izolat un element ds din fir, pentru care pot fi scrise următoarele ecuații de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0)\,; \; F + T\cos\frac{d\theta}{2} + p\,ds\cos\theta - (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} = 0\,;$$

$$(\Sigma Y_i = 0)\,; \; N - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} - p\,ds\sin\theta = 0\,;$$

$$F \leqslant \mu N.$$

Se obține prin rezolvarea sistemului

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu T = pR(\cos\theta + \mu\sin\theta).$$

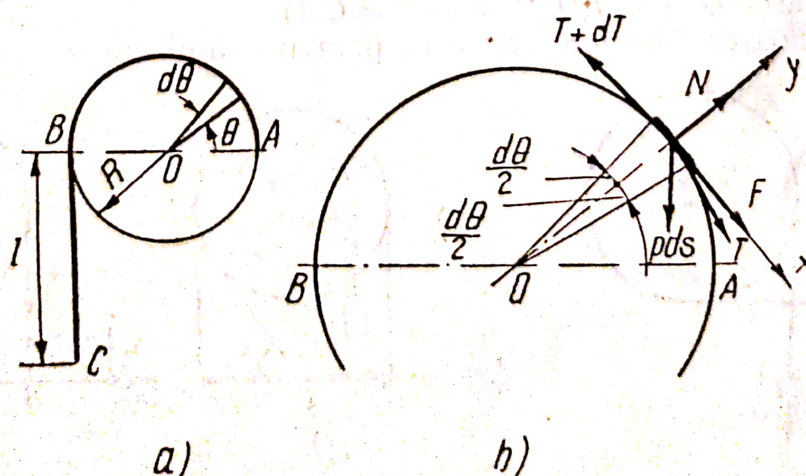


Fig. 8.B.3

Integrînd ecuaţia diferenţială de ordinul întîi cu membrul drept, se obţine:

$$T = Ce^{\mu\theta} - \frac{2\mu p R}{1+\mu^2}\cos\theta + \frac{pR(1-\mu^2)}{1+\mu^2}\sin\theta.$$

Punînd condiţiile în punctele A şi B:

$$\theta = 0; \qquad T = 0;$$

$$\theta = \pi; \qquad T = pl;$$

rezultă:

$$l \leqslant \frac{2\mu R(e^{\mu\pi}+1)}{1+\mu^2}.$$

Dacă se notează $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ se obţine:

$$l \leqslant R \operatorname{tg} 2\varphi(e^{\mu\pi}+1).$$

8.B.4. Se dă un fir cu greutatea neglijabilă solicitat de forţe concentrate, ca în figura 8.B.4, *a*. Folosind datele de pe figură, să se calculeze valorile tensiunilor în A şi B, înclinarea faţă de orizontală α, β, γ a fiecărei porţiuni şi lungimea firului.

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru ale întregului fir cuprind proiecţii pe orizontală, pe verticală şi momente faţă de punctul A.

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad -T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta - 4P = 0;$$

$$(\Sigma M_A = 0); \qquad -3Pa - P3a + T_2\sin\beta\frac{7a}{2} = 0.$$

Se mai poate scrie relaţia geometrică:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2.$$

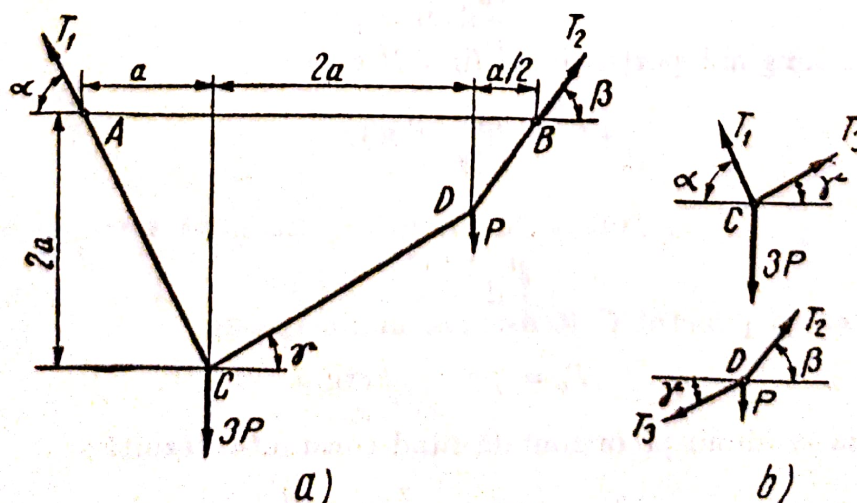


Fig. 8.B.4

Rezolvînd sistemul obţinut, rezultă:

$$T_1 = \frac{8P\sqrt{5}}{7}; \quad T_2 = \frac{4P\sqrt{13}}{7}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}.$$

Se izolează nodurile C şi D (fig. 8.B.4, b, c) şi se scriu ecuaţiile de echilibru pe orizontală şi pe verticală a celor două sisteme de forţe concurente. Rezultă:

$$T_3 = \frac{P\sqrt{89}}{7}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{5}{8}.$$

Lungimea firului rezultă dintr-o relaţie matematică:

$$L = \frac{a}{\cos \alpha} + \frac{2a}{\cos \gamma} + \frac{a}{2 \cos \beta} = \frac{a}{4}(4\sqrt{5} + \sqrt{89} + \sqrt{13}) \approx 5{,}5a.$$

8.B.5. Un cablu omogen de lungime $2l$, avînd greutatea pe unitatea de lungime p, este suspendat cu cele două capete pe aceeaşi orizontală (fig. 8.B.5). Unghiul făcut de tangenta la cablu cu orizontala în punctele de suspendare este α.

Să se calculeze tensiunile maximă T_B, minimă T_0 şi săgeata f a cablului.

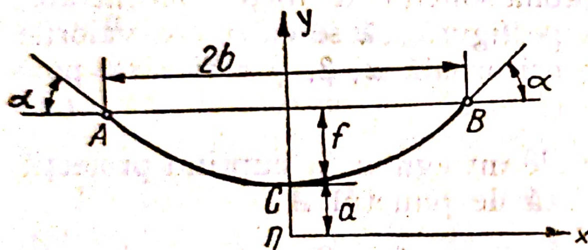


Fig. 8.B.5

R e z o l v a r e. Din ecuaţia curbei funiculare

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

se poate scrie expresia tangentei la fir în punctul B:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_B.$$

Deci:

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Expresia lungimii porţiunii de fir CB este

$$l = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Rezultă:

$$a = l \operatorname{ctg} \alpha.$$

Tensiunea în punctul C (tensiunea minimă) este

$$T_0 = pa = pl \operatorname{ctg} \alpha.$$

Proiecţia tensiunii pe orizontală fiind constantă, rezultă:

$$T_{max} = T_B = \frac{T_0}{\cos \alpha} = \frac{pl}{\sin \alpha}.$$

Se mai poate scrie:

$$T_B = p y_B = p(a + f).$$

De aici,

$$f = \frac{T_B - pa}{p} = \frac{l(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

8.B.6. Un cablu omogen de lungime $2l$ este suspendat cu cele două capete pe aceeași orizontală, astfel încît tensiunea în fiecare din punctele de suspendare să fie egală cu greutatea întregului cablu. Să se calculeze $2b$, f și α (fig. 8.B.6).

Rezolvare. Notînd p greutatea uniform distribuită pe unitatea de lungime a firului, rezultă:

$$T_A = T_B = 2pl.$$

Scriind ecuația de echilibru a firului pe verticală

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\alpha - 2pl = 0,$$

rezultă:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

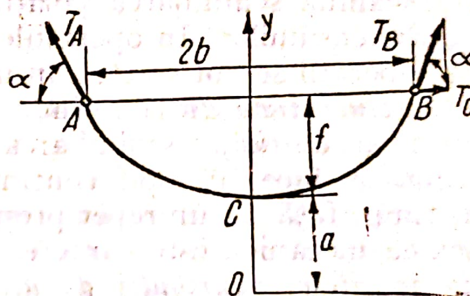


Fig. 8.B.6

Tensiunea minimă este:

$$T_0 = T_B \cos\alpha = pl\sqrt{3}.$$

Se poate scrie

$$T_B = p y_B; \qquad T_0 = pa.$$

De aici,

$$f = y_B - a = \frac{T_B - T_0}{p} = l(2 - \sqrt{3}).$$

Se introduc coordonatele punctului B în ecuația lănțișorului

$$y_B = a \operatorname{ch}\frac{b}{a}.$$

De aici, rezultă:

$$\operatorname{ch}\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Se scrie expresia lungimii porțiunii CB a curbei:

$$l_{CB} = l = a \operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

De aici,

$$\operatorname{sh}\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Deci:

$$AB = 2b = 2l\sqrt{3}\ln\sqrt{3}.$$

Capitolul 9

CINEMATICA PUNCTULUI

9.A. PREZENTARE TEORETICĂ

9.A.1. Generalităţi

În general, problemele de mecanică trebuie privite sub un triplu aspect: geometric, cinematic şi fizic, aşa cum apar ele în dinamică.

Aspectul geometric se referă la poziţia în raport cu un reper a corpului, la forma şi dimensiunile lui, care pot fi variabile sau invariabile. *Deplasare* înseamnă schimbarea poziţiei, *deformare* înseamnă schimbarea formei sau a dimensiunilor. În operaţiile geometrice nu intervine timpul, de aceea aceste operaţii se pot efectua în nenumărate feluri.

Aspectul cinematic cuprinde pe lîngă aspectul geometric şi noţiunea şi mărimea de *timp*. Schimbarea poziţiei, formei şi dimensiunilor unui corp în timp se face în mod continuu şi *univoc*. Astfel, *deplasarea* în spaţiu şi în timp, faţă de un reper presupus fix, a unui corp se numeşte *mişcare*. Mişcarea mecanică este caracterizată în cinematică prin: *traiectorii*, *distribuţii de viteze*, *distribuţii de acceleraţii*, *condiţii iniţiale* etc.

Aspectul fizic se reflectă în mecanică prin însuşirile de material ale corpurilor, dar mai ales prin *interacţiunile* lor exprimate prin distribuţiile de mase şi de forţe.

În problemele de dinamică mai apar şi calcule privind *momentele statice* şi *momentele de inerţie* care sînt asociate distribuţiei masei într-un corp.

9.A.2. Caracteristicile cinematice ale mişcării punctului

Traiectoria este mulţimea continuă a poziţiilor prin care trece punctul mobil într-un interval de timp.

Ecuaţia ei vectorială faţă de reperul fix O (fig. 9.A.1.) este:

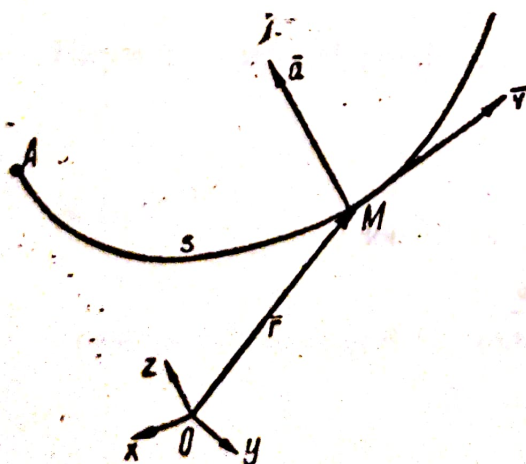


Fig. 9.A.1

$$\bar{r} = \bar{r}(t)^{1} \qquad (9.1)$$

Traiectoria punctului mobil M mai este şi hodograful vectorului variabil $\bar{r}$ cu originea în O.

Dacă parametrul scalar t reprezintă timpul, ecuaţia (9.1) exprimă şi legea mişcării. Dacă se notează cu s coordonata curbilinie a punctului M faţă de A (originea arcelor), $s = s(t)$ este *ecuaţia orară a mişcării*.

Viteza punctului mobil M este o mărime vectorială — tangentă în M

[1] $\bar{r}(t)$ funcţie uniformă, vectorială, continuă, cel puţin de două ori derivabilă.

la traiectorie — şi care caracterizează direcţia, sensul şi modul de mişcare în timp a mobilului. Expresia matematică a vitezei în momentul t este:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}^{1}.$$

O b s e r v a ţ i i

Dacă $\bar{r} = \bar{r}(s)$ este ecuaţia curbei pe care se mişcă M, ţinînd seamă de ecuaţia orară se poate scrie:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{\tau}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\bar{\tau},$$

unde $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la curbă, dirijat în sensul creşterii arcelor, iar $\dot{s}$ reprezintă în valoare (pozitivă sau negativă) viteza în momentul t a mobilului. Dacă s creşte $\dot{s} > 0$, $\bar{v}$ are acelaşi sens cu $\bar{\tau}$ (mişcare directă). Dacă s descreşte $\dot{s} < 0$, $\bar{v}$ este în sensul opus lui $\bar{\tau}$ (mişcare retrogradă). Notînd $\dot{s} = v$, expresia vectorului viteză devine:

$$\bar{v} = v\bar{\tau}, \tag{9.2}$$

unde v este valoarea scalară, algebrică, a vitezei în raport cu $\bar{\tau}$.

Întotdeauna trebuie considerată viteza cu toate caracteristicile ei vectoriale. De pildă, cînd viteza este constantă, $\bar{v} = \bar{c}$, adică nu variază nici direcţia, nici sensul şi nici mărimea ei, numai atunci se poate spune că *mişcarea mobilului este uniformă*. Numai o asemenea mişcare nu are acceleraţie.

Acceleraţia unui mobil se defineşte ca viteza de variaţie a vectorului viteză şi are ca expresie matematică:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}.$$

O b s e r v a ţ i e.

Numai dacă mobilul are o mişcare uniformă, cu viteza constantă în direcţie, sens şi mărime ($\bar{v} = \bar{c}$), mobilul nu are acceleraţie:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{c}} = 0.$$

Oricum altfel ar fi mişcarea, mobilul are acceleraţie.

9.A.3. Componentele vitezei şi acceleraţiei în raport cu triedrul natural

Viteza are o singură componentă în raport cu triedrul $M\tau nb$ (fig. 9.A.2), şi anume după tangentă: $\bar{v} = v\bar{\tau}$.

Acceleraţia se deduce din ecuaţia precedentă prin derivare:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n}, \tag{9.3}$$

unde $\frac{1}{R}$ este curbura în M a traiectoriei, iar $\bar{n}$ versorul normalei principale în M la traiectorie.

---

[1] Notaţie folosită în mecanică exclusiv pentru derivata în raport cu timpul a unei mărimi.

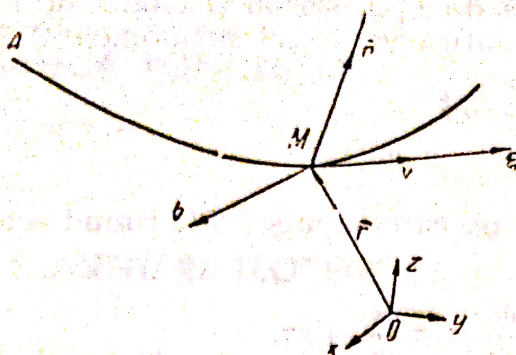


Fig. 9.A.2

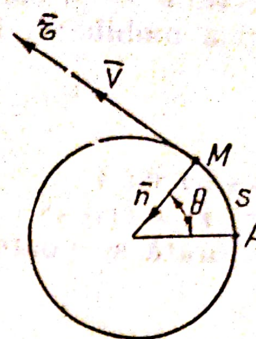


Fig. 9.A.3

O b s e r v a ţ i i

Acceleraţia are două componente (sau două proiecţii ortogonale): una tangenţială $\dot{v}\bar{\tau}$ şi cealaltă normală $\frac{v^2}{R}\bar{n}$.

Acceleraţia în orice punct M a mobilului se găseşte în planul osculator din M al traiectoriei şi este orientată înspre concavitatea acesteia.

Acceleraţia tangenţială măsoară variaţia în timp a valorii v a vitezei, iar *acceleraţia normală* este datorită variaţiei direcţiei vitezei şi exprimă această variaţie. Modulul acceleraţiei este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \tag{9.4}$$

Pentru ca acceleraţia să fie nulă, este necesar şi suficient ca: $\dot{v} = 0$, adică

$$v = c \quad \text{şi} \quad \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R} = 0,$$

adică $R = \infty$, mişcarea să fie cu viteză constantă pe o linie dreaptă.

În tehnica maşinilor sînt mişcări pe traiectorii de curbură constantă. În afară de *dreaptă*, traiectoriile cu curbura constantă sînt cercul şi elicea circulară dreaptă. Mişcările cu $|\bar{v}| =$ constant pe aceste traiectorii curbilinii au acceleraţii constante în modul $|\bar{a}| = c$.

De obicei, aceste mişcări sînt impropriu denumite ca uniforme. Ele ar putea fi considerate ca mişcări *pseudo-uniforme*.

Mişcarea cu acceleraţie constantă în direcţie, sens şi modul, $\bar{a} = \bar{a}_0$, se întîlneşte în dinamică la mişcarea pe parabolă a punctului material liber acţionat de o forţă constantă în direcţie, sens şi modul, cum ar fi căderea în vid a punctului material la suprafaţa Pămîntului.

9.A.4. Mişcarea circulară

Aceasta este un caz particular al mişcării oarecare. Se poate folosi triedrul natural cu toate rezultatele obţinute (fig. 9.A.3).

Viteza liniară se obţine prin derivare din $s = r\theta$, adică $v = \dot{s} = r\dot{\theta}$, unde

$$\dot{\theta} = \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

este viteza unghiulară.

Accelerația unghiulară:

$$\dot{\omega} = \theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Expresia accelerației liniare:

$$\bar{a} = r\dot{\omega}\bar{\tau} + r\omega^2\bar{n}, \tag{9.5}$$

unde $a_\tau = r\dot{\omega}$ și $a_n = r\omega^2$ sînt valorile accelerațiilor tangențiale și normale.

Modulul accelerației liniare este:

$$|\bar{a}| = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \tag{9.6}$$

Observații.

În general, $\omega = \omega(t)$ reprezintă legea mișcării circulare. Mișcarea circulară cu viteză unghiulară constantă $\omega = \omega_0$ și cu accelerația unghiulară nulă ($\dot{\omega} = 0$) este una din mișcările pseudouniforme. Ecuația orară a acestei mișcări este:

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad \text{deci:} \quad \theta = \omega_0 t + \theta_0,$$

iar accelerația liniară nu are componentă tangențială, ci numai normală: $r\omega_0^2$.

Mișcarea circulară cu *accelerație unghiulară constantă* este impropriu denumită uniform variată. Ea este caracterizată prin ecuația: $\dot{\omega} = c$.

Se integrează de două ori:

$$\dot{\theta} = \omega = ct + C_1 \quad \text{și} \quad \theta = \frac{c}{2}t^2 + C_1 t + C_2,$$

iar cele două constante de integrare C_1 și C_2 se determină cu ajutorul condițiilor inițiale: la $t = 0$, $\omega = \omega_0$ și $\theta = \theta_0$. În consecință:

$$\omega = ct + \omega_0 \quad \text{și} \quad \theta = \frac{c}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0.$$

Se calculează modulul accelerației liniare:

$$|\bar{a}| = r\sqrt{c^2 + (ct + \omega_0)^4}$$

și se constată că $\bar{a}$ este o funcție destul de complicată de timp.

Dacă $c\omega_0 > 0$ mișcarea este propriu-zis accelerată, dacă $c\omega_0 < 0$ mișcarea este întîrziată pînă ce se anulează viteza unghiulară ω, în intervalul de timp:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{c}.$$

9.A.5. Componentele vitezei și accelerației în raport cu triedrul fix

Triedrul $Oxyz$ fix este triortogonal drept (fig. 9.A.4). Ecuațiile parametrice ale unei curbe sînt:

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s),$$

s fiind abscisa curbilinie, în raport cu originea arcelor A, a punctului curent M.

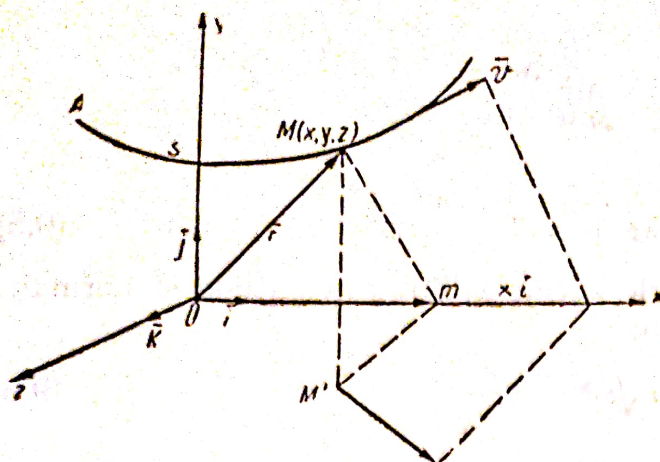


Fig. 9.A.4

Dacă $s = s(t)$, unde t este timpul, este ecuaţia orară a mişcării punctului M, ecuaţiile:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

reprezintă traiectoria şi legea mişcării punctului M.

Expresia complexă a vitezei este:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k},$$

unde $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, sînt valorile scalare ale proiecţiilor (componentelor) vitezei pe cele trei axe ale triedrului fix.

Modulul vitezei este:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{9.7}$$

Expresia complexă a acceleraţiei este:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k},$$

unde $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ sînt scalarii proiecţiilor (componentelor) acceleraţiei pe axele triedrului fix.

Modulul acceleraţiei este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{9.8}$$

O b s e r v a ţ i i

O consecinţă imediată a definiţiilor este *teorema:*

Proiecţia pe o axă fixă a vitezei sau a acceleraţiei unui punct mobil este egală cu viteza, respectiv cu acceleraţia punctului pe axa considerată[1].

O aplicaţie clasică a celor prezentate pînă aici se referă la mişcarea pe o elice circulară dreaptă.

Ecuaţiile parametrice ale elicei circulare drepte sînt:

$$x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta,\quad z = (r\,\mathrm{tg}\,\alpha)\theta,$$

unde $M(x, y, z)$ este punctul curent pe elice, r, raza cilindrului circular drept, θ, în radiani, este unghiul dintre OA şi Om, m fiind proiecţia ortogonală a punctului M de pe elice pe planul cercului de bază (fig. 9.A.5), α înclinarea elicei cu pasul: $p = 2\pi r\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

---

[1] Forma enunţului are la bază convenţia stabilită la Cap. 2.A. Proiecţia unui vector pe o axă este un vector. Proiecţiile ortogonale ale unui vector pe axele unui triedru tridreptunghic sînt egale cu componentele vectorului după cele trei direcţii ale axelor.



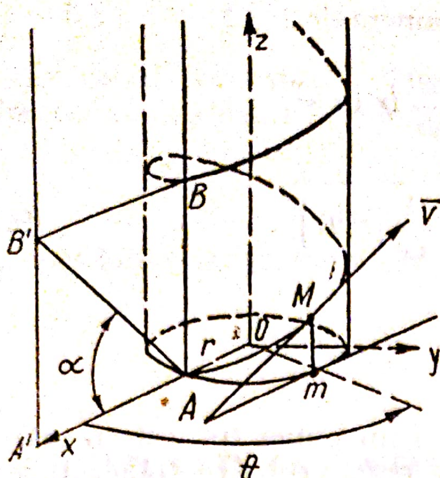


Fig. 9.A.5

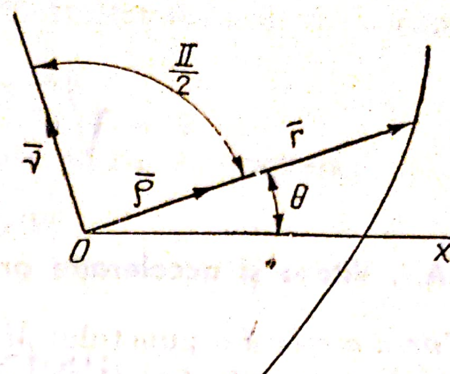


Fig. 9.A.6

Dacă $\theta = \theta(t)$ reprezintă legea mişcării circulare a proiecţiei m, $\dot{\theta} = \omega$ viteza unghiulară şi $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ acceleraţia unghiulară, se obţin următoarele relaţii :

$$v = \frac{r\omega}{\cos\alpha}; \quad a_\tau = \frac{r\dot{\omega}}{\cos\alpha};$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{r^2\omega^2}{R\cos^2\alpha}; \quad |\bar{a}| = r\sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{\cos^2\alpha} + \omega^4}; \quad R = \frac{r}{\cos^2\alpha},$$

unde R este raza de curbură a elicei circulare drepte.

9.A.6. Componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonate polare (plan)

Sistemul de referinţă se compune din polul O (fig. 9.A.6), semiaxa polară Ox, raza polară r, putînd primi valori între 0 şi $+\infty$, şi $\measuredangle\,\theta$, măsurat de la axa polară în sens direct (trigonometric) sau în sens contrar, putînd primi valori între 0 şi $+\infty$, respectiv între 0 şi $-\infty$.

Ecuaţia curbei se poate prezenta sub una din formele:

$$f(r, \theta) = 0 \text{ sau } r = r(\theta), \quad \theta = \theta(r).$$

Pentru a cunoaşte mişcarea trebuie dată şi legea de variaţie în timp a unei coordonate r sau θ.

Pentru exprimarea sub forma vectorială, se introduc şi versorii : $\bar{\rho}$ — dirijat după raza polară ; $\bar{\nu}$ — dirijat după perpendiculara, în sens trigonometric, în O, pe raza polară.

Se stabilesc următoarele relaţii :

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\bar{\nu} \text{ şi } \dot{\bar{\nu}} = -\dot{\theta}\bar{\rho}.$$

Pornind de la $\bar{r} = r\bar{\rho}$ se obţin componentele vitezei :

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{\nu}, \text{ adică}: v_\rho = \dot{r};\ v_\nu = r\dot{\theta} \text{ şi } |\bar{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \quad (9.9)$$

La fel, pentru *accelerație* se găsesc componentele:

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \quad a_\nu = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \text{ și}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right]^2}. \tag{9.10}$$

9.A.7. Viteza și accelerația areolară

Viteza areolară a punctului M, în raport cu un punct fix, este o mărime vectorială care caracterizează viteza cu care raza vectoare OM generează suprafața conică cu vîrful în O, avînd ca directoare traiectoria punctului M (fig. 9.A.7) și care are expresia:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v}). \tag{9.11}$$

Observații

Dacă traiectoria este plană și polul O se află în planul ei, $\bar{\Omega}$ este un vector de direcție invariabilă, perpendiculară pe plan. În acest caz valoarea vitezei areolare în coordonate carteziene este dată de expresia:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

iar în coordonate polare este:

$$\Omega = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

Accelerația areolară este viteza de variație a vectorului viteză areolară a punctului M (fig. 9.A.8) și are expresia:

$$\dot{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{a}). \tag{9.12}$$

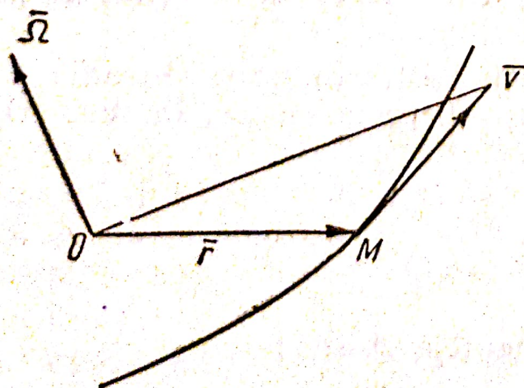


Fig. 9.A.7

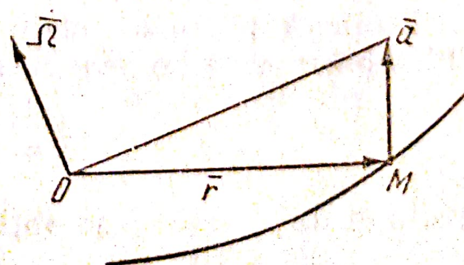


Fig. 9.A.8

Observații

În cazul traiectoriei plane și cu polul O în plan, $\dot{\overline{\Omega}}$ este un vector cu direcția constantă, iar valoarea accelerației areolare este dată de expresia:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2}(x\ddot{y} - \ddot{x}y)$$

în coordonate carteziene, iar în coordonate polare de expresia:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}).$$

9.B. APLICAȚII LA CINEMATICA PUNCTULUI

9.B.1. Un punct se mișcă pe dreapta $OABC$ pornind din O fără viteză inițială (fig. 9.B.1, *a*). Pe porțiunea OA mișcarea este uniform accelerată atingîndu-se viteza v_1 în timpul t_1 în punctul A, pe porțiunea AB mișcarea este uniformă, iar pe porțiunea BC, parcursă în timpul t_3, mișcarea este uniform întîrziată. Mobilul se oprește în C. Cunoscînd distanța $OC = d$, să se studieze mișcarea mobilului și să se reprezinte diagramele accelerației, vitezei și spațiului.

Rezolvare. Mișcarea este rectilinie, în lungul axei Ax. Pe prima porțiune:

$$\ddot{x} = a_1 \text{ și prin integrare } \dot{x} = a_1 t,$$

$$x = \frac{a_1 t^2}{2}$$

iar

$$(\dot{x})_A = v_1 = a_1 t_1, \text{ deci } \ddot{x} = a_1 = \frac{v_1}{t_1} \text{ și } d_1 = \frac{v_1 t_1}{2}.$$

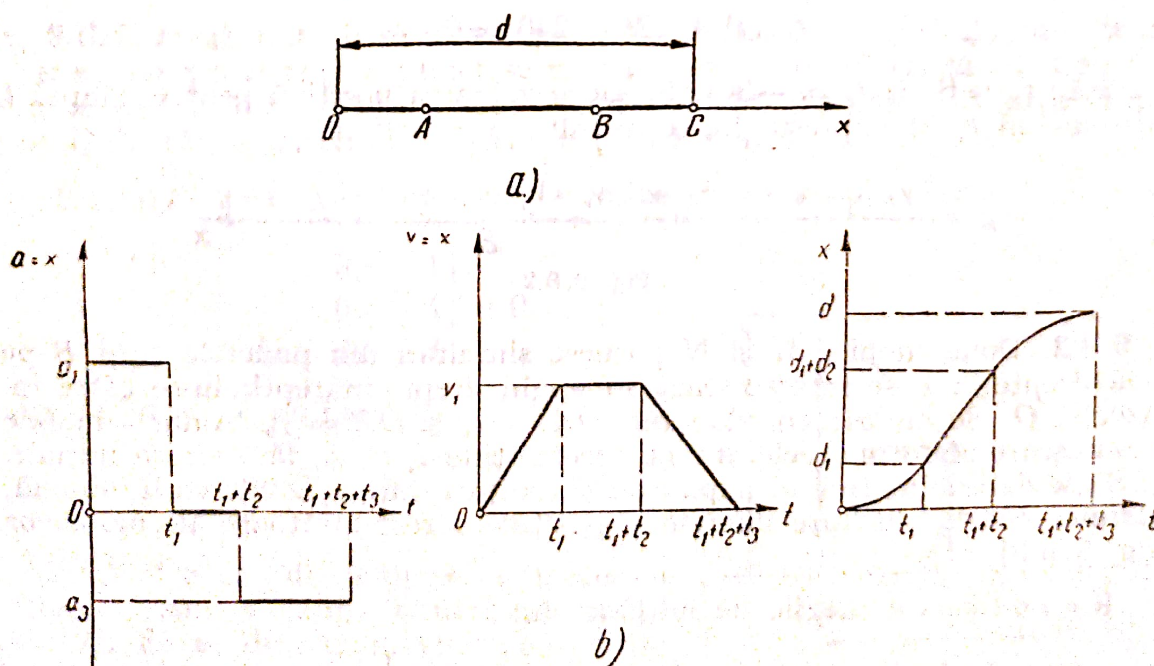


Fig. 9.B.1

Pe porţiunea AB; $\dot{x} = v_1$, $\ddot{x} = 0$, $d_2 = v_1 t_2$.
Pe porţiunea BC; $\ddot{x} = -a_3$, $\dot{x} = v_1 - a_3[t - (t_1 + t_2)]$.

$$x = -\frac{a_3}{2}[t - (t_1 + t_2)]^2 + v_1[t - (t_1 + t_2)] + \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2.$$

În punctul C:

$$t = t_1 + t_2 + t_3; \quad x = d, \quad \dot{x} = 0,$$

de unde:

$$a_3 = \frac{v_1}{t_3}; \quad t_2 = \frac{d}{v_1} - \frac{t_1 + t_3}{2}.$$

Diagramele mişcării sînt date în figura 9.B.1, *b*.

9.B.2. Două mobile se mişcă în linie dreaptă unul spre celălalt. Primul pleacă din punctul A avînd o mişcare uniformă cu viteza $v_1 = 12$ m/s; al doilea pleacă din B după $t_1 = 5\,s$ de la plecarea primului şi are o mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială $v_0 = 10$ m/s şi acceleraţia $a = 2$ m/s². Cunoscînd distanţa $AB = d = 300$ m, să se determine locul şi momentul întîlnirii mobilelor (fig. 9.B.2).

R e z o l v a r e. Legile de mişcare ale mobilelor sînt:

$$x = v_1(t + t_1); \quad (t \geq t_1).,$$

$$x = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d; \quad (t \geq 0).$$

Întîlnirea are loc cînd:

$$v_1(t + t_1) = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d,$$

adică:

$$t^2 + 22t - 240 = 0.$$

Rezultă: $t_1 = 8s$ şi $t_2 = -30s$. Se alege valoarea pozitivă pentru timpul t. Introducînd t_1 în expresia lui x, rezultă $x = 156$ m.

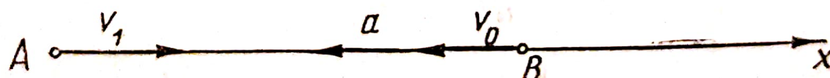


Fig. 9.B.2

9.B.3. Două mobile M şi N pornesc simultan din punctele A şi B pe două drepte care se intersectează în unghi drept, îndreptîndu-se către intersecţia O. Se cunosc coordonatele $OA = x_0$ şi $OB = y_0$. Ambele mobile au o mişcare uniform accelerată, cu acceleraţiile a_1 şi a_2, fără viteze iniţiale.

Să se determine timpul după care distanţa s dintre mobile va fi minimă, mărimea acestei distanţe minime şi poziţiile corespunzătoare ale mobilelor (fig. 9.B.3).

R e z o l v a r e. Legile de mişcare sînt:

$$x = x_0 - \frac{1}{2}a_1 t^2, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}a_2 t^2.$$

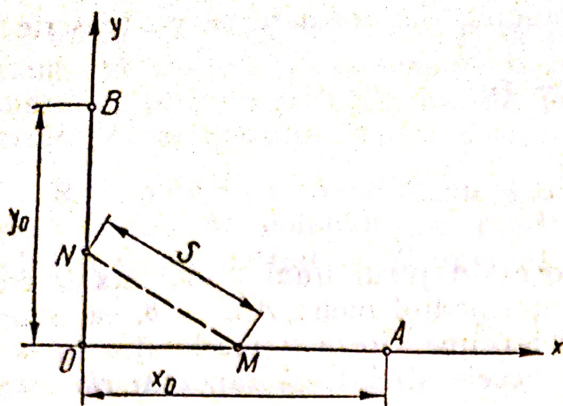


Fig. 9.B.3

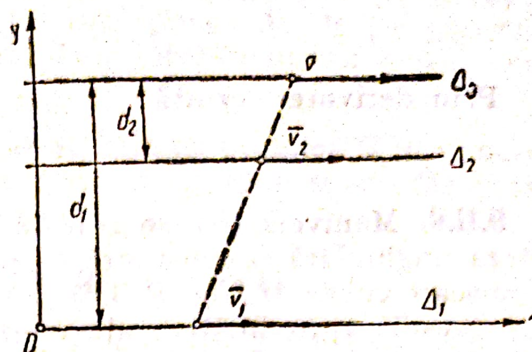


Fig. 9.B.4

Distanța s:

$$s^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)t^4 - (a_1x_0 + a_2y_0)t^2 + x_0^2 + y_0^2$$

va fi minimă pentru $\frac{d(s^2)}{dt} = 0$, adică

$$t = \sqrt{\frac{2(a_1x_0 + a_2y_0)}{a_1^2 + a_2^2}},$$

pozițiile mobilelor fiind:

$$x = \frac{a_2(a_2x_0 - a_1y_0)}{a_1^2 + a_2^2}; \quad y = \frac{a_1(a_1y_0 - a_2x_0)}{a_1^2 + a_2^2},$$

iar

$$s = \frac{|a_1y_0 - a_2x_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

iv_1 **9.B.4.** Două puncte se mișcă pe dreptele paralele Δ_1 și Δ_2 cu vitezele v_1 și v_2, iar un al treilea punct se mișcă pe o a treia paralelă Δ_3. Cele trei puncte sînt mereu coliniare. Cunoscînd raportul distanțelor dintre drepte $\lambda = d_2/d_1$, să se determine viteza v (fig. 9.B.4).

R e z o l v a r e. Din condiția de colinearitate a punctelor:

$$\begin{vmatrix} x & d_1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & d_1 - d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

prin derivare, se obține:

$$v = \frac{v_2 - \lambda v_1}{1 - \lambda}.$$

9.B.5. Un om de înălțime h trece cu viteza v_1 sub o lampă situată la înălțimea H. Să se determine viteza v a extremității umbrei omului pe pămînt (fig. 9.B.5).

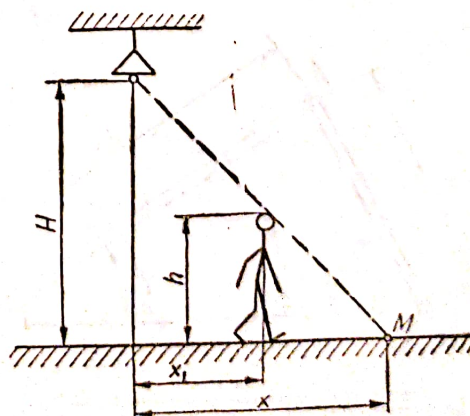


Fig. 9.B.5

R e z o l v a r e. Din asemănarea triunghiurilor formate se poate scrie:

$$x = \frac{H}{H-h}x_1.$$

Prin derivare, rezultă:

$$v = \frac{H}{H-h}v_1.$$

9.B.6. Manivela OA se rotește uniform în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară ω constantă și, prin intermediul bielei $AM = b$, ea pune în mișcare culisa M (fig. 9.B.6). Să se determine viteza și accelerația culisei și expresiile aproximative ale vitezei și accelerației dacă raportul r/b este mic.

R e z o l v a r e. Exprimînd abscisa lui M și aplicînd teorema sinusurilor ($\theta = \omega t$), rezultă:

$$x = r\cos\omega t + b\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t},$$

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega\sin 2\omega t}{2b\sqrt{1-\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t}}.$$

Dacă raportul este mic, se poate dezvolta în serie:

$$x = r\cos\omega t + \frac{r^2}{4b}\cos 2\omega t + b - \frac{r^2}{4b},$$

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega}{2b}\sin 2\omega t,$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t - \frac{r^2\omega^2}{b}\cos 2\omega t.$$

9.B.7. Diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii are forma sfertului de elipsă din figura 9.B.7. Să se determine drumul x străbătut de mobil pînă la oprire.

R e z o l v a r e. Drumul reprezintă aria de sub curba vitezei, deci:

$$x = \int_0^{t_1} v\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}v_0 t_1.$$

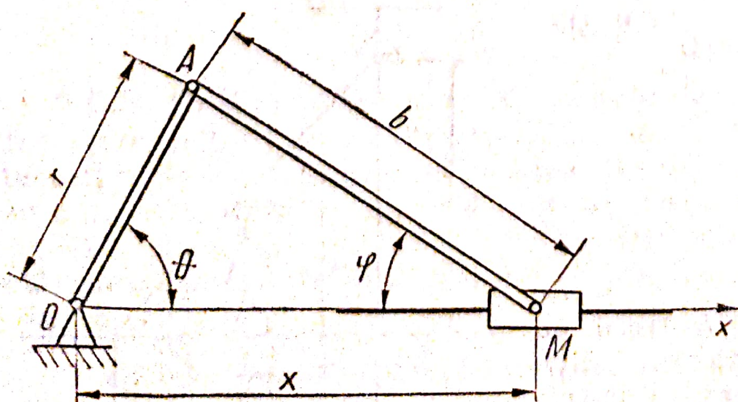


Fig. 9.B.6

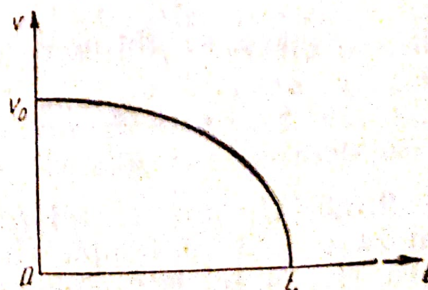


Fig. 9.B.7

9.B.8. Un disc de rază R se rostogolește fără alunecare pe dreapta tangentă Ox. Să se determine traiectoria unui punct M de pe periferia discului, precum și legile lui de mișcare, dacă viteza constantă v_0 a centrului C al discului este cunoscută.

R e z o l v a r e. Alegînd un sistem de referință cu originea O în punctul unde inițial M coincide cu punctul de contact cu solul și axa Ox paralelă cu v_0, și notînd cu θ unghiul de rotire:

$$x = R(\theta - \sin\theta)\,; \quad y = R(1 - \cos\theta)$$

sînt ecuațiile parametrice ale unei cicloide. Din relații geometrice rezultă:

$$\theta = \frac{v_0 t}{R}\,; \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}\cdot$$

și deci: $x = v_0 t - R\sin\dfrac{v_0 t}{R}$; $y = R\left(1 - \cos\dfrac{v_0 t}{R}\right)\cdot$

9.B.9. Să se arate că orice mișcare în care avem îndeplinită condiția

$$v^2 = As + B,$$

unde s este arcul de curbă parcurs de mobil, iar v viteza lui, este o mișcare uniform variată.

R e z o l v a r e. Prin derivare

$$2v\dot{v} = A\dot{s},$$

dar

$$\dot{s} = v.$$

Deci, $a_\tau = \dot{v} = \dfrac{A}{2}$ = constant și mișcarea este uniform variată.

9.B.10. Un cerc de rază r se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unui punct O situat pe circumferința lui (fig. 9.B.10). Să se studieze mișcarea punctului M de intersecție a cercului cu dreapta Ox.

R e z o l v a r e. Abscisa punctului M este:

$$x = 2r\cos\theta = 2r\cos\omega t,$$

de unde, prin derivare, rezultă:

$$\dot{x} = -2r\omega\sin\omega t,$$

$$\ddot{x} = -2r\omega^2\cos\omega t.$$

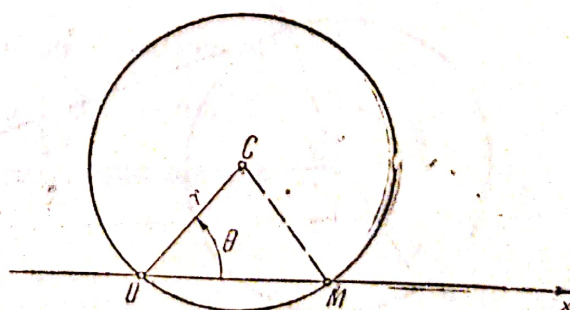


Fig. 9.B.10

9.B.11. Cunoscînd diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii (fig. 9.B.11, *a*) să se traseze diagramele drumului parcurs de mobil și a accelerației sale.

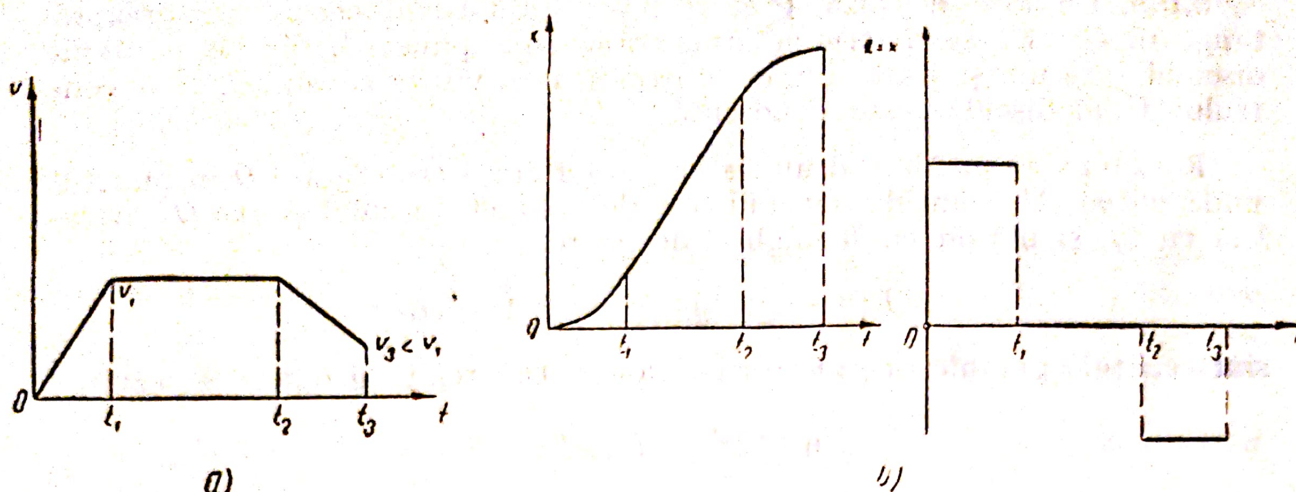


Fig. 9.B.11

Rezolvare. Legea drumului şi acceleraţia rezultă din relaţiile de definiţie:

$$x = \int_0^t v\mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Se obţin astfel cele trei porţiuni ale diagramei:

$$x = \frac{v_1}{2t_1}t^2 \quad \text{şi} \quad a = \frac{v_1}{t_1} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1);$$

$$x = v_1\left(t - \frac{t_1}{2}\right) \quad \text{şi} \quad a = 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2);$$

$$x = v_1\left(t - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{v_1 - v_3}{t_3 - t_2}\frac{(t - t_2)^2}{2};$$

$$a = -\frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_2} \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant t_3).$$

şi diagramele căutate sînt date în figura 9.B.11, *b*.

9.B.12. Culisa M este pusă în mişcare prin intermediul firului MBA, ce se înfăşoară pe o roată de rază r care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = ct$ (fig. 9.B.12). Să se determine viteza culisei M în funcţie de poziţia sa.

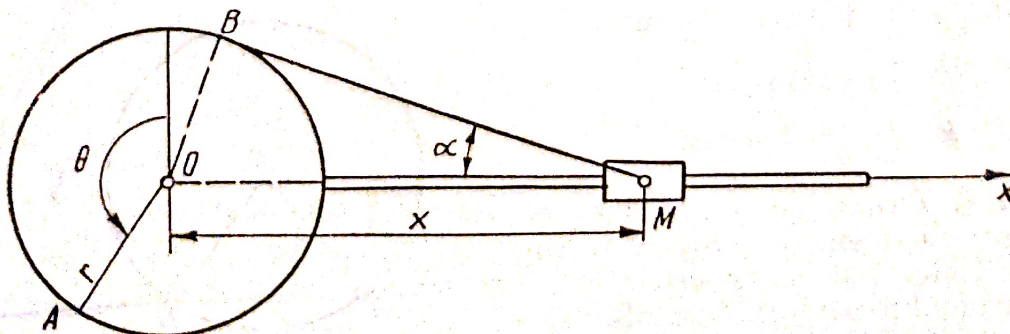


Fig. 9.B.12

R e z o l v a r e. Lungimea firului este:

$$l = r\omega t + r\alpha + \sqrt{x^2 - r^2}.$$

Prin derivare, deoarece $l =$ constant, se obţine:

$$\dot{x} = -\frac{r\omega x}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{r\omega}{\cos\alpha}.$$

9.B.13. Legea de mişcare a unui punct este:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha t^2\bar{i} + \left(\frac{1}{2}\beta t^2 + \gamma\right)\bar{j},$$

unde $\alpha > 0$, iar β, γ sînt constante. Ştiind că mişcarea începe la momentul $t = 0$, să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia. Să se determine hodograful vitezei.

R e z o l v a r e. Traiectoria este în planul xOy. Eliminînd timpul între coordonate, se obţine:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + \gamma,$$

care este o semidreaptă. Prin derivare:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \alpha t\bar{i} + \beta t\bar{j},$$

$$a = \ddot{\bar{r}} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j}.$$

Hodograful vitezei rezultă din:

$$\dot{x} = \alpha t;\ \dot{y} = \beta t,$$

deci,

$$\dot{y} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{x}.$$

9.B.14. Legea de mişcare a unui punct este:

$$\bar{r} = a\cos\omega t\bar{i} + b\sin\omega t\bar{j},$$

unde a, b, ω sînt constante pozitive. Ştiind că mişcarea începe la $t = 0$, să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia. Să se determine hodograful vitezei.

R e z o l v a r e. Traiectoria este elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -\omega a\sin\omega t\bar{i} + \omega b\cos\omega t\bar{j},$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = -\omega^2 a\cos\omega t\bar{i} - \omega^2 b\sin\omega t\bar{j}.$$

Cum:

$$\dot{x} = -\omega a\sin\omega t;\quad \text{iar}\quad \dot{y} = \omega b\cos\omega t,$$

hodograful vitezei este elipsa:

$$\frac{\dot{x}^2}{(\omega a)^2} + \frac{\dot{y}^2}{(\omega b)^2} = 1.$$

9.B.15. Două mobile M_1 și M_2 pornesc simultan din A, unul pe diametrul AB, iar altul pe semicercul AM_2B. Mobilul M_1 are viteză constantă dată v_0 iar mobilul M_2 pornește din repaus avînd accelerația tangențială, constantă, necunoscută. Știind că cele două mobile ajung simultan în B, să se calculeze accelerația mobilului M_2, cînd ajunge în B (fig. 9.B.15).

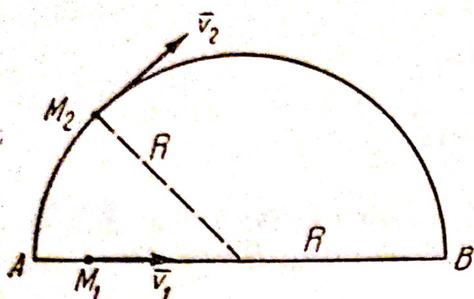


Fig. 9.B.15

R e z o l v a r e. Legile de mișcare ale mobilelor luînd în considerare valorile inițiale sînt:

$$AM_1 = s_1 = v_0 t; \quad \overset{\frown}{AM_2} = s_2 = \frac{a_\tau t^2}{2},$$

cu vitezele: $v_1 = v_0$; $v_2 = a_\tau t$.

Cînd mobilele ajung în B, legile devin:

pentru $M_1: 2R = v_0 t_B$;

pentru $M_2: \pi R = \frac{a_\tau t_B^2}{2}$ și $v_B = a_\tau t_B$.

Rezultă

$$t_B = \frac{2R}{v_0}; \; v_B = \pi v_0 \quad \text{și} \quad a_\tau = \frac{\pi v_0^2}{2R}.$$

Accelerația mobilului M_2 ajuns în B, va avea componentele:

$$a_\tau = \frac{\pi v_0^2}{2R}; \quad a_n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{\pi^2 v_0^2}{R},$$

de unde $a_B = \frac{\pi v_0^2}{2R}\sqrt{1 + 4\pi^2}$,

9.B.16. Un mobil pornește din repaus, pe cercul de rază R, cu accelerație unghiulară constantă $\dot{\omega}$, cunoscută. Să se determine drumul $AM = s$ parcurs de mobil din momentul inițial pînă în momentul în care unghiul dintre vectorul viteză și accelerație este 45° (fig. 9.B.16).

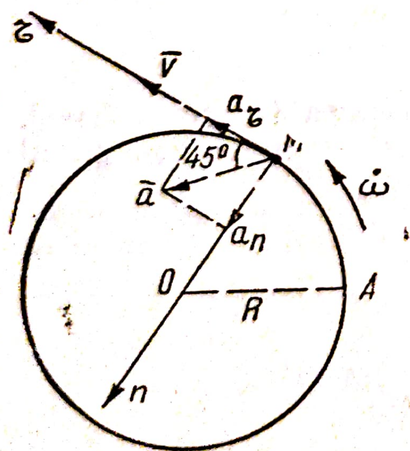


Fig. 9.B.16

R e z o l v a r e. Presupunînd că în poziția M unghiul între v și a este de 45°, se deduce, prin descompunerea accelerației $\bar{a}$ după sistemul $\tau M n$, că

$$a_\tau = a_n.$$

Exprimîndu-se în funcție de elementele unghiulare ale mișcării, se obține:

$$\omega = \sqrt{\dot{\omega}}.$$

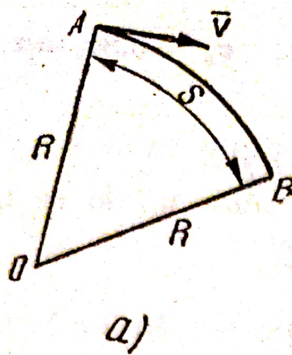
Ecuația orară și viteza în mișcarea pe cerc

$$\theta = \frac{\dot{\omega} t^2}{2}, \quad \omega = \dot{\omega} t$$

conduc la

$$t = \frac{1}{\sqrt{\dot{\omega}}} \quad \text{și} \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{adică} \quad s = R\theta = \frac{R}{2}.$$

9.B.17. Un mobil se mișcă pe un cerc de rază R cu accelerație tangențială constantă. Știind că în momentul inițial, în A viteza este v_0,



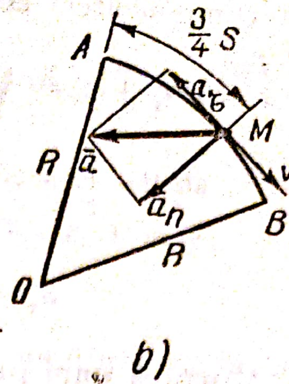


Fig. 9.B.17

iar după parcurgerea arcului $\widehat{AB} = S$ mobilul se opreşte, să se determine acceleraţia şi drumul parcurs la timpul $t = \frac{1}{2} t_B$ (fig. 9.B.17, *a*).

Rezolvare. Folosind ecuaţiile mişcării scrise în B

$$S = v_0 t_B - \frac{a_\tau t_B^2}{2}\ ; \quad v_B = v_0 - a_\tau t_B = 0,$$

se obţin:

$$t_B = \frac{2S}{v_0}\ ; \quad a_\tau = \frac{v_0^2}{2S}\ .$$

La momentul

$$t = \frac{1}{2} t_B,$$

rezultă:

$$v = \frac{v_0}{2}\ ; \quad s = \frac{3}{4} S\ ; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{4R}\ .$$

Acceleraţia va fi:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{v_0^2}{4RS}\sqrt{4R^2 + S^2},$$

iar unghiul θ între $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ (fig. 9.B.17, *b*),

$$\text{tg}\ \theta = \frac{S}{2R}\cdot$$

9.B.18. Un punct se mişcă pe un cerc de rază $R = 2$ m; acceleraţia tangenţială a punctului este constantă $a_\tau = 1$ m/s². Ştiind că după o secundă de la începutul mişcării acceleraţia este $a = 2$ m/s², să se determine viteza iniţială v_0 a punctului, ecuaţia de mişcare, precum şi viteza şi acceleraţia la un moment dat.

Rezolvare. Se obţin ecuaţiile:

$$s = \frac{t^2}{2} + v_0 t\ ; \quad v = t + v_0.$$

Scriind componentele accelerației la $t = 1$ s,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + \frac{(1 + v_0)^4}{4}} = 2; \quad v_0 = 0{,}86 \text{ m/s}$$

și

$$s = \frac{t^2}{2} + 0{,}86t; \quad v = t + 0{,}86;$$

$$a_\tau = 1; \quad a_n = \frac{(t + 0{,}86)^2}{2}.$$

9.B.19. Mișcarea unui punct este definită de:

$$x = 20t^2 + 5; \quad y = 15t^2 - 3$$

(t se dă în secunde, x și y în centimetri). Să se determine mărimea și direcția vitezei și accelerației cînd $t = 2$s.

R e z o l v a r e. Folosind relațiile:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$\cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v}$, etc., se obține:

$$v = 100 \text{ cm/s}; \quad a = 50 \text{ cm/s}^2; \quad \cos(\bar{v}, x) = \cos(\bar{a}, x) = 0{,}8;$$

$$\cos(\bar{v}, y) = \cos(\bar{a}, y) = 0{,}6.$$

9.B.20. Să se determine ecuația traiectoriei unui punct, dacă mișcarea sa este dată de ecuațiile:

$$\text{(a)} \quad x = 20t^2 + 5; \quad y = 15t^2 + 3;$$

$$\text{(b)} \quad x = 5 + 3\cos t; \quad y = 4\sin t.$$

R e z o l v a r e. Eliminîndu-se parametrul t între coordonate se obțin: (a) linia dreaptă $3x - 4y - 3 = 0$ cu poziția inițială în punctul de coordonate:

$$x = 5; \ y = 3;$$

(b) elipsa $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Poziția inițială în punctul de coordonate:

$$x = 8; \ y = 0.$$

9.B.21. Mișcarea unei încărcături eliberate de un avion este dată de ecuațiile:

$$x = v_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2},$$

axa Ox fiind orizontală, iar Oy verticală în sus. Să se determine traiectoria încărcăturii, viteza (modul și direcție) în momentul atingerii solului (intersecția cu axa Ox), bătaia corespunzătoare și hodograful vitezei.

R e z o l v a r e. Eliminînd timpul, se obține traiectoria

$$y = h - g\frac{x^2}{2v_0^2}.$$

Prin derivare, din x și y se obține, la $y = 0$:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\ ; \quad \cos(\bar{v},\ x) = \frac{v_0}{v}, \quad \cos(\bar{v},\ y) = -\frac{\sqrt{2gh}}{v}.$$

Pentru $y = 0$, se obține din ecuația traiectoriei bătaia $x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Hodograful se obține eliminînd timpul din $X = \dot{x}$, $Y = \dot{y}$; deci:

$$X = v_0.$$

9.B.22. Știind că ecuațiile de mișcare ale unui punct în coordonate polare sînt:

$$r = r_0 e^{\alpha t}; \quad \theta = \beta t,$$

să se afle traiectoria sa și să se determine viteza și accelerația punctului.

R e z o l v a r e. Eliminînd timpul, se obține:

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta},$$

o spirală logaritmică. În coordonate polare se obține:

$$v_\rho = \dot{r} = \alpha r_0 e^{\alpha t}; \quad v_\nu = r\dot{\theta} = \beta r_0 e^{\alpha t};$$

$$a_\rho = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (\alpha^2 - \beta^2) r_0 e^{\alpha t};$$

$$a_\nu = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\alpha\beta r_0 e^{\alpha t}.$$

9.B.23. Un punct are o mișcare plană cu viteza $v_0 = \text{const.}$, $\dot{\theta} = \omega_0$ și în momentul inițial $t = 0$, $r = 0$. Să se determine ecuațiile de mișcare în coordonate polare.

R e z o l v a r e. Din relația $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$ se obține:

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 - r^2\omega_0^2}.$$

Separînd variabilele, prin integrare rezultă:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{r\omega_0}{v_0} \quad \text{sau} \quad r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Dacă $\dot{\theta} = \omega_0$, $\theta = \omega_0 t$, traiectoria va fi:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \theta.$$

Capitolul 10

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

10.A. PREZENTARE TEORETICĂ

10.A.1. Generalităţi

Se ştie că poziţia unui solid rigid poate fi oricînd determinată dacă se cunosc, în acel moment, poziţiile a trei puncte ale sale, care nu sînt coliniare, în raport cu un triedru $O'x'y'z'$ presupus fix (fig. 10.A.1). Dacă cele trei puncte notate O, A şi B sînt alese astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel, $OA = OB = 1$ şi dreptunghic în O, se poate considera un reper dreptunghic $Oxyz$ *solidar legat* cu solidul (C) şi la fel orientat cu triedrul fix. Poziţia triedrului solidar legat de solidul (C) poate fi determinată în orice moment cu ajutorul vectorului de poziţie $\bar{r}_0 = \overline{O'O}$ şi al versorilor: $\bar{i} = \overline{OA}$, $\bar{j} = \overline{OB}$ şi $\bar{k} = \overline{OC}$, ultimul rezultînd din $\bar{k} = \bar{i} \times \bar{j}$ şi din convenţia de orientare.

Dacă solidul (C) este fix în raport cu $O'x'y'z'$, atunci $\bar{r}_0$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, şi $\bar{k}$ sînt vectori constanţi (în direcţie, sens şi modul) şi reciproc.

Dacă solidul (C) este în mişcare în raport cu $O'x'y'z'$, toţi vectorii $\bar{r}_0$, $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ sau unii din ei variază în timp, adică sînt funcţii vectoriale de timp.

Poziţia unui punct $M(x, y, z)$ solidar cu (C) este determinată în raport cu reperul $Oxyz$, prin:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{10.1}$$

iar în raport cu $O'x'y'z'$, prin:

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{10.2}$$

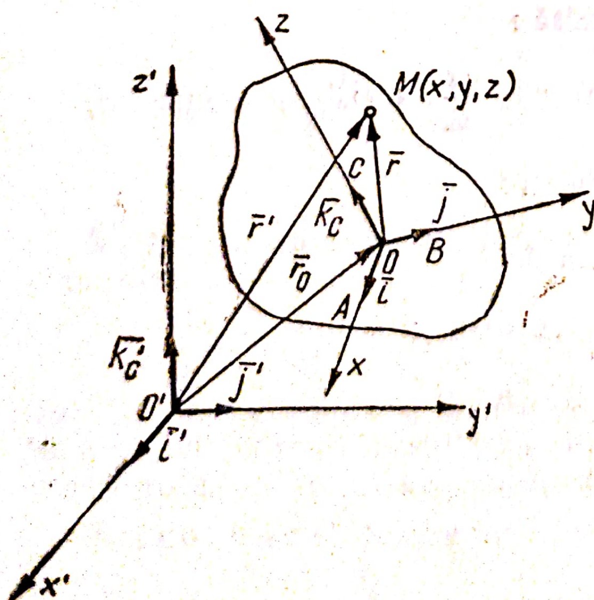


Fig. 10.A.1

unde x', y', z' sînt coordonatele punctului M în raport cu $O'x'y'z'$, iar $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ sînt versorii invariabili ai axelor fixe.

Dacă punctul $M(x, y, z)$ rămîne fix pe solidul (C), coordonatele lui nu depind de timp, chiar dacă (C) este în mişcare. În acest caz însă: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = r(\bar{t})$, variaţia lui $\bar{r}$ este numai în direcţie, datorită variaţiei în direcţie a versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ din cauza mişcării solidului (C).

Dacă M este în mişcare în raport cu (C), coordonatele lui depind de timp. Dacă în acelaşi timp şi (C) este în mişcare în raport cu $O'x'y'z'$, există o *suprapunere de mişcări*.

Mișcarea lui M în raport cu (C), adică în raport cu $Oxyz$, se numește *mișcare relativă*, iar în raport cu reperul fix, din O', mișcarea se numește *absolută*.

În cinematica solidului rigid, M este un punct solidar cu (C), coordonatele lui (x, y, z) sînt parametri depinzînd de poziția punctului, dar independenți de timp.

Pentru a cunoaște mișcarea solidului (C) în raport cu $O'x'y'z'$ este suficient să se cunoască mișcarea *triedrului mobil $Oxyz$* și pozițiile oricărui punct M al solidului prin coordonatele sale.

Distribuția de viteze. Vitezele diferitelor puncte ale solidului (C), in raport cu $O'x'y'z'$, se exprimă prin ecuația:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}' = \dot{\bar{r}}_0 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} = \bar{v}_0 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}, \qquad (10.3)$$

unde $\bar{v}_0$ este viteza punctului O (nu se va citi v zero). (V indice O.)

Distribuția de accelerații. Accelerațiile punctelor solidului (C), în raport cu $O'x'y'z'$, se exprimă prin ecuația:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}' = \dot{\bar{v}}_0 + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} = \bar{a}_0 + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}}, \qquad (10.4)$$

unde $\bar{a}_0$ este accelerația punctului O (se va citi a, indice o).

Observație importantă.

Cunoașterea funcțiunilor:

$$\bar{r}_0(t), \quad \bar{i}(t), \quad \bar{j}(t), \quad \bar{k}(t)$$

rezolvă complet problema cinematicii solidului rigid, deoarece prin $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ se cunoaște traiectoria punctului O, prin $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0(t)$, viteza lui și prin $\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0(t) = \ddot{\bar{r}}_0(t)$, accelerația lui. În ceea ce privește funcțiile vectoriale $\bar{i}(t)$, $\bar{j}(t)$, $\bar{k}(t)$, care trebuie să fie de asemenea funcții continue de două ori derivabile, ele caracterizează, în general, tipul de mișcare al solidului rigid.

10.A.2. Mișcarea de translație

Definiție. Un solid rigid are o deplasare de *translație* dacă un segment de dreaptă, unind două *puncte arbitrare*, solidare cu solidul, rămîne în decursul deplasării paralel cu el însuși.

Observație.

Definiția mișcării de translație diferă de aceea a deplasării de translație, doar prin introducerea timpului, adică segmentul de dreaptă OM, (fig. 10.A.2), unind două puncte arbitrare O și M, rămîne invariabil în timp cu aceeași mărime, direcție și sens, ceea ce se poate exprima și vectorial:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{c},$$

adică $\bar{r}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ sînt și ei independenți de timp.

Traiectoriile punctelor solidului sînt date de ecuația:

$$\bar{r}' = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0(t) + \bar{c},$$

adică toate punctele solidului rigid descriu, într-o mișcare de translație, traiectorii egale și paralele cu traiectoria lui O. Astfel dacă $\bar{r}_0(t)$ este o funcție liniară de t, O descrie o linie dreaptă, la fel orice punct M descrie o linie dreaptă paralelă, mișcarea se numește de *translație rectilinie*.

În alte condiţii se poate ca mişcarea să fie de *translaţie circulară* sau de *translaţie curbilinie.*

Distribuţia de viteze este dată de ecuaţia :

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{v} = \dot{\bar{r}}_0(t) + \dot{\bar{c}} = \bar{v}_0 \quad \text{sau} \quad \bar{v} = \bar{v}_0(t)^1,$$

adică toate punctele solidului rigid au, în acelaşi moment t, aceeaşi viteză cu viteza punctului O.

Distribuţia de acceleraţii este dată în ecuaţia :

$$\bar{a} = \bar{a}_0(t),$$

adică toate punctele solidului rigid au în acelaşi moment t aceeaşi acceleraţie cu acceleraţia punctului O.

Reciproc, dacă în *orice moment,* punctele solidului rigid au aceeaşi viteză cu viteza $\bar{v}_0(t)$ a punctului O, mişcarea solidului este de translatie.

10.A.3. Mişcarea de rotaţie

Definiţie. Un solid rigid este în rotaţie dacă în cursul mişcării cel puţin două puncte ale sale, sau solidare cu el, rămîn fixe. Dreapta determinată de aceste puncte fixe se numeşte *axa de rotaţie.*

Proprietăţi. Punctele solidului rigid descriu cercuri avînd planele perpendiculare pe axă, cu centrele pe axă, iar razele R egale cu distanţele punctelor pînă la axă (fig. 10.A.3).

Toate punctele solidului rigid descriu cercurile respective cu aceeaşi viteză unghiulară, în acelaşi moment t.

Proiecţiile vitezelor a două puncte solidare între ele pe dreapta care le uneşte sînt egale. *Această proprietate este adevărată oricare ar fi mişcarea segmentului de dreaptă, de lungime invariabilă, care uneşte cele două puncte.*

Reprezentare vectorială. Mişcarea de rotaţie poate fi caracterizată cu ajutorul unui vector alunecător $(\bar{\omega}, \Delta)^2$, unde Δ, suportul, reprezintă axa de rotaţie, sensul vectorului arată sensul rotaţiei (regula observatorului), $\omega(t)$ reprezintă legea mişcării de rotaţie (fig. 10.A.4).

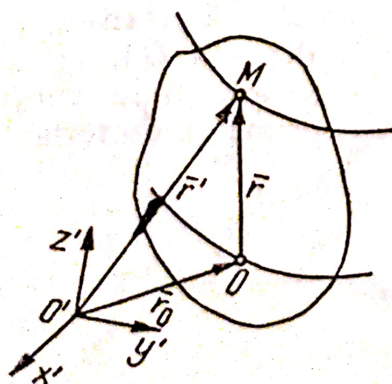


Fig. 10.A.2

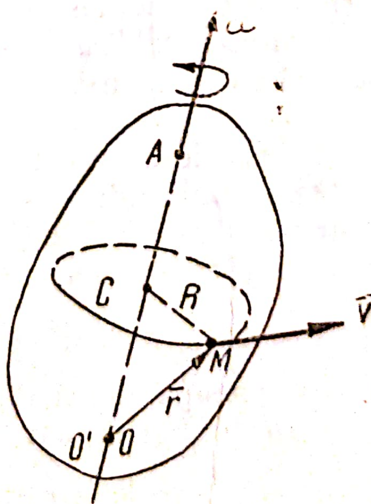


Fig. 10.A.3

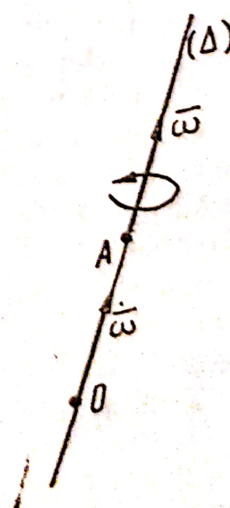


Fig. 10.A.4

[1] $\bar{v}_0$, este un vector polar legat de punctul O.

[2] Spre deosebire de $\bar{v}_0$, $\bar{\omega}$ este un vector *axial.*

Dacă ω nu depinde de timp, mişcarea este o *rotaţie uniformă*. În cazul că ω este funcţie de timp, mişcarea are şi o acceleraţie unghiulară care poate fi caracterizată şi ea printr-un vector $\dot{\overline{\omega}}(t)$ *coliniar* cu ω pe (Δ). Dacă $\dot{\overline{\omega}}$ are acelaşi sens cu $\overline{\omega}$, mişcarea de rotaţie este accelerată şi invers, mişcarea este *decelerată* dacă $\dot{\overline{\omega}}$ şi $\overline{\omega}$ au sensuri opuse.

Dacă $\dot{\overline{\omega}}$ este independent de timp, acceleraţia sau deceleraţia fiind constante, mişcarea este *uniform accelerată (decelerată)*.

Distribuţia de viteze este dată de relaţia:

$$\bar{v} = \overline{\omega} \times \bar{r}, \tag{10.5}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie în raport cu reperul cu originea în punctul fix O (fig. 10.A.3.).

Distribuţia de acceleraţii, dedusă din (10.5), prin derivare este dată de:

$$\bar{a} = \dot{\overline{\omega}} \times \bar{r} + \overline{\omega} \times \bar{v} \tag{10.6}$$

sau

$$\bar{a} = \dot{\overline{\omega}} \times \bar{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \bar{r}). \tag{10.7}$$

Expresii analitice. Se recomandă să se aplice indicaţiile date la Cap. II, adică traducerea relaţiilor vectoriale în expresii analitice, şi anume: se vor folosi sistemele de referinţă cele mai simple cerute de problemă şi nu cele mai generale cu putinţă care apoi să fie particularizate, după caz.

Aici, la mişcarea de rotaţie în jurul axei fixe (Δ), aceasta va fi aleasă ca axă fixă comună $Oz' \equiv Oz$, cu $\bar{k}' = \bar{k}$, axele $O'x'$ şi $O'y'$ fixe, iar Ox şi Oy mobile, în acelaşi plan cu $O'x'y'$ (fig. 10.A.5). Punctul M are coordonatele x', y', z', respectiv x, y, z faţă de cele două sisteme de referinţă.

Originile O' şi O fiind confundate: $\bar{r}' = \bar{r}$, iar $\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\overline{\omega} = \omega\bar{k}' = \omega\bar{k}$.

Înlocuind în (10.5), se găsesc rezultatele căutate:

$$\bar{v} = \omega\bar{k}' \times (x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}') = \omega x'\bar{j}' - \omega y'\bar{i}' \text{ sau } v_{x'} = -\omega y',$$

$$v_{y'} = \omega x'; \quad v_{z'} = 0; \quad \bar{v} = \omega\bar{k} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \omega x\bar{j} - \omega y\bar{i} \text{ sau}$$

$$v_x = -\omega y;$$

$$v_y = \omega x;$$

$$v_z = 0,$$

adică scalarii proiecţiilor vitezelor pe axele fixe $O'x'y'z'$ şi pe cele mobile $Oxyz$.

La fel se procedează şi pentru proiecţiile acceleraţiei. Rezultatele sînt:

$$a_{x'} = -\dot{\omega}y' - \omega^2 x';$$

$$a_{y'} = \dot{\omega}x' - \omega^2 y';$$

$$a_x = -\dot{\omega}y - \omega^2 x;$$

$$a_y = \dot{\omega}x - \omega^2 y,$$

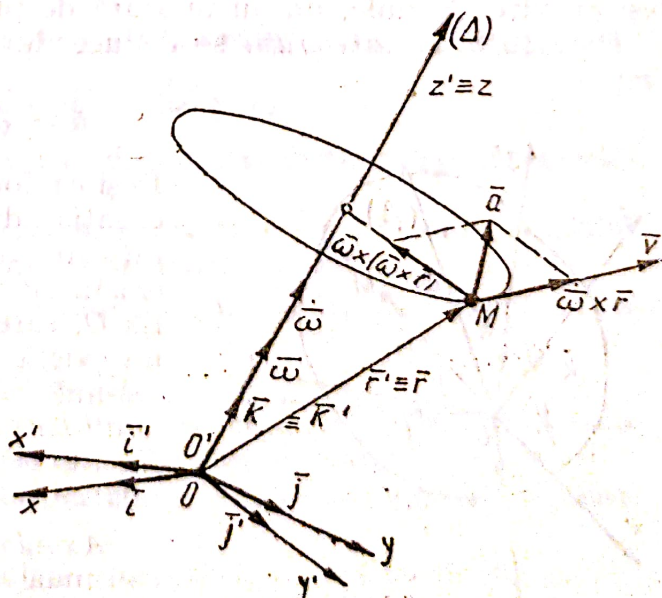


Fig. 10.A.5

de unde:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)(\dot{\omega}^2 + \omega^4)} = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} =$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(\dot{\omega}^2 + \omega^4)},$$

R fiind raza cercului descris de punctul M.

10.A.4. Mişcarea solidului cu un punct fix

Mişcarea solidului rigid cu un punct fix O (fig. 10.A.6) este o mişcare complexă.

Pare că se aseamănă cu mişcarea *simplă* de rotaţie, dar această asemănare este numai *formală*.

Mişcarea solidului cu un punct fix O este caracterizată prin vectorii $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{a}_0 = 0$ şi vectorul $\bar{\omega}(t)$ avînd suportul care trece necontenit prin punctul fix O, dar are variabile nu numai modulul ci şi *direcţia*. Din această cauză $\dot{\bar{\omega}}$ este un vector al cărui suport trece mereu prin O, dar *nu mai coincide* cu suportul lui $\bar{\omega}$.

În aceste condiţii mişcarea *nu poate* fi o mişcare de rotaţie, deoarece axa $(\bar{\omega}, \Delta)$ nu este fixă, ci variază de la un moment la altul.

De asemenea, nu poate fi denumită *nici mişcare instantanee de rotaţie*, deoarece suportul vectorului $\dot{\omega}$ nu este coliniar cu $(\bar{\omega}, \Delta)$.

Este adevărat că distribuţia *instantanee* de viteze corespunde unei mişcări de rotaţie în jurul axei instantanee $(\bar{\omega}, \Delta)$, adică:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{10.8}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare M al solidului rigid.

În momentul corespunzător t, toate punctele axei instantanee de rotaţie au vitezele nule, iar lucrurile se petrec, *însă numai din punctul de vedere al distribuţiei de viteze, ca şi cum solidul s-ar roti, în acel moment, în jurul axei* (Δ).

În realitate această rotaţie este formală, deoarece punctele axei (Δ), deşi au vitezele nule, nu au în afară de punctul fix O şi acceleraţiile nule.

Distribuţia de acceleraţii se deduce din (10.8) prin derivare în raport cu timpul:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \tag{10.9}$$

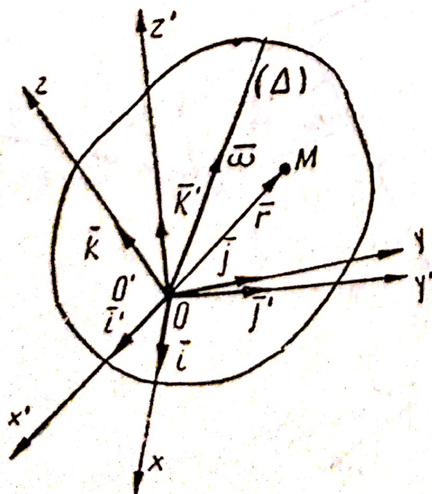


Fig. 10.A.6

Deşi ca formă, ecuaţia (10.9) este la fel cu ecuaţia distribuţiei de acceleraţii ca în mişcarea de rotaţie, *în fond*, deoarece nu există alt punct al solidului, decît punctul fix O, care să aibă acceleraţia nulă, adică nu există o axă a acceleraţiilor nule, înseamnă că *distribuţia instantanee a acceleraţiilor în cazul solidului cu un punct fix nu se poate reduce la aceea a unei mişcări de rotaţie*.

Axoida fixă, axoida mobilă. Mulţimea continuă de axe instantanee formează în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, o suprafaţă conică, numită *axoida fixă*.

Axa instantanee nu este fixă nici în raport cu triedrul mobil $Oxyz$ şi generează în raport cu acest triedru o altă suprafaţă conică, numită axoida mobilă.

Se demonstrează că, în tot timpul mişcării solidului cu un punct fix, *axoida mobilă este tangentă, după o generatoare comună, la axoida fixă, se rostogoleşte fără să alunece peste axoida fixă*, iar generatoarea comună este chiar axa instantanee din acel moment. (Conurile şi mişcarea Poinsot).

Formulele lui Poisson se determină uşor calculîndu-se vitezele vîrfurilor versorilor $\overline{OA} = \bar{i}$, $\overline{OB} = \bar{j}$, şi $\overline{OC} = \bar{k}$, odată direct prin derivare în raport cu timpul şi a doua oară folosind ecuaţia generală (10.5) de distribuţie a vitezelor în mişcarea solidului cu un punct fix, adică:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \qquad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \qquad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \tag{10.10}$$

10.A.5. Mişcarea oarecare (cea mai generală) a solidului rigid

Distribuţia de viteze se obţine folosind formulele lui Poisson în ecuaţia (10.3), adică:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{10.11}$$

În mişcarea cea mai generală a solidului rigid, *distribuţia instantanee de viteze se obţine prin suprapunerea a două distribuţii: una corespunzătoare unei translaţii, iar alta, unei rotaţii în jurul unei axe:*

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}''; \qquad \bar{v}' = \bar{v}_0; \qquad \bar{v}'' = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Observaţie.

Se precizează că solidul *are o mişcare unică şi nu* una compusă dintr-o translaţie şi o rotaţie. Numai din punctul de vedere al distribuţiei *instantanee* de viteze lucrurile se petrec *ca şi cum* s-ar suprapune cele două cîmpuri de viteze.

Distribuţia de acceleraţii este dată de relaţia:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \tag{10.12}$$

Prima componentă $\bar{a}' = \bar{a}_0$ corespunde unei translaţii, iar cea de-a doua:

$$\bar{a}'' = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

mişcării solidului cu un punct fix, la care distribuţia instantanee de acceleraţii nu *corespunde unei rotaţii.*

Discuţia asupra tipurilor de mişcări se poate face cu ajutorul vectorilor caracteristici $\bar{\omega}(t)$ şi $\bar{v}_0(t)$ în funcţie de particularităţile lor:

$\bar{\omega} = 0$, $\bar{v}_0 = 0$, cazul banal al repausului în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$;

$\bar{\omega} = 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, mişcare de *translaţie*;

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0 = 0$, dacă suportul vectorului $\bar{\omega}$, care trece necontenit prin punctul fix O, are *direcţia invariabilă*, mişcarea este *o rotaţie*;

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0 = 0$ suportul lui $\bar{\omega}$ variabil, mişcarea solidului *cu un punct fix O*;

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, dacă suportul $\bar{\omega}$ este o *dreaptă fixă* trecînd prin O', iar $\bar{v}_0$ este pe acelaşi suport (Δ), mişcarea se numeşte *elicoidală*, (Δ) fiind axa acestei mişcări (fig. 10.A.7);

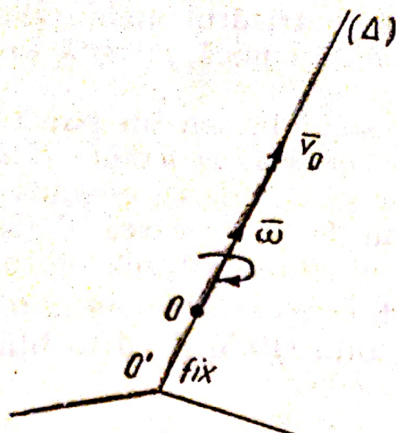


Fig. 10.A.7

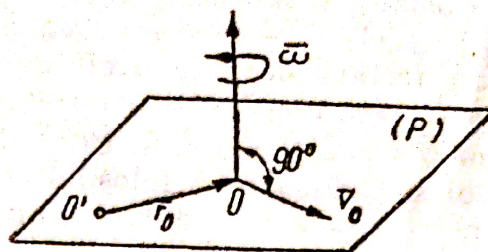


Fig. 10.A.8

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, suportul lui $\bar{\omega}$ are o *direcţie invariabilă*, iar $\bar{v}_0$, neconteni perpendicular pe $\bar{\omega}$, este situat într-un plan fix. Mişcarea se numeşte *plan-paralelă* (fig. 10.A.8).

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, fără condiţii pentru direcţiile acestor vectori prezintă *mişcarea cea mai generală* a solidului rigid.

În mişcarea cea mai generală a solidului rigid, se demonstrează următoarele proprietăţi:

Proiecţia vitezei oricărui punct M al solidului pe direcţia lui $\bar{\omega}$ este un invariant, independent de poziţia punctului.

Mişcarea cea mai generală a solidului rigid poate fi asimilată, *însă numai din punctul de vedere al distribuţiei instantanee de viteze, cu o mişcare elicoidală.*

Axa instantanee a mişcării elicoidale generează, în raport cu triedrul fix, o suprafaţă riglată, numită *axoida fixă*, iar în raport cu triedrul mobil, o suprafaţă de asemenea riglată, numită *axoida mobilă*.

Se demonstrează că *în tot timpul mişcării solidului axoida mobilă se rostogoleşte peste axoida fixă şi alunecă în acelaşi timp, în lungul generatoarei de contact care, în momentul considerat, este axa instantanee a mişcării elicoidale.*

10.A.n Mişcarea elicoidală

Această mişcare a solidului rigid poate fi caracterizată *geometric* prin aceea că un segment de dreaptă, solidar cu solidul în rotaţie în jurul lui, alunecă în lungul unei drepte fixe, *axa* mişcării elicoidale.

Punctele solidului descriu elici cilindrice, în general cu pas variabil.

Vectorii caracteristici ai mişcării elicoidale cu pas variabil, $\bar{\omega}(t)$ şi $\bar{v}_0(t)$, fiind funcţii continue, şi derivabile, nu sînt legaţi decît de condiţia de a avea acelaşi suport fix, axa mişcării. Derivatele lor: $\dot{\bar{\omega}}(t)$ şi $\dot{\bar{v}}_0(t) = \bar{a}_0(t)$ reprezintă de asemenea vectori pe acelaşi suport, fără vreo altă legătură între ei.

Mişcarea de şurub este un caz particular al mişcării elicoidale: punctele solidului descriu elici circulare cu acelaşi pas p, există o relaţie liniară între valorile $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$, respectiv între $\dot{\bar{\omega}}$ şi $\bar{a}_0$, adică:

$$v_0 = k\frac{p}{2\pi}\omega \quad \text{şi} \quad a_0 = k\frac{p}{2\pi}\dot{\omega}.$$

unde k poate fi ± 1 după cum şurubul are filetul *drept* sau *stîng*.

10.A.7. Mişcarea plan-paralelă

Această mişcare se caracterizează *geometric* prin aceea că există un plan (P), solidar cu solidul rigid (C), care se mişcă într-un plan fix (P') (fig. 10.A.9).

O b s e r v a ţ i i

Orice punct al solidului rigid în mişcare plan-paralelă rămîne la distanţă invariabilă faţă de planul fix al mişcării.

Toate punctele solidului rigid, situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul fix, au în acelaşi moment aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie şi descriu traiectorii egale şi paralele cu planul fix.

În consecinţă, mişcările punctelor situate în orice plan paralel cu planul fix (P') sînt identice cu mişcările punctelor corespunzătoare situate în planul (P).

Pentru cunoaşterea mişcării plan-paralele a solidului rigid (C), este suficient să se studieze mişcarea secţiunii sale plane (P) cu planul fix (P').

Mişcarea planului (P) în planul (P') se numeşte *mişcare* plană, iar pe baza observaţiilor se poate face uşor corespondenţa dintre mişcarea plană a secţiunii (P) cu mişcarea plan-paralelă a solidului rigid (C).

10.A.8. Mişcarea plană

Determinare. Mişcarea plană, mişcarea unei plăci rigide plane (P) în propriul ei plan fix (P'), este determinată (fig. 10.A.10) în raport cu un reper fix $O'x'y'$ din planul (P') prin:

$$\bar{r}_0(t) = x_0(t)\bar{i}' + y_0(t)\bar{j}' \text{ şi } \theta(t),$$

adică prin poziţia originii O a reperului mobil Oxy şi prin $\sphericalangle\,\theta$ dintre Ox şi $O'x'$.

Vectorii caracteristici ai mişcării plane sînt: $\bar{\omega}(t) = \dot{\theta}\bar{k}'$ perpendicular pe planul (P) şi $\bar{v}_0(t) = \dot{\bar{r}}_0 = \dot{x}_0\bar{i}' + \dot{y}_0\bar{j}'$, situat în planul (P). Pentru completarea expresiilor analitice, se va ţine seamă şi de relaţiile evidente dintre versorii axelor mobile Oxy şi ai celor fixe $O'x'y'$:

$$\bar{k} = \bar{k}'; \quad \bar{i}\bar{i}' = \cos\theta; \quad \bar{j}\bar{i}' = -\sin\theta; \quad \bar{i}\bar{j}' = \sin\theta; \quad \bar{j}\bar{j}' = \cos\theta.$$

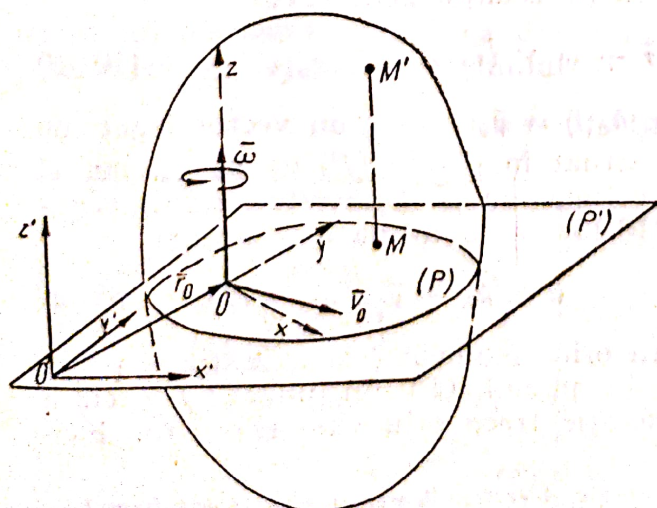


Fig. 10.A.9

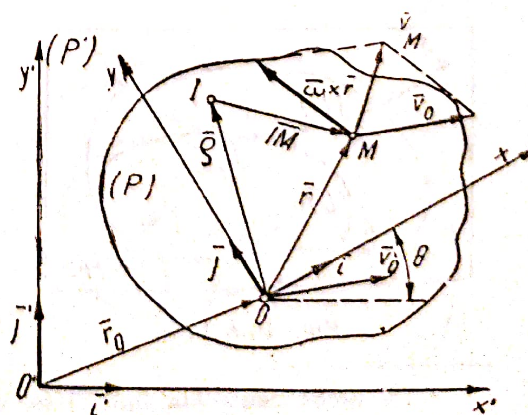


Fig. 10.A.10

Distribuţia de viteze este, ca formă, aceeaşi ca în mişcarea generală: $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ cu particularităţile caracteristice ale vectorilor $\bar{\omega}$, $\bar{v}_0$ şi $\bar{r}$.

În orice moment t al mişcării se poate găsi în planul (P) un punct I a cărui viteză trece prin valoarea zero. Acest punct nu este fix deoarece el are acceleraţie. Vectorul de poziţie al punctului I este:

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} \quad \text{iar} \quad |\bar{\rho}| = \frac{|\bar{v}_0|}{|\bar{\omega}|},$$

adică: *I se află în orice moment t pe perpendiculara din planul (P) dusă pe $\bar{v}_0$, în sensul în care triedrul $O\bar{\omega}\bar{v}_0\bar{\rho}$ este drept, la distanţa* $\frac{|\bar{v}_0|}{|\omega|}$.

Cu ajutorul punctului I, distribuţia de viteze la momentul t (instantanee) are o formă simplă: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{IM}$ ca şi la mişcarea de rotaţie, *ca şi cum punctul I ar fi fix, iar placa (P) s-ar roti în jurul lui cu viteza unghiulară din acel moment.*

În realitate lucrurile nu se petrec aşa, ci numai din punctul de vedere al distribuţiei *momentane* sau *instantanee* şi *numai pentru viteze*, mişcarea se poate asemui, *formal*, cu o rotaţie în jurul lui I care se numeşte *centru instantaneu de rotaţie.*

Se precizează din nou că nu este vorba de o rotaţie propriu-zisă, deoarece în momentul următor t, un alt punct I al planului (P) *are* — în acel moment — viteza nulă şi rolul de centru instantaneu de rotaţie, astfel că:

mişcarea cea mai generală a unei plăci rigide plane în propriul ei plan fix poate fi privită, din punctul de vedere al distribuţiei instantanee de viteze, ca o mulţime continuă de rotaţii în jurul unor centre instantanee de rotaţie care se succed de asemenea în mod continuu.

Centroida fixă şi centroida mobilă. Mulţimea continuă a centrelor instantanee de rotaţie formează în planul fix (P') o curbă (C') numită *centroida fixă*, iar în planul mobil (P) o altă curbă (C), solidară cu acest plan, numită *centroida mobilă* (fig. 10.A.11). Se demonstrează că în tot timpul mişcării planului (P) în raport cu planul (P') centroida mobilă se rostogoleşte[1] fără să alunece pe centroida fixă. Punctul de tangenţă din fiecare moment este centrul instantaneu de rotaţie, din acel moment.

Distribuţia de acceleraţii este dată de ecuaţia generală:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{10.13}$$

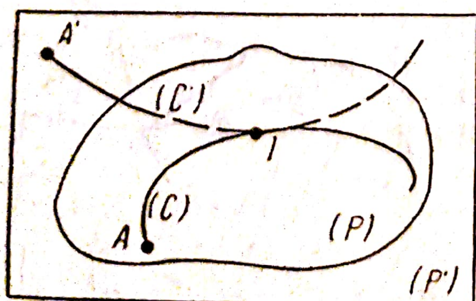


Fig. 10.A.11

unde $\bar{a}_0(t) = \dot{\bar{v}}_0(t)$ este un vector legat de O şi situat în planul (P) ca şi $\bar{v}_0$, iar $\dot{\bar{\omega}}$ este coliniar cu $\bar{\omega}$. În aceste condiţii, ecuaţia (10.13) are o formă mai simplă:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}. \tag{10.14}$$

În orice moment t al mişcării se poate găsi în planul (P) un punct J a cărui acceleraţie trece prin valoarea zero. Evi-

[1] De aceea centroida mobilă se mai numeşte şi *rostogolitoarea*, iar centroida fixă, *baza mişcării plane.*

dent acest punct nu este fix, el avînd viteza diferită de zero. Vectroul de poziție al punctului J este:

$$\bar{\eta} = \frac{\dot{\bar{\omega}} \times \bar{a}_0 + \omega^2 \bar{a}_0}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}; \quad |\bar{\eta}| = \frac{|\bar{a}_0|}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}}; \tag{10.15}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\dot{\bar{\omega}}|}{\omega^2}.$$

adică J se află în orice moment pe semidreapta din O care formează cu $\bar{a}_0$, în sensul dat de $\dot{\bar{\omega}}$, unghiul φ, cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, la distanța $|\bar{\eta}|$, ambele valori fiind date de (10.15).

Observație.

Pentru figura 10.A.12, $\bar{\omega}$ trebuie să fie orientat înspre observator, deoarece φ este orientat de la $\bar{a}_0$ în sens trigonometric.

Cu ajutorul punctului J, distribuția instantanee de accelerații (la momentul t) are forma mai simplă:

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{JM} - \omega^2 \overline{JM}, \tag{10.16}$$

ca și la mișcarea de rotație, *ca și cum punctul ar fi fix iar placa (P) s-ar roti în jurul lui cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și accelerația unghiulară $\dot{\bar{\omega}}$, din acel moment.*

Acest punct joacă în mișcarea plană un rol asemănător cu centrul instantaneu, pentru distribuția vitezelor. El poate fi numit centrul instantaneu pentru distribuția accelerațiilor, dar pentru evitarea confuziilor poartă denumirea de *polul accelerațiilor*. Adică, din punctul de vedere al distribuției instantanee de accelerații, lucrurile se petrec *ca și cum* în momentul t, *polul accelerațiilor* (J) ar fi fix, iar placa (P) s-ar roti în jurul lui (fig. 10.A.13).

Observații

Centrul instantaneu de rotație și polul accelerațiilor nu coincid în mișcarea plană, deoarece un punct care are, în același moment, atît viteza cît și accelerația nule este un punct fix, iar mișcarea plăcii ar fi o rotație propriu-zisă în jurul acestui punct.

Perpendiculara dusă din J pe OJ întîlnește pe $\bar{a}_0$ în A (fig. 10.A.12). Cum $|\overline{OA}| = \frac{|\bar{a}_0|}{\omega^2}$, rezultă că polul accelerațiilor se găsește în orice moment pe cercul construit pe OA ca diametru la intersecția cu semidreapta OJ construită cu ajutorul unghiului

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{|\dot{\bar{\omega}}|}{\omega^2}.$$

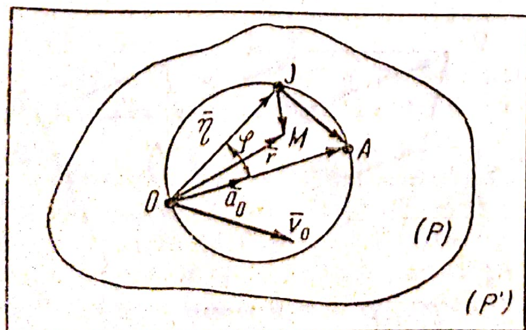


Fig. 10.A.12

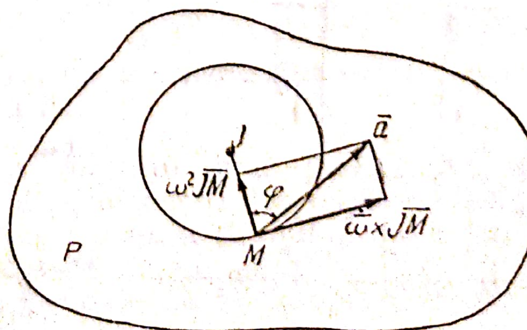


Fig. 10.A.13

10.B. APLICAŢII LA CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

10.B.1. Se consideră două prisme ABC şi $DEFG$ în mişcare de translaţie la care se cunosc α. $CB = 2FG = 2l$. Prisma $DEFG$ coboară pe verticală după legea $s = a_0t^2$, unde $a_0 =$ constant. La $t = 0$ punctele A şi D ale celor două prisme coincid (fig. 10.B.1). Să se calculeze legea de mişcare a prismei ABC, valoarea vitezei sale în momentul cînd cealaltă prismă atinge planul orizontal.

R e z o l v a r e. Între deplasările corespunzătoare ale celor două prisme se poate scrie relaţia:

$$s_1 = s \operatorname{ctg} \alpha = a_0t^2 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Prin derivări succesive, se poate scrie:

$$v_1 = v \operatorname{ctg} \alpha = 2a_0t \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$a_1 = a \operatorname{ctg} \alpha = 2a_0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Drumul parcurs pe verticală de prisma $DEFG$ pînă la planul orizontal este:

$$s = l \operatorname{tg} \alpha,$$

în timpul

$$t_1 = \sqrt{\frac{l \operatorname{tg} \alpha}{a_0}}.$$

În momentul atingerii planului, viteza prismei ABC este

$$v_1 = 2\sqrt{la_0 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

10.B.2. Se consideră mecanismul format din cinci bare articulate din figura 10.B.2, cu dimensiunile $O_1A = O_2B = r$, $O_2C = O_3D = R$, $O_1O_2 = AB = O_2O_3 = CD = l$, unde $l > R$.

Cunoscîndu-se viteza unghiulară $\omega =$ constant, a manivelei O_1A, să se calculeze şi să se reprezinte grafic vitezele şi acceleraţiile punctelor A, B, C, D, M şi N.

R e z o l v a r e. Deoarece patrulaterele O_1ABO_2 şi O_2CDO_3 rămîn tot timpul mişcării paralelograme cu laturile O_1O_2 şi O_2O_3 fixe, rezultă că barele AB şi CD au mişcări de translaţie.

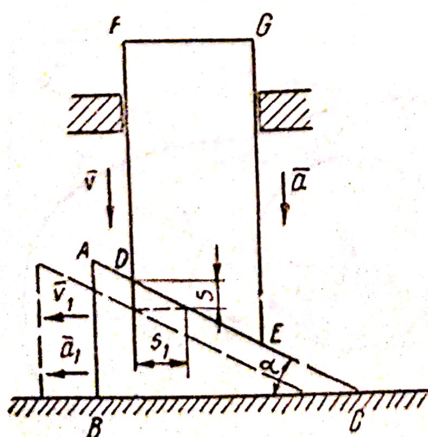


Fig. 10.B.1

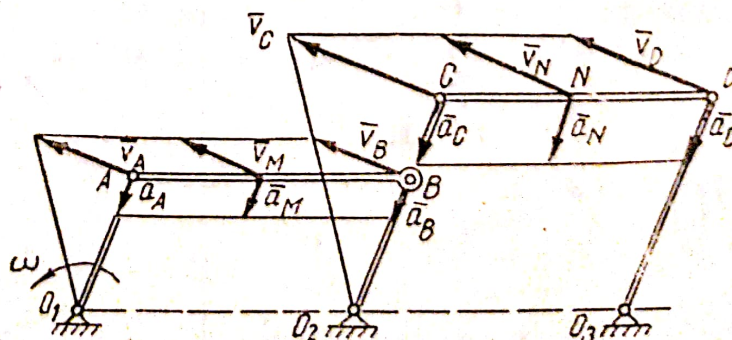


Fig. 10.B.2

La bara O_1A se poate calcula

$$v_A = \omega r; \quad a_A = \omega^2 r.$$

Datorită caracterului mişcării, rezultă:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_M; \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_M.$$

Bara O_2C are aceeaşi viteză unghiulară cu O_1A, deci:

$$v_C = \omega R; \quad a_C = \omega^2 R.$$

Ca şi la bara AB, se poate scrie şi la bara CD:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D = \bar{v}_N; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_D = \bar{a}_N.$$

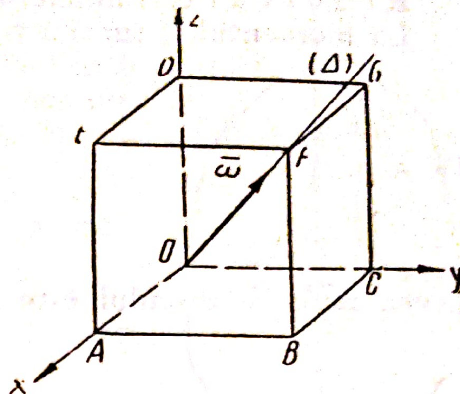


Fig. 10.B.3

10.B.3. Un cub rigid cu muchia l se roteşte în jurul diagonalei OF (fig. 10.B.3) cu viteza unghiulară $\omega = \varepsilon_0 t$, unde $\varepsilon_0 = \text{const}$. Să se calculeze viteza şi acceleraţia la un moment dat a vîrfurilor B şi D ale cubului.

Rezolvare. Expresia vitezei şi acceleraţiei unui punct al corpului este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Se vor exprima vectorii din expresiile lui $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ în raport cu sistemul de axe mobil $Oxyz$.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}); \quad \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k});$$

$$\bar{r}_B = l(\bar{i} + \bar{j}); \quad \bar{r}_D = l\bar{k}.$$

Efectuînd calculele, rezultă:

$$\bar{v}_B = l\varepsilon_0 t \frac{\sqrt{3}}{3}(-\bar{i} + \bar{j});$$

$$\bar{v}_D = l\varepsilon_0 t \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{i} - \bar{j});$$

$$\bar{a}_B = -\frac{l\varepsilon_0}{3}(\sqrt{3} + \varepsilon_0 t^2)\bar{i} + \frac{l\varepsilon_0}{3}(\sqrt{3} - \varepsilon_0 t^2)\bar{j} + \frac{2l\varepsilon_0^2 t^2}{3}\bar{k};$$

$$\bar{a}_D = \frac{l\varepsilon_0}{3}(\sqrt{3} + \varepsilon_0 t^2)\bar{i} - \frac{l\varepsilon_0}{3}(\sqrt{3} - \varepsilon_0 t^2)\bar{j} - \frac{2l\varepsilon_0^2 t^2}{3}\bar{k}.$$

Observaţie.
Mărimile vitezelor şi acceleraţiilor celor două puncte sînt egale deoarece ele se află la egală distanţă faţă de axa Δ.

10.B.4 În mişcarea de rotaţie a discului unu polizor se ştie că valoarea la un moment dat a unghiului la centru descris de la începutul mişcării este proporţinală cu puterea a doua a timpului. Să se calculeze viteza şi acceleraţia unui punct oarecare de pe periferia discului de rază R la momentul t_1, dacă după t_2 secunde de la începutul mişcării, discul are turaţia n_2 rot/min.

Aplicaţie numerică: $R = 7$ cm, $t_1 = 2$ s, $t_2 = 3$ s, $n_2 = 540$ rot/min.

R e z o l v a r e. Punînd $\theta = kt^2$, se obține $\omega = 2kt$.
La momentul t_2 turația fiind n_2, rezultă:

$$\frac{\pi n_2}{30} = 2kt_2.$$

De aici,

$$k = \frac{\pi n_2}{60 t_2}.$$

Legea mișcării discului este deci:

$$\theta = \frac{\pi n_2}{60 t_2} t^2.$$

La momentul t_1 viteza punctului de la raza R este:

$$v_1 = \frac{\pi R n_2 t_1}{30 t_2} = 2{,}64 \text{ m/s}.$$

Accelerația punctului este:

$$a_1 = \sqrt{a_{1t}^2 + a_{1n}^2} = \frac{\pi R n_2}{900 t_2^2} \sqrt{900 t_2^2 + \pi^2 n_2^2 t_1^4} \cong 99{,}5 \text{ m/s}^2.$$

10.B.5. Un volant în mișcare de rotație față de o axă fixă are la un moment dat viteza unghiulară ω_0. După N rotații făcute din acest moment, volantul se oprește din cauza frecărilor din lagăre. Să se determine accelerația unghiulară ε a volantului, presupusă constantă, viteza și accelerația unui punct de pe cercul de rază R la jumătatea intervalului de timp pînă la oprire. Aplicație numerică pentru $R = 20$ cm, $\omega_0 = 2\pi$ s^{-1}, $N = 10$ rotații.

R e z o l v a r e. Legea de mișcare este:

$$\theta = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{și} \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Pentru $t = t_1$ (oprire) $\omega = 0$ și $\theta = 2\pi N$.
Rezolvînd sistemul celor două ecuații, rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4\pi N} = \frac{\pi}{10} \text{ s}^{-2}; \quad t_1 = \frac{4\pi N}{\omega_0} = 20 \text{ s}.$$

Mijlocului intervalului îi corespunde timpul

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = 10 \text{ s}.$$

În acest moment viteza unghiulară a volantului este

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2} = \pi \text{ s}^{-1}.$$

Viteza punctului respectiv în acest moment este

$$v_2 = \frac{\omega_0}{2} R = 0{,}628 \text{ m/s}.$$

Accelerația punctului este

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{R}{10} \sqrt{\pi^2 + 100\pi^4} \simeq 1{,}96 \text{ m/s}^2.$$

10.B.6. În mișcarea elicoidală a unui solid rigid, un punct M situat la distanța R față de axa mișcării elicoidale are la un moment dat viteza $\bar{v}$, înclinată cu unghiul α față de axă — $|\bar{v}|$ și α fiind constante (fig. 10.B.6). Să se găsească vectorii caracteristici $\bar{v}_0$, $\bar{\omega}$ și accelerația punctului M.

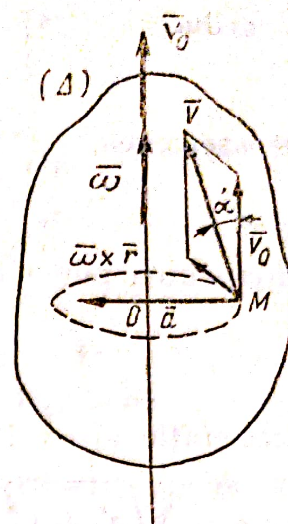


Fig. 10.B.6

R e z o l v a r e. Din distribuția de viteze a mișcării elicoidale

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

rezultă

$$|\bar{v}_0| = v \cos \alpha;$$

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega R = v \sin \alpha.$$

De aici, al doilea vector caracteristic:

$$\omega = \frac{v \sin \alpha}{R}.$$

Expresia accelerației este

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),$$

unde

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = 0; \quad \dot{\bar{\omega}} = 0.$$

Deci,

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),$$

iar mărimea a:

$$a = \omega^2 R = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{R}.$$

10.B.7. Se dă un șurub cu diametrul exterior d și pasul p care, plecînd din repaus, are după t_1 secunde turația n_1 rot/min. Să se găsească expresiile lui $\bar{v}_0$, $\bar{\omega}$, viteza și accelerația la momentul t_1 a unui punct de la periferia șurubului, considerînd mișcarea uniform accelerată.

R e z o l v a r e. La momentul t_1 viteza unghiulară a șurubului este

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}.$$

Din expresia vitezei unghiulare ca funcție de timp $\omega = \varepsilon t$, înlocuind ω_1 și t_1, rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\pi n_1}{30 t_1}.$$

Deci,

$$\omega = \frac{\pi n_1}{30 t_1} t.$$

Din relația între v_0 și ω la mișcarea de șurub

$$\frac{v_0}{\omega} = \frac{p}{2\pi},$$

se deduce

$$v_0 = \frac{pn_1}{60t_1} t.$$

De asemenea,

$$a_0 = \frac{pn_1}{60t_1}.$$

Viteza unui punct de pe periferia şurubului la momentul t_1 este:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{d}{2}\omega\right)^2} = \frac{n_1}{60}\sqrt{p^2 + \pi^2 d^2}.$$

Acceleraţia are valoarea:

$$a = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{d}{2}\dot{\omega}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\omega^2\right)^2} = \frac{n_1}{900t_1}\sqrt{225(p^2 + \pi^2 d^2) + \frac{\pi^4}{4} d^2 t_1^2 n_1^2}.$$

10.B.8. O glisieră G_1 sub formă de pană cu unghiul planului înclinat α este acţionată de o a doua glisieră G_2 pusă în mişcare de un şurub diferenţial, avînd porţiunea filetată cu pasul p_1 pe dreapta, iar cea cu pasul p_2 pe stînga (fig. 10.B.8). Se cere viteza de deplasare a glisierei G_1, dacă manivela de antrenare este rotită cu n ture pe minut.

Rezolvare. Viteza unghiulară a şurubului este:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Şurubul are o mişcare de înaintare cu viteza:

$$v_1 = \omega \frac{p_1}{2\pi} = \frac{p_1 n}{60}.$$

În raport cu şurubul, glisiera filetată G_2 se deplasează cu viteza:

$$v_2 = \omega \frac{p_2}{2\pi} = \frac{p_2 n}{60}.$$

În raport cu cadrul fix, ea va avea viteza

$$v = v_1 + v_2 = \frac{n(p_1 + p_2)}{60}.$$

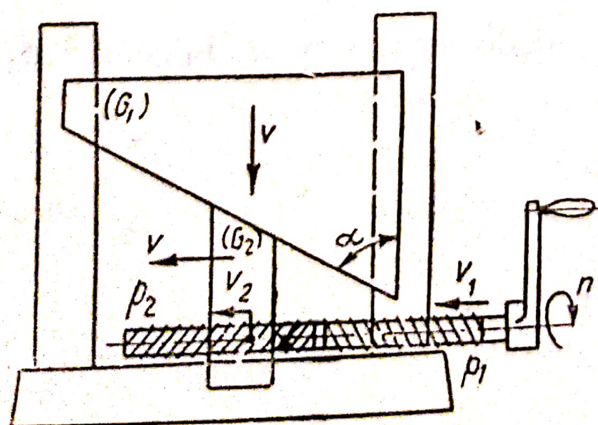


Fig. 10.B.8

Între deplasarea s a glisierei G_2 şi deplasarea s' a glisierei G_1 se poate stabili relaţia (v. problema 10.B.1):

$$s' = s \operatorname{ctg} \alpha.$$

Se obţine viteza v' a glisierei nefiletate G_1:

$$v' = \frac{n(p_1 + p_2)}{60} \operatorname{ctg} \alpha.$$

10.B.9. În mişcarea unui solid cu un punct fix (fig. 10.B.9), unghiurile lui Euler au următoarele expresii funcţie de timp:

$$\varphi = kt; \quad \psi = \frac{\pi}{2} + Ckt; \quad \theta = \frac{\pi}{3}\cdot$$

Considerînd k şi C constante, să se determine proiecţia vitezei instantanee de rotaţie pe axele sistemului fix. Ce valoare trebuie dată lui C, ca planul fix $Ox'y'$ să fie axoida fixă?

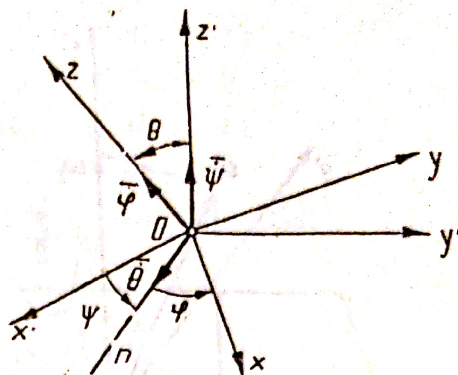


Fig. 10.B.9

Rezolvare. În figura 10.B.9 au fost reprezentate axele sistemelor de axe fix $(O'x'y'z')$, mobil $(Oxyz)$, unghiurile lui Euler şi vitezele unghiulare corespunzătoare.

Viteza instantanee de rotaţie are expresia:

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\varphi}} + \bar{\dot{\theta}}.$$

Proiectînd pe axele sistemului fix, se obţine

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi;$$

$$\omega_{y'} = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi;$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Derivînd ψ, φ şi θ şi înlocuind, rezultă:

$$\omega_{x'} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \cos (Ckt);$$

$$\omega_{y'} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \sin (Ckt);$$

$$\omega_{z'} = k\left(C + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

Dacă $Ox'y'$ este axoidă fixă, rezultă $\omega_{z'} = 0$. Deci,

$$C = -\frac{1}{2}\cdot$$

10.B.10. O placă de forma unui triunghi dreptunghic, cu catetele $OA = \frac{AB}{2} = c$ (fig. 10.B.10), se mişcă faţă de punctul fix O, cateta OA rămînînd în planul orizontal. Se cunosc viteza de rotaţie a plăcii în jurul catetei OA, $\omega_2 = \omega_0$ şi viteza de rotaţie a catetei în plan, $\omega_1 = 2\omega_0$, unde $\omega_0 =$ constant. La momentul iniţial triunghiul este perpendicular pe plan.

Să se calculeze expresiile vitezei şi acceleraţiei instantanee de rotaţie a plăcii în raport cu triedrul mobil, viteza şi acceleraţia vîrfului B al triunghiului în momentul în care placa este perpendiculară pe plan.

Rezolvare. Se alege un sistem de axe mobil, cu originea în O, conţinînd placa în planul Oxz. Placa, fiind verticală la momentul iniţial,

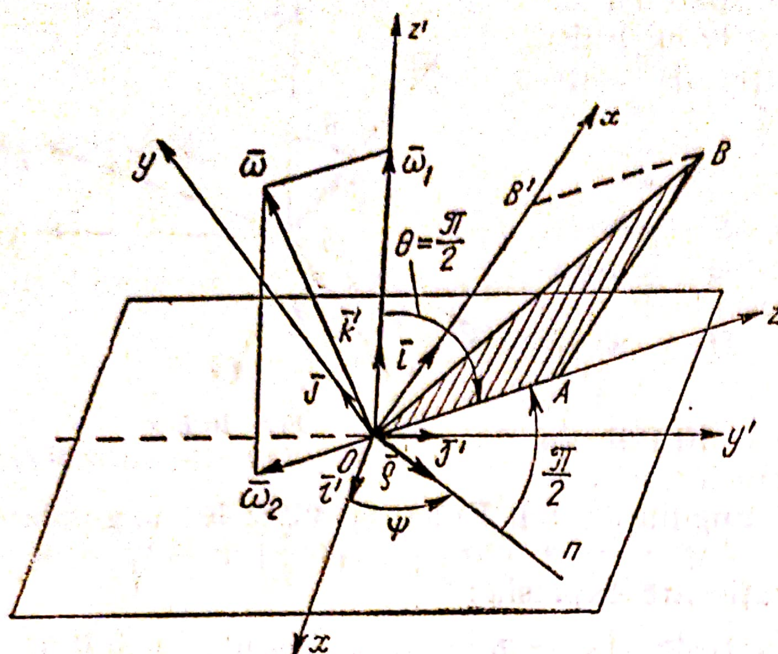


Fig. 10.B.10

axele Ox, Ox' şi linia nodurilor sînt suprapuse. Corespunzător datelor problemei, unghiurile lui Euler sînt:

$$\psi = \omega_1 t = 2\omega_0 t;$$

$$\varphi = \omega_2 t = \omega_0 t;$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Viteza instantanee de rotaţie este:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\varphi}}.$$

Pe triedrul mobil, proiecţiile vitezei unghiulare au expresiile:

$$\omega_x = \omega_1 \sin\varphi = 2\omega_0 \sin\omega_0 t;$$

$$\omega_y = \omega_1 \cos\varphi = 2\omega_0 \cos\omega_0 t;$$

$$\omega_z = -\omega_2 = -\omega_0.$$

Pentru cazul în care placa este verticală $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, cu $\cos\varphi = 0$ şi $\sin\varphi = \pm 1$, după cum axele Ox şi Oz' coincid sau sînt de sens contrar.

Viteza punctului $B(\bar{r}_B = 2c\bar{i} + c\bar{k})$ este:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \pm 2\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ 2c & 0 & c \end{vmatrix} = 2\omega_0 c(\pm 1 + 1)\bar{j}.$$

Rezultă: $\bar{v}_B = 4\omega_0 c\bar{j}$, cînd Ox este de acelaşi sens cu $O'z'$ şi $\bar{v}_B = 0$, cînd Ox este de sens contrar lui $O'z'$.

Acceleraţia instantanee de rotaţie este:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\bar{\omega}}_2.$$

Pentru derivare, se proiectează $\bar{\omega}_2$ pe sistemul de referinţă fix:

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 \sin\psi\bar{i}' - \omega_2 \cos\psi\bar{j}';$$

$$\dot{\bar{\omega}}_2 = 2\omega_0^2(\cos\psi\bar{i}' + \sin\psi\bar{j}') = 2\omega_0^2\bar{\rho},$$

unde $\bar{\rho}$ este versorul liniei nodurilor (intersecţia planurilor xOy şi $O'x'y'$).

Pe axele triedrului mobil proiecţiile lui $\dot{\bar{\omega}}$ sînt:

$$\dot{\omega}_x = 2\omega_0^2 \cos\varphi = 2\omega_0^2 \cos\omega_0 t;$$

$$\dot{\omega}_y = -2\omega_0^2 \sin\varphi = -2\omega_0^2 \sin\omega_0 t;$$

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

Expresia lui $\bar{a}_B$ este:

$$\bar{a}_B = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_B) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \mp 2\omega_0^2 & 0 \\ 2c & 0 & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \pm 2\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 2\omega_0 c(\pm 1 + 1) & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_0^2 c\bar{i} \pm 4\omega_0^2 c(2 \pm 1)\bar{k}.$$

Rezultă accelerația:

$$\bar{a}_B = 2\omega_0^2 c\bar{i} + 12\omega_0^2 c\bar{k}; \ |\bar{a}_B| = 2\omega_0^2 c\sqrt{37},$$

cînd axele Ox și $O'z'$ sînt în același sens și

$$\bar{a}_B = 2\omega_0^2 c\bar{i} - 4\omega_0^2 c\bar{k}, \ |\bar{a}_B| = 2\omega_0^2 c\sqrt{5},$$

cînd axa Ox este de sens contrar lui $O'z'$.

10.B.11. Două roți solidare de raze R și r (fig. 10.B.11) sînt antrenate simultan cu două cremaliere, imprimîndu-se punctelor A și B vitezele cunoscute $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$. Să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, viteza unghiulară instantanee și viteza centrului comun al celor două roți.

Rezolvare. Se găsește poziția centrului instantaneu de rotație ținînd seama că distribuția de viteze față de acest punct este aceeași ca la mișcarea de rotație.

Din asemănarea triunghiurilor formate, rezultă:

$$IB = \frac{v_2(R + r)}{v_1 - v_2}.$$

Cu poziția lui I determinată, rezultă:

$$\omega = \frac{v_2}{IB} = \frac{v_1 - v_2}{R + r} \text{ și } v_0 = \omega IO = \frac{v_1 R + v_2 r}{R + r},$$

10.B.12. Se consideră mecanismul din figura 10.B.12, format din barele O_1A, AB, CD și O_2D avînd lungimile cunoscute. Să se determine, în poziția considerată, vitezele punctelor A, B, C, D și viteza unghiulară a barei O_2D.

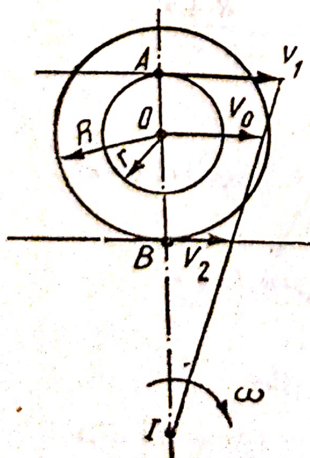


Fig. 10.B.11

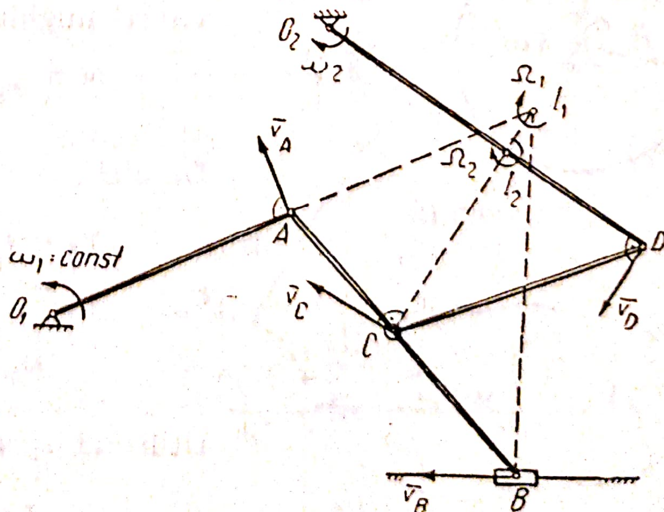


Fig. 10.B.12

Rezolvare. Bara O_1A execută o mișcare de rotație. Viteza punctului A va fi: $\bar{v}_A = O_1A\omega_1$. Bara AB are mișcare plan-paralelă, cu centrul instantaneu în I_1.
Cunoscînd viteza punctului A, se poate deduce:

$$\Omega_1 = \frac{O_1A}{I_1A}\omega_1; \quad v_B = \frac{I_1B \cdot O_1A}{I_1A}\omega_1; \quad v_C = \frac{I_1C \cdot O_1A}{I_1A}\omega_1.$$

Centrul instantaneu al mișcării barei CD se află în punctul I_2, în raport cu care se scrie:

$$v_C = I_2C\Omega_2; \quad v_D = I_2D\Omega_2.$$

Ținînd seama de expresia lui v_C de mai sus, se deduce:

$$\Omega_2 = \frac{I_1C \cdot O_1A}{I_1A \cdot I_2C}\omega_1; \quad v_D = \frac{I_1C \cdot O_1A \cdot I_2D}{I_1A \cdot I_2C}\omega_1.$$

În sfîrșit, viteza ω_2 va fi:

$$\omega_2 = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{I_1C \cdot O_1A \cdot I_2D}{I_1A \cdot I_2C \cdot O_2D}\omega_1.$$

10.B.13. La mecanismul din figura 10.B.13, roata de rază r se rostogolește fără alunecare pe periferia discului fix de rază R, fiind condusă de manivela OA. Pe periferia roții mobile este articulată biela BC de lungime l. La momentul considerat, AB este perpendicular pe OA. Să se calculeze vitezele instantanee de rotație ale roții mobile și bielei, vitezele punctelor B și C.

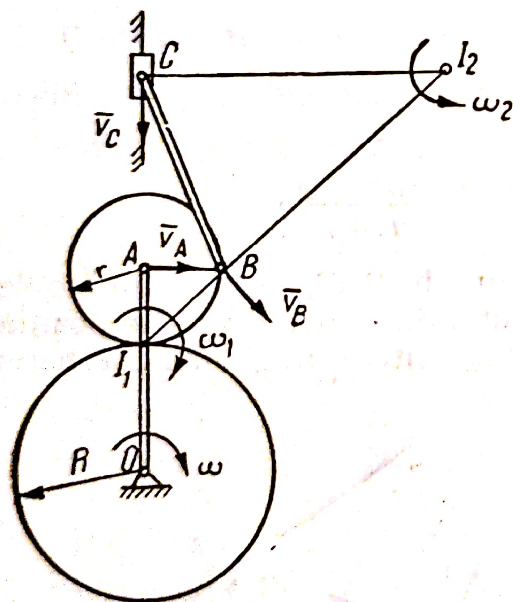


Fig. 10.B.13

Rezolvare. Se poate determina imediat viteza punctului A:

$$v_A = \omega(R + r).$$

Determinîndu-se poziția centrelor instantanee de rotație I_1 și I_2 pentru roata mobilă și pentru bielă, cu ajutorul lui $\bar{v}_B$ se stabilesc sensul și mărimea celor două viteze unghiulare instantanee:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{I_1A} = \omega\frac{R + r}{r}.$$

De aici,

$$v_B = \omega_1; \; I_1B = \omega\sqrt{2}(R + r)$$

și

$$\omega_2 = \frac{v_B}{I_2B} = \frac{\omega(R + r)}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Utilizînd I_2 se poate găsi:

$$v_c = \omega_2 I_2C = \frac{\omega(R + r)(r + \sqrt{l^2 - r^2})}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

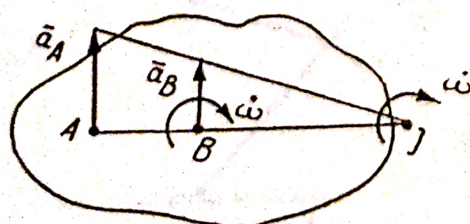


Fig. 10.B.14

10.B.14. În mişcarea plană a unei plăci se cunosc la un moment dat acceleraţiile $a_A = 3a_0$, $a_B = 2a_0$ perpendiculare în acelaşi sens pe dreapta $AB = l$ (fig. 10.B.14). Să se găsească polul acceleraţiilor J, viteza şi accelerația unghiulară a plăcii în momentul considerat.

R e z o l v a r e. Se poate scrie:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}.$$

Deoarece $\bar{a}_B - \bar{a}_A$ este coliniar cu $\dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB}$, rezultă:

$$(\omega)^2 \overline{AB} = 0.$$

Cum $\overline{AB} \neq 0$, rezultă că viteza instantanee de rotaţie a barei în momentul respectiv este $\omega = 0$.
Se poate calcula:

$$\dot{\omega} = \frac{a_A - a_B}{AB} = \frac{a_0}{l},$$

avînd sensul de pe figură.
Pentru polul acceleraţiilor,

$$\text{tg } \varphi = \infty \quad \text{deci} \quad \varphi = \pi/2$$

şi

$$BJ = \frac{a_B}{\dot{\omega}} = 2l,$$

măsurat la dreapta punctului B.
Ca sens fizic, $\omega = 0$ şi $\dot{\omega} \neq 0$ poate corespunde momentului iniţial al mişcării.

10.B.15. O placă de formă triunghi echilateral cu latura l, în mişcare plană, are la un moment dat acceleraţiile cunoscute $|\bar{a}_A| = |\bar{a}_B| = a_0$ dirijate ca în figura 10.B.15, *a*. Să se determine acceleraţia punctului C în momentul considerat.

R e z o l v a r e. Considerînd A originea sistemului de axe mobil, se poate scrie:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}.$$

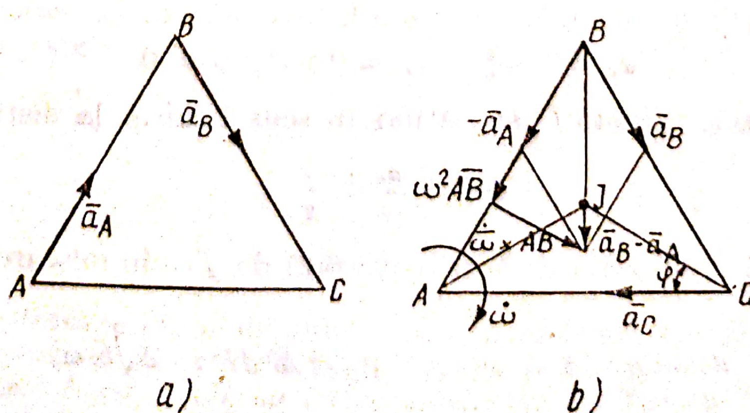


Fig. 10.B.15

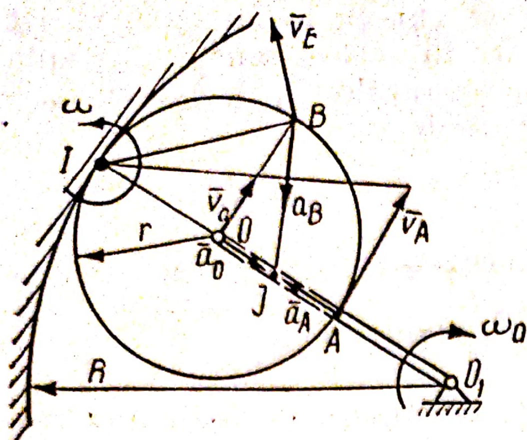


Fig. 10.B.16

Descompunînd $\bar{a}_B - \bar{a}_A$ după direcţia perpendiculară pe AB şi de-a lungul lui AB (fig. 10.B.15, *b*), se obţin componentele tangenţială, respectiv, normală ale acceleraţiei de rotaţie a lui B faţă de A:

$$\bar{a}^t_{BA} = \bar{\dot{\omega}} \times \overline{AB}; \quad \bar{a}^n_{BA} = \omega^2 \overline{AB}.$$

Din construcţia grafică, rezultă:

$$\dot{\omega} = \frac{a^t_{BA}}{AB} = \frac{a_0\sqrt{3}}{2l}; \quad \omega^2 = \frac{a^n_{BA}}{AB} = \frac{3a_0}{2l}.$$

Pentru găsirea polului acceleraţiilor, se calculează:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad (\varphi = 30°)$$

$$AJ = \frac{a_A}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Polul acceleraţiilor este situat la intersecţia bisectoarelor triunghiului echilateral.

10.B.16. Manivela $O_1O = 2r$ se roteşte cu $\omega_0 =$ const. în jurul lui O_1 (fig. 10.B.16). Ea conduce în mişcare plană un disc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în interiorul suprafeţei cilindrice de rază $R = 3r$. Să se calculeze vitezele şi acceleraţiile punctelor A şi B ale discului.

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotaţie în mişcarea discului este la punctul de tangenţă cu suprafaţa cilindrică. Deci:

$$\omega = \frac{v_0}{OI} = \frac{2r\omega_0}{r} = 2\omega_0.$$

În raport cu I se pot calcula:

$$v_A = \omega IA = 4r\omega_0; \quad v_B = \omega IB = 2\sqrt{2}r\omega_0.$$

Pentru determinarea acceleraţiei, se stabileşte poziţia polului acceleraţiilor, cunoscînd:

$$a_0 = 2r\omega_0^2; \quad \dot{\omega} = 0; \quad \text{tg}\,\varphi = 0.$$

Deci, polul acceleraţiilor J este situat în sensul lui $\bar{a}_0$ la distanţa:

$$OJ = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{r}{2}.$$

Considerînd distribuţia de acceleraţii faţă de J ca în mişcarea de rotaţie, rezultă:

$$a_A = \omega^2 JA = 2r\omega_0^2; \quad a_B = \omega^2 JB = 2\sqrt{5}r\omega_0^2.$$

Capitolul 11

CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI

11.A. PREZENTARE TEORETICĂ

11.A.1. Datele problemei

Mişcarea *relativă* şi mişcarea *absolută* a punctului au fost definite la Capitolul 10.

Folosind aceleaşi notaţii, $M(x, y, z)$ este un punct oarecare al solidului (C) raportat la triedrul $Oxyz$ solidar cu (C).

Poziţia triedrului $Oxyz$ în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$ este determinată în orice moment cu ajutorul vectorilor: $\bar{r}(t)$, $\bar{i}(t)$, $\bar{j}(t)$ şi $\bar{k}(t)$, funcţiuni date de timp.

Mişcarea triedrului $Oxyz$ şi a solidului (C) este caracterizată prin vectorii: $\bar{v}_0(t) = \dot{\bar{r}}_0(t)$, $\bar{\omega}(t)$ şi derivatele lor: $\bar{a}_0(t)$, $\dot{\bar{\omega}}(t)$.

În mişcarea *relativă* a punctului $M(x, y, z)$ în raport cu $Oxyz$, poziţia lui M este dată de $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, în care $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$ sînt funcţii date de timp, iar $\bar{i}$, $\bar{j}$, şi $\bar{k}$ sînt *presupuse* independente de timp.

Deci, viteza relativă şi acceleraţia relativă a punctului M faţă de triedrul $Oxyz$ sînt:

$$\bar{v}_r = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}. \tag{11.1}$$

În mişcarea *absolută* a punctului M în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, vectorul de poziţie este dat, în momentul t, prin relaţia:

$$\bar{r}' = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{11.2}$$

11.A.2. Necunoscutele problemei

Fiind date *mişcarea relativă* a punctului M în raport cu (C) şi mişcarea triedrului $Oxyz$, solidar cu (C), în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, se cere *mişcarea absolută* a punctului M în raport cu triedrul fix.

Viteza absolută $\bar{v}_a$, din momentul t, a punctului mobil, dedusă din (11.2), prin derivare este:

$$\bar{v}_a = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}} = \bar{v}_0 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \tag{11.3}$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_t + \bar{v}_r, \tag{11.3 bis}$$

unde:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{11.4}$$

este *viteza de transport* a mobilului, ca o consecinţă a mişcării solidului (C) în raport cu triedrul fix. Prin definiţie, *viteza de transport* $\bar{v}_t$, *în momentul* t, *a punctului mobil, este egală cu viteza punctului, solidar cu* (C), *cu care în momentul considerat, mobilul coincide.*

Accelerația absolută $\bar{a}_a$ din momentul t, a punctului mobil, dedusă din (11.3) este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_0 + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + 2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}), \quad (11.5)$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \quad (11.5 \text{ bis})$$

unde:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (11.6)$$

este accelerația de transport a mobilului. Prin definiție: *accelerația de transport* $\bar{a}_t$ *din momentul* t, *a punctului mobil este egală cu accelerația punctului solidar cu* (C), *cu care în momentul considerat, mobilul coincide.*

Accelerația Coriolis $\bar{a}_c$ sau accelerația complementară se exprimă vectorial prin:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r; \quad (11.7)$$

se anulează în următoarele cazuri:

$$\bar{\omega} = 0 \text{ sau } \bar{v}_r = 0 \text{ sau } \bar{v}_r \text{ paralel cu } \bar{\omega}.$$

Observație

Expresia vectorială a accelerației absolute este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{a}_r + 2\omega \times \bar{v}_r. \quad (11.8)$$

11.B. APLICAȚII LA CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI

11.B.1. O barcă se deplasează într-un rîu cu vitaza constantă v_1 în raport cu apa. Viteza curentului apei v_2 este constantă pe toată lățimea l a rîului.

Să se determine:

— viteza absolută a bărcii;

— în ce direcție trebuie să se traverseze rîul pentru ca pornind din A să se atingă malul opus în B (fig. 11.B.1);

— în ce direcție trebuie să se traverseze rîul, pentru ca timpul de traversare să fie minim.

Rezolvare. Viteza relativă a bărcii în raport cu apa: $v_r = v_1$.

Viteza de transport este viteza curentului apei: $v_t = v_2$.

Viteza absolută este: $|\bar{v}_a| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$, unde s-a notat cu α unghiul dintre viteza relativă și mal, iar cu β unghiul dintre viteza absolută și mal.

Proiectînd v_1 și v_a pe direcția AB se obține:

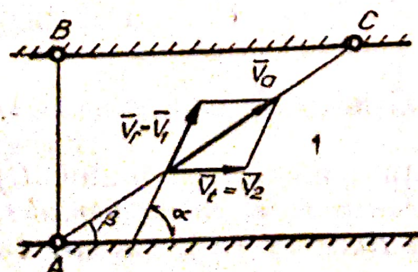


Fig. 11.B.1

$$v_1 \sin \alpha = v_a \sin \beta,$$

de unde

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_a}.$$

Înlocuind pe v_a:

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}}.$$

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$, rezultă că $v_a = v_1 + v_2$ (barca merge în acelaşi sens cu curentul).

Pentru $\alpha = \pi \Rightarrow \beta = 0°$ sau $180°$, rezultă că $v_a = |v_1 - v_2|$ (v_1 fiind împotriva curentului, barca se va deplasa cu v_a în sensul vitezei mai mari dintre v_1 şi v_2).

Pentru ca barca, pornind din A, să ajungă în B trebuie ca:

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\beta = 1,$$

deci:

$$v_1 \sin\alpha = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Ridicînd la pătrat şi grupînd, se obţine:

$$v_1^2\cos^2\alpha + 2v_1v_2\cos\alpha + v_2^2 = 0,$$

de unde:

$$\cos\alpha = -\frac{v_2}{v_1} \quad \text{şi} \quad v_a = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}.$$

Cosinusul fiind negativ, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, iar barca poate ajunge în B numai dacă $v_1 > v_2$.

Timpul de traversare a rîului este:

$$t = \frac{AC}{v_a} = \frac{l}{\sin\beta v_a} = \frac{l}{v_1\sin\alpha}.$$

Timpul minim se obţine pentru:

$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}.$$

Viteza absolută este, în acest caz:

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

iar unghiul β:

$$\sin\beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

11.B.2. Un disc de rază R se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul unei axe perpendiculare în centrul O pe planul său. Pe periferia discului se deplasează un punct M cu viteza u constantă în modul. Să se determine viteza absolută şi acceleraţia absolută a punctului M, la un moment dat (fig. 11.B.2).

R e z o l v a r e. Viteza relativă: $v_r = u$.

Discul avînd o mişcare de rotaţie, viteza de transport a punctului M este:

$$v_t = \omega_0 R.$$

Viteza absolută:

$$|\bar{v}_a| = |\omega_0 R - u|.$$

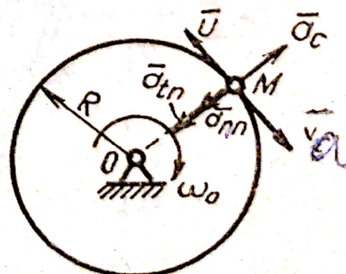


Fig. 11.B.2

Accelerația relativă a punctului are componentele:

$$a_{rt} = \dot{u} = 0, \text{ deoarece } |\bar{u}| \text{ este constant},$$

$$a_{rn} = \frac{u^2}{R}.$$

Accelerația de transport are componentele:

$$a_{tt} = \dot{\omega}_0 R = 0 \text{ deoarece } \omega_0 \text{ este constant},$$

$$a_{tn} = \omega_0^2 R.$$

Accelerația Coriolis are direcția și sensul determinate de produsul vectorial $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ (fig. 11.B.2), iar modulul:

$$|\bar{a}_c| = 2\omega_0 u \sin 90°.$$

Accelerația absolută este:

$$|\bar{a}_a| = |a_{rn} + a_{tn} - a_c| = \left|\frac{u^2}{R} + \omega_0^2 R - 2\omega_0 u\right|.$$

X **11.B.3.** Un tub se rotește în jurul unei axe verticale cu viteza unghiulară $\omega = 2t$. Tubul este înclinat cu un unghi de 30°, invariabil, față de axă (fig. 11.B.3, *a*).
Un punct mobil *M* se deplasează în interiorul tubului de la *O* spre *A* cu viteza $\bar{u}$ constantă. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului mobil *M* la un moment dat.

R e z o l v a r e. Mișcarea relativă a punctului *M* este rectilinie, cu viteza relativă $v_r = u$ constantă, avînd direcția barei.

Bara *OA* avînd o mișcare de rotație în jurul axei *O'O*, viteza de transport a punctului *M* are direcția tangentei la cercul de rază *O'M*, sensul

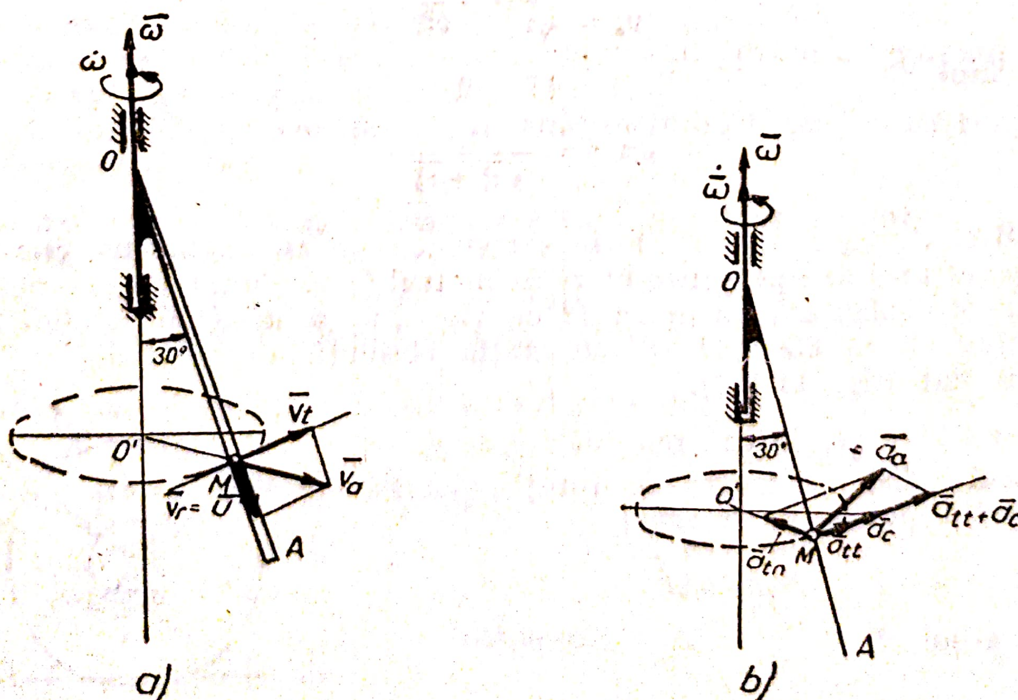


Fig. 11.B.3

dat de ω, iar modulul: $v_t = \omega\, O'M$; dar $O'M = OM \sin 30°$, iar $OM = s_r = ut$, drumul parcurs în mişcarea relativă de mobilul M;

deci

$$v_t = \omega \frac{ut}{2} = ut^2.$$

Viteza absolută a punctului M va avea direcţia şi sensul rezultate din compunerea vectorilor $\bar{v}_r$ şi $\bar{v}_t$ (fig. 11.B.3, a), iar modulul:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = u\sqrt{1 + t^4}.$$

Acceleraţia relativă a punctului $a_r = \dot{v}_r = 0$.

Acceleraţia de transport a punctului M are componentele:

$$a_{tt} = \dot{\omega} O'M,$$

cum $\dot{\omega} = 2$, iar $O'M = \frac{ut}{2}$, rezultă: $a_{tt} = ut$, şi $a_{tn} = \omega^2 O'M = 2ut^3$.

Acceleraţia Coriolis are direcţia şi sensul dat de produsul vectorial $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ (fig. 11.B.3, b), iar modulul:

$$|\bar{a}_c| = 2 \cdot 2ut \sin 150° = 2ut.$$

Acceleraţia absolută rezultă din compunerea vectorilor $\bar{a}_{tt}$, a_{tn} şi a_c (fig. 11.B.3, b), avînd modulul:

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{(a_{tt} + a_c)^2 + a_{tn}^2} = ut\sqrt{9 + 4t^4}.$$

11.B.4. Se dă mecanismul din figura 11.B.4, a, format din trei bare articulate, în plan: $OA = AB = BC = OC = l$. Bara OA are o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară ω_0 constantă, în jurul unei axe perpendiculare în O pe planul mecanismului, O fiind o articulaţie fixă.

Pe bara AB se deplasează un punct mobil M după legea $AM = \frac{t^2}{2}$.

În momentul iniţial bara OA ocupă poziţia OC, iar punctul M se află în A. Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului M la un moment dat.

R e z o l v a r e. Viteza relativă a punctului M are direcţia barei AM: $v_r = \dot{s}_r$; dar cum $s_r = AM = \frac{t^2}{2}$, rezultă: $v_r = t$.

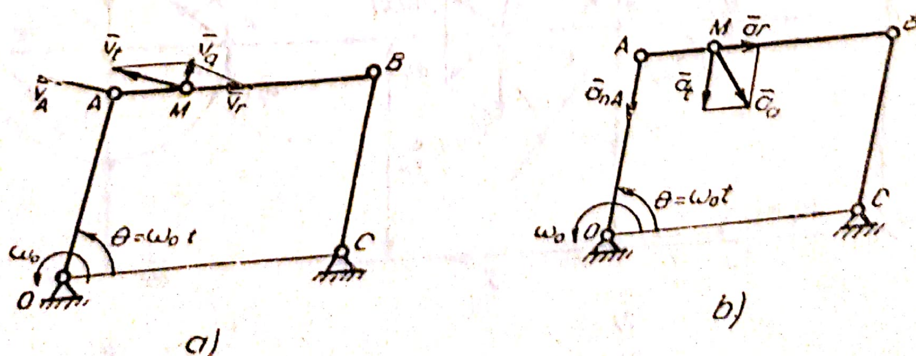


Fig. 11.B.4

Bara AB are o mişcare de translaţie circulară, viteza de transport a punctului M fiind egală cu viteza punctului A:

$$v_t = v_A = \omega_0 l,$$

unde v_A este perpendiculară pe OA, în sensul dat de ω_0 (fig. 11.B.4, *a*).

Viteza absolută a punctului M rezultă din compunerea lui $\bar{v}_r$ şi $\bar{v}_t$ (fig. 11.B.4, *a*), modulul fiind:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(90 + \theta)} = \sqrt{t^2 + \omega_0^2 l^2 - 2\omega_0 l \sin \omega_0 t}.$$

În figura 11.B.4, *b* s-a construit compunerea acceleraţiilor.

Acceleraţia relativă $a_r = \dot{v}_r = 1$.

Acceleraţia de transport a punctului M este egală cu acceleraţia punctului A, mişcarea barei AB fiind de translaţie; punctul A are numai acceleraţie normală, ω_0 fiind constant:

$$a_t = a_{nA} = \omega_0^2 l.$$

Acceleraţia Coriolis: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0$, bara AB avînd o mişcare de translaţie ($\omega = 0$).

Acceleraţia absolută este:

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2 + 2a_r a_t \cos(180 - \theta)} = \sqrt{1 + \omega_0^4 l^2 - 2\omega_0^2 l \cos \omega_0 t}.$$

11.B.5. Un cerc de rază R se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega_t = \omega_0$ în jurul unei axe orizontale, conţinută în planul cercului şi situată la distanţa $2R$ de centrul C al acestuia (fig. 11.B.5, *a*). Un punct se deplasează pe circumferinţa cercului de rază R, avînd o mişcare circulară cu viteza unghiulară $\omega_{rel} = 2\omega_0$, constantă.

Să se determine vitezele şi acceleraţiile absolute ale mobilului punctual în poziţiile A, B şi D.

R e z o l v a r e. În mişcarea relativă pe cercul de rază R cu $\omega_{rel} = 2\omega_0$ vitezele liniare ale mobilului punctual sînt egale în modul pentru cele trei poziţii, direcţiile şi sensurile acestora fiind indicate în figura 11.B.5, *a*:

$$|\bar{v}_{rA}| = |\bar{v}_{rB}| = |\bar{v}_{rD}| = \omega_{rel} R = 2\omega_0 R.$$

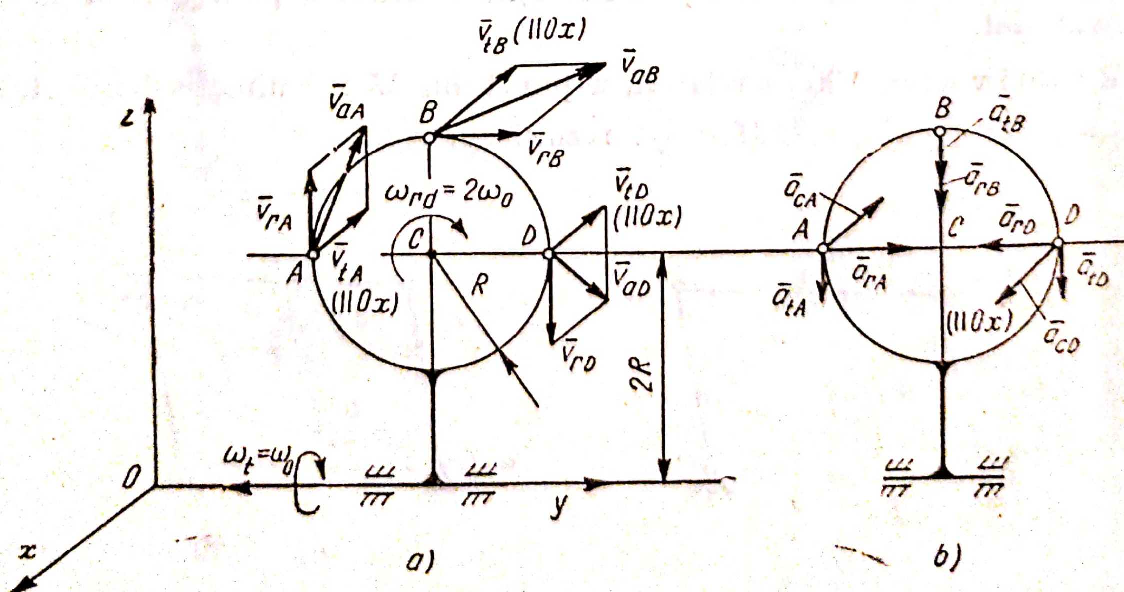


Fig. 11.B.5

Vitezele de transport ale punctelor A, B şi D ale cercului sînt date de mişcarea de rotaţie a acestuia cu $\omega_t = \omega_0$:

$$|\bar{v}_{tA}| = |\bar{v}_{tD}| = \omega_t 2R = \omega_0 2R; \quad |\bar{v}_{tB}| = \omega_t \cdot 3R = \omega_0 3R.$$

Vitezele absolute ale mobilului punctual se obţin prin compunerea vectorilor $\bar{v}_r$ şi $\bar{v}_t$ pentru fiecare poziţie (fig. 11.B.5, a):

$$|\bar{v}_{aA}| = \sqrt{v_{rA}^2 + v_{tA}^2} = 2\sqrt{2}\omega_0^2 R;$$

$$|\bar{v}_{aB}| = \sqrt{v_{rB}^2 + v_{tB}^2} = \sqrt{13}\omega_0^2 R;$$

$$|\bar{v}_{aD}| = \sqrt{v_{rD}^2 + v_{tD}^2} = 2\sqrt{2}\omega_0^2 R.$$

Acceleraţiile relative ale mobilului punctual au numai componente normale, $\omega_{rel} = 2\omega_0$ fiind constant, şi sînt egale în modul pentru cele trei poziţii, direcţiile şi sensurile acestora fiind reprezentate în figura 11.B.5, b:

$$|\bar{a}_{rA}| = |\bar{a}_{rB}| = |\bar{a}_{rD}| = \omega_{rel}^2 R = 4\omega_0^2 R.$$

Acceleraţiile de transport ale punctelor A, B şi D ale cercului au de asemenea numai componente normale, $\omega_t = \omega_0$ fiind constant:

$$|\bar{a}_{tA}| = |\bar{a}_{tD}| = \omega_t^2 2R = \omega_0^2 2R; \quad |\bar{a}_{tB}| = \omega_z^2 3R = \omega_0^2 3R.$$

Acceleraţiile Coriolis sînt egale în modul pentru poziţiile A şi D, direcţiile şi sensurile fiind reprezentate în figura 11.B.5, b, ca rezultat al produsului vectorial $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$:

$$|\bar{a}_{cA}| = |\bar{a}_{cD}| = 2\omega_0 2\omega_0 R \sin\frac{\pi}{2} = 4\omega_0^2 R.$$

Pentru poziţia B, rezultă:

$$|\bar{a}_{cB}| = 2\omega_0 \cdot 2\omega_0 R \sin\pi = 0.$$

Acceleraţiile absolute ale mobilului punctual se obţin prin compunerea vectorilor $\bar{a}_r$, $\bar{a}_t$ şi $\bar{a}_c$ pentru fiecare poziţie (fig. 11.B.5, b), modulele lor fiind:

$$|\bar{a}_{aA}| = \sqrt{a_{rA}^2 + a_{tA}^2 + a_{cA}^2} = 6\omega_0^2 R,$$

$$|\bar{a}_{aB}| = a_{rB} + a_{tB} = 7\omega_0^2 R,$$

$$|\bar{a}_{aD}| = \sqrt{a_{rD}^2 + a_{tD}^2 + a_{cD}^2} = 6\omega_0^2 R.$$

Capitolul 12

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER ȘI CU LEGĂTURI

12.A. PREZENTARE TEORETICĂ

12.A.1. Generalități

În plus față de cinematică, în dinamica punctului material apar:

Masa punctului material (m), *masă inertă* sau masă *gravifică*, independentă de mișcare (viteză), constantă sau variabilă:

$$m = m(t), \text{ în cazul rachetelor etc.}$$

Forța este o caracteristică instantanee a procesului complex de interacțiune, cauza modificării mișcării mecanice (adică a accelerației punctului material) și care face legătura dintre această formă și alte forme nemecanice de mișcare.

Observație

Un sistem material oarecare poate să acționeze un punct material. În dinamica punctului material se va reprezenta această acțiune printr-o forță fără a se lua în considerare și reacțiunea punctului material asupra sistemului[1].

Natura fizică a forței se poate reflecta uneori în expresia matematică a ei. După natura interacțiunii în expresia forței apar relații între mase, distanțe, unghiuri, timp, viteze etc. Astfel:

Greutatea unui corp la suprafața Pămîntului este o forță constantă în direcție, sens și modul $(\bar{F}_0)$.

Forța de atracție newtoniană este funcție de mase și de distanțe: $f = -K\dfrac{mM}{r^2}$.

Rezistența unui mediu la mișcarea unui solid, depinde de viteză și de alte caracteristici ale mediului și ale suprafeței de contact: $\bar{R} = kf(\bar{v})$.

Forțele electromagnetice depind între altele și de timp: $\bar{F} = \bar{F}(t)$.

Forțele elastice depind de deformarea sistemului elastic care acționează și au, potrivit legii lui Hooke, expresii de forma:

$$\bar{F} = -K\bar{r}; \qquad K > 0.$$

Atenție. Constanta K nu este aceeași în expresiile precedente.

Expresia generală a forței care acționează punctul material se poate pune sub forma: $\bar{F} = \bar{F}(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r})$.

---

[1] Se știe că principiul egalității acțiunii și reacțiunii nu e valabil pentru orice forme de interacțiuni ale sistemelor materiale.

12.A.2. **Problemele generale ale dinamicii punctului material liber**

a) *Problema directă.* Cunoscîndu-se mişcarea punctului material liber, de masă constantă dată, să se determine rezultanta forţelor care acţionează punctul.

Date: $m, \bar{r} = \bar{r}(t)$.

Răspuns: $\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}(t)$.

Soluţia, deşi este unică din punct de vedere matematic, nu dă nici o indicaţie asupra naturii fizice a rezultantei, ceea ce este evident deoarece o aceeaşi expresie matematică poate corespunde la mai multe fenomene fizice.

b) *Problema inversă.* Cunoscîndu-se forţele care acţionează punctul material liber, de masă constantă dată, să se determine mişcarea.

Date: $m, \bar{F} = \bar{F}(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r})$ forţa rezultantă.

Răspuns: Mişcarea se determină integrînd ecuaţia diferenţială vectorială de ordinul II:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F}(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r}) = 0, \qquad (12.1)$$

necunoscută fiind:

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

sau prin integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale scalare:

$$m\ddot{x} - X(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = 0; \quad m\ddot{y} - Y(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = 0;$$

$$m\ddot{z} - Z(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = 0 \qquad (12.2)$$

necunoscutele sînt:

$$x = \mathrm{x}(t); \quad y = \mathrm{y}(t); \quad z = \mathrm{z}(t),$$

coordonatele carteziene ale punctului material mobil.

12.A.3. **Integrala generală a ecuaţiilor diferenţiale**

Dacă sînt îndeplinite condiţiile teoriei ecuaţiilor diferenţiale din (12.1) se poate ajunge la:

$$\bar{r} = \bar{r}(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2), \qquad (12.3)$$

iar din (12.2), la:

$$x = \mathrm{x}(t, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}); \quad y = \mathrm{y}(t, C_{11}, \ldots, C_{23});$$

$$z = \mathrm{z}(t, C_{11}, \ldots, C_{23}), \qquad (12.4)$$

în care (12.3), respectiv (12.4) reprezintă integrala generală a mişcării, iar $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, respectiv $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{23}$ sînt constantele de integrare.

Deoarece integrala generală, sub forma (12.3), respectiv sub forma (12.4), verifică ecuaţia (12.1), respectiv ecuaţiile (12.2), indiferent care ar fi valorile constantelor de integrare, înseamnă că mişcarea unui punct material sub acţiunea unei anumite forţe date se poate produce într-o infinitate de moduri.

Pentru ca mișcarea punctului material să fie univocă se consideră că în momentul $t = 0$ punctul material trece prin poziția $M_0(\bar{r}_0)$, respectiv $M_0(x_0, y_0, z_0)$, cu viteza $\bar{v}_0$, respectiv $(\dot{x})_0$, $(\dot{y})_0$, $(\dot{z})_0$, adică:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2) \quad \text{și} \quad \bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2) \tag{12.5}$$

sau

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_{11}, \ldots, C_{23}); & (\dot{x})_0 &= \dot{x}(0, C_{11}, \ldots, C_{23}); \\ y_0 &= y(0, C_{11}, \ldots, C_{23}); & (\dot{y})_0 &= \dot{y}(0, C_{11}, \ldots, C_{23}); \\ z_0 &= z(0, C_{11}, \ldots, C_{23}); & (\dot{z})_0 &= \dot{z}(0, C_{11}, \ldots, C_{23}). \end{aligned} \tag{12.6}$$

Deci, pentru ecuația diferențială vectorială (12.1) condițiile inițiale ale mișcării (12.5) sînt condiții de unicitate ale soluției. În mod corespunzător pentru sistemul de ecuații diferențiale scalare (12.2), condițiile inițiale (12.6) fac ca soluția să fie unică.

În teoria ecuațiilor diferențiale se pun și condiții pentru existența soluției, însă, în problemele fizicii, ale mecanicii, nu se pun asemenea condiții deoarece așa după cum se poate constata din analiza de la punctul 1, expresiile matematice ale forțelor considerate reflectă natura fizică a fenomenelor care le produc. *Sînt forțe reale și nu funcțiuni matematice arbitrare.*

12.A.4. Ecuații diferențiale în alte sisteme de referințe

In raport cu triedrul natural (Frenet). Raportarea la axele triedrului natural a ecuației vectoriale (12.1) dă ecuațiile:

$$m\dot{v} - F_t = 0, \quad m\frac{v^2}{R} - F_n = 0 \quad \text{și} \quad 0 - F_b = 0,$$

unde F_t, F_n, F_b sînt scalarii proiecțiilor forței $\bar{F}$ pe axele triedrului, iar celelalte notații sînt cunoscute de la cinematica punctului (Cap. 9).

In coordonate cilindrice, compuse din coordonate polare (r, θ) în plan și axa Oz pentru spațiu (fig. 12.A.1), ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - F_\rho = 0; \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - F_\nu = 0$$

și

$$m\ddot{z} - Z = 0,$$

în care F_ρ și F_ν sînt scalarii proiecției forței rezultante $\bar{F}$, aplicată punctului M de masă m, pe axele determinate de O și versorii $\bar{\rho}$ și $\bar{\nu}$, iar $Z = F_z$ este scalarul proiecției acestei forțe pe axa Oz.

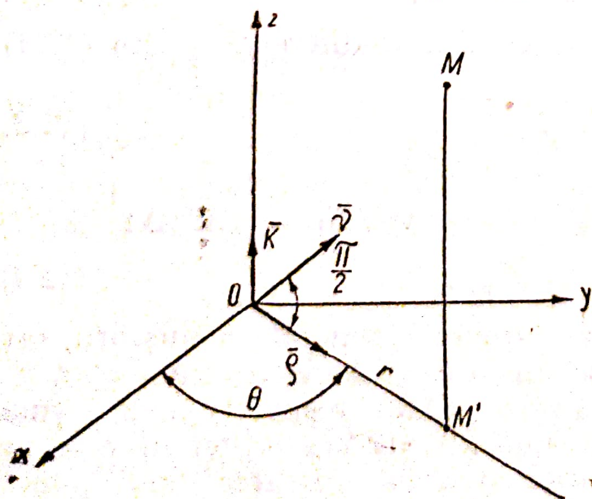


Fig. 12.A.1

12.A.5. Mișcarea punctului material pe o curbă dată

Dacă legătura este *reonomă*, ecuația vectorială a curbei se poate exprima prin: $\bar{r} = \bar{r}(s, t)$, în care s este

un parametru scalar, iar t, timpul. Parametrul s poate fi şi coordonata curbilinie a punctului mobil M în raport cu originea arcelor. În cazul unei legături *scleronome*, ecuaţia nu depinde în mod explicit de timpul t, adică $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Pentru determinarea mişcării punctului M este necesar să se exprime şi ecuaţia $s = s(t)$.

Datele problemei, pentru o legătură scleronomă, sînt: ecuaţia curbei: $\bar{r} = \bar{r}(s)$, rezultanta forţelor date $\bar{F}$ şi condiţiile iniţiale: la $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$ şi $\bar{v} = \bar{v}_0$, evident $\bar{v}_0$ este tangentă în $M_0(\bar{r}_0)$ la curba dată.

Necunoscutele problemei sînt: legea mişcării $s = s(t)$ şi forţa de legătură $\bar{R}$ care uneori, după natura legăturii, se poate exprima ca rezultanta componentei normale $\bar{N}$ şi a celei tangenţiale $\bar{T}$.

Ecuaţia vectorială a mişcării punctului material eliberat de legătură este:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} - \bar{N} - \bar{T} = 0. \tag{12.7}$$

Prin raportarea ecuaţiei (12.7) la axele sistemului de referinţă se obţin ecuaţiile scalare, mult mai comode pentru rezolvarea problemei.

Astfel, dacă $\bar{T}$ este o forţă rezistentă (de exemplu, dacă este datorită frecării) şi se proiectează pe axele triedrului natural (Frenet) se obţin ecuaţiile scalare ale problemei:

$$m\dot{v} - F_t + T = 0; \quad \frac{mv^2}{R} - F_n - N_n = 0; \quad 0 - F_b - N_b = 0.$$

În ipoteza neglijării forţelor de legătură tangenţiale (de exemplu, în cazul legăturilor ideale), ecuaţiile devin:

$$m\dot{v} - F_t = 0; \quad \frac{mv^2}{R} - F_n - N_n = 0; \quad F_b + N_b = 0.$$

Observaţie

După determinarea mişcării cu ajutorul primei ecuaţii, celelalte permit determinarea reacţiunii (normale) cu componentele:

$$N_n = \frac{mv^2}{R} - F_n; \quad N_b = -F_b.$$

De aici reiese că reacţiunile în dinamică, dacă legătura este după o curbă şi nu după o linie dreaptă $\left(\frac{1}{R} = 0\right)$, sînt diferite de cele din statică $v = 0$).

12.A.6. Mişcarea punctului material pe o suprafaţă dată

Se va considera cazul legăturii olonome[1], scleronome, bilaterale şi ideale cu suprafaţa de ecuaţie:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{12.8}$$

Forţa de legătură fiind normală la suprafaţă, ecuaţia vectorială a mişcării punctului este:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} - \lambda \operatorname{grad} f = 0. \tag{12.9}$$

[1] Se numeşte neolonomă legătura cu o suprafaţă în a cărei ecuaţie apar explicit şi $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, de exemplu: $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = 0$.

Raportată la axele triedrului fix $Oxyz$, se traduce prin sistemul de ecuaţii:

$$m\ddot{x} - X - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad m\ddot{y} - Y - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

$$m\ddot{z} - Z - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{12.10}$$

Eliminînd parametrul λ între ecuaţiile (12.10), se obţin ecuaţiile:

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \tag{12.11}$$

care împreună cu (12.8) sînt suficiente pentru determinarea mişcării, adică pe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

O dată mişcarea cunoscută din (12.11) se deduce λ şi astfel şi forţa de legătură.

Observaţie

Rezolvarea unor asemenea probleme de dinamică este mult simplificată prin folosirea teoremelor generale.

Unele aplicaţii clasice

1. *Punct material liber acţionat de o forţă constantă*

a) *Date:* m, $\bar{F}_0$ şi condiţiile iniţiale $M_0(\bar{r}_0)$ şi $\bar{v}_0$ la $t = 0$.

Ecuaţia diferenţială:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F}_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\bar{r}} = \frac{\bar{F}_0}{m} = \bar{a}_0$$

adică problema s-a redus la mişcarea punctului cu acceleraţie constantă în direcţie, sens şi modul (v. Cinematica punctului).

Integrala generală: $\bar{r} = \bar{a}_0\frac{t^2}{2} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2$.

Ecuaţia mişcării: $\bar{r} = \frac{\bar{a}_0}{2}t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$.

b) *Concluzii generale.* Traiectoria este plană, în planul determinat de vectorii $\bar{v}_0$ şi $\bar{a}_0$ din M_0 (fig. 12.A.2).

Traiectoria este o parabolă avînd axa paralelă cu $\bar{a}_0$.

Caz particular: $\bar{F}_0 = m\bar{g}$, mişcarea punctului material în vid la suprafaţa Pămîntului.

2. *Punct material liber acţionat de o forţă centrală*

a) *Date:* m masa punctului material, O centrul fix, $\bar{F} = f\bar{\rho}$, $\bar{\rho}$, versorul cu originea în O care determină în orice moment direcţia forţei, f, o funcţie scalară oarecare. Dacă f este negativă, forţa $\bar{F}$ este dirijată spre O, care este centru *atractiv*; dacă f este pozitivă, centrul O este *repulsiv*. Pentru a studia mişcarea mai trebuie date expresia funcţiei f şi condiţiile iniţiale, adică $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$, α la $t = 0$ (fig. 12.A.3).

Ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$m\ddot{\bar{r}} - f\bar{\rho} = 0. \tag{12.12}$$

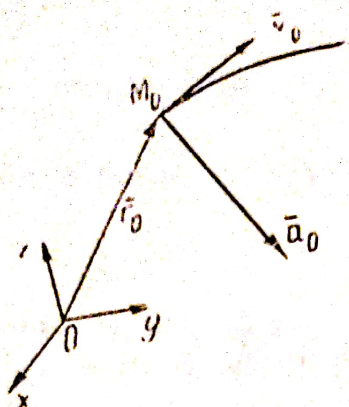


Fig. 12.A.2

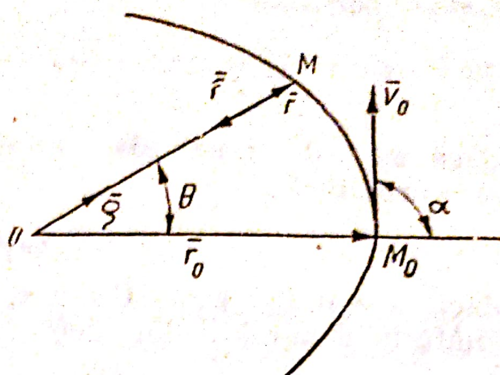


Fig. 12.A.3

b) *Concluzii generale.* Traiectoria este plană, în planul determinat de vectorii $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$.

Viteza areolară a razei OM este constantă:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{r}_0 \times \bar{v}_0) = \frac{\bar{C}}{2}.$$

c) Problema este continuată în Cap. 13 (Forţe centrale).

3. *Punct material acţionat de o forţă elastică*

a) *Date:* m, masa punctului material; O, originea sistemului de referinţă cartezian fix $Oxyz$, $\bar{F} = -K\bar{r}$, forţa elastică, $K > 0$, constanta elastică, în N/m, $\bar{r}$, vectorul de poziţie al punctului mobil M, iar $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ şi α sînt condiţiile iniţiale, la $t = 0$.

Ecuaţia diferenţială este:

$$m\ddot{\bar{r}} + K\bar{r} = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\bar{r}} + \omega^2\bar{r} = 0,$$

unde

$$\omega^2 = \frac{K}{m}.$$

Integrala generală este:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos \omega t + \bar{C}_2 \sin \omega t.$$

Ecuaţia mişcării:

$$\bar{r} = \bar{v}_0 \cos \omega t + \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

b) *Concluzii generale.* Deoarece $f = -K|r|$, forţa elastică se poate exprima ca un caz particular al forţei centrale $\bar{F} = f\bar{\rho}$. În consecinţă, ea este uneori denumită forţă cvasi-centrală, poziţia O de repaus fiind considerată ca şi cum ar fi centrul atractiv.

Traiectoria este o curbă plană cu centrul în O, de gen elipsă, iar viteza areolară a razei OM este constantă.

Mişcarea este periodică cu perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

c) *Cazuri particulare:*

dacă $\sphericalangle\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, $v_0 = \omega r_0 = r_0\sqrt{\frac{K}{m}}$, traiectoria este un cerc de rază r;

dacă $v_0 = 0$ traiectoria este o dreaptă Ox, iar ecuaţia mişcării oscilatorie armonică:

$$x = r_0 \cos \omega t;$$

dacă $v_0 \neq 0$, iar $\sphericalangle\alpha = 0$ sau π, traiectoria este tot axa Ox, mişcarea tot oscilatorie armonică dar defazată faţă de prima şi cu amplitudine diferită:

$$x = \sqrt{r_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t \pm \varphi); \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0}{r_0\omega}.$$

d) *Studiul este continuat în Cap. 24 (Vibraţii mecanice).*

12.B. APLICAŢII LA DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

12.B.1. Un punct de masă m se mişcă sub acţiunea unei forţe constante $\bar{F}$, coliniară cu viteza iniţială a punctului $\bar{v}_0$. Să se determine timpul şi drumul parcurs de punct pînă în momentul cînd are viteza v.

R e z o l v a r e. Mişcarea va fi rectilinie, cu condiţiile iniţiale: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$. Integrînd ecuaţia fundamentală a dinamicii $m\ddot{x} = F$ şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale, rezultă:

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t; \quad v = \dot{x} = \frac{F}{m}t + v_0,$$

şi datele cerute:

$$t = \frac{m}{F}(v - v_0); \quad x = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2F}.$$

12.B.2. Un ascensor de greutate G are o mişcare uniform variată cu acceleraţia a. Să se determine tensiunea T din cablul ascensorului, cînd acesta coboară.

R e z o l v a r e. Scriind ecuaţia fundamentală a dinamicii pe direcţia de mişcare a ascensorului se obţine:

$$\frac{G}{g}a = G - T; \quad \left(m = \frac{G}{g}\right).$$

Deci:

$$T = G\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

12.B.3. Ştiind că un punct avînd masa $m = 2$ kg are o mişcare rectilinie oscilatorie armonică după legea $x = A\cos\omega t$, unde $A = 12$ cm, iar $\omega = 14\ \text{s}^{-1}$, să se determine forţa F sub acţiunea căreia se mişcă punctul.

Rezolvare. Scriind ecuaţia de mişcare:

$$m\ddot{x} = F,$$

se obţine:

$$\bar{F} = -m\omega^2 x\bar{i} = -F_0 \cos \omega t\bar{i},$$

unde:

$$F_0 = m\omega^2 A \approx 47 \text{ N}.$$

12.B.4. Un corp este lansat de la suprafaţa Pămîntului cu viteza iniţială v_0, pe verticală în sus. Să se studieze mişcarea corpului ţinînd seama de forţa de atracţie newtoniană a Pămîntului.

Rezolvare. Forţa de atracţie, alegînd ca axă Ox verticala lui v_0 cu originea O în centrul Pămîntului, poate fi scrisă:

$$\bar{F} = -k\frac{mM}{x^2}\bar{i} = -\frac{mgR^2}{x^2}\bar{i}.$$

Din ecuaţia $m\ddot{x} = -\frac{mgR^2}{x^2}$, deoarece $\ddot{x} = v\frac{dv}{dx}$, rezultă:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right).$$

În continuare, dacă $v_0^2 > 2gR$, se obţine:

$$t = \frac{1}{v_0^2 - 2gR}\left[\sqrt{(v_0^2 - 2gR)x^2 + 2gR^2x - (Rv_0)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{gR^2}{v_0^2 - 2Rg}\cdot\left(\text{arg ch}\frac{(v_0^2 - 2gR)x + gR^2}{gR^2} - \text{arg ch}\frac{v_0^2 - gR}{gR}\right)\right].$$

Corpul nu se va opri niciodată, părăsind sfera de atracţie a Pămîntului. Valoarea acestei viteze este 11,18 km/s.

Dacă $v_0^2 < 2gR$, viteza se anulează într-un punct A_1, avînd

$$x_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}.$$

Legea de mişcare va fi:

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{x_1}{2g}}\left[\sqrt{R(x_1 - R)} - \sqrt{x(x_1 - x)} + \frac{x_1}{2}\left(\text{arc sin}\frac{2x - x_1}{x_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \text{arc sin}\frac{2R - x_1}{x_1}\right)\right].$$

12.B.5. Un punct fix O atrage punctul A de masă m cu o forţă $F = kx^n$, unde $x = OA$, iar k un coeficient constant. Punctul A porneşte în momentul iniţial de la $OA_0 = x_0$, cu viteza nulă. Să se studieze mişcarea punctului de la A_0 la O, determinîndu-se timpul după care ajunge şi viteza cu care soseşte mobilul în punctul O.

Rezolvare. Proiectînd pe axa Ox (dreapta OA_0) ecuaţia fundamentală a dinamicii, se obţine:

$$m\ddot{x} = -kx^n,$$

și deoarece $\ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, se obține:

$$\frac{m}{k} v dv = -x^n dx.$$

Integrînd, se obține:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{(n+1)m}(x_0^{n+1} - x^{n+1})}; \qquad (n \neq -1).$$

Printr-o nouă integrare rezultă viteza și timpul în punctul O:

$$t_1 = \sqrt{\frac{(n+1)m}{2k}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^{n+1} - x^{n+1}}}; \qquad (n \neq -1)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2kx_0^{n+1}}{(n+1)m}}; \qquad (n > -1).$$

12.B.6. Un punct material de masă m este aruncat cu viteza v_0 îndreptată sub un unghi α față de orizontală (fig. 12.B.6).

Să se studieze mișcarea punctului neglijînd rezistența aerului. Se vor determina:

a) ecuațiile parametrice ale mișcării, traiectoria, înălțimea maximă, bătaia, viteza de cădere și unghiul de cădere;

b) domeniul punctelor care pot fi atinse de punctul lansat cu viteza v_0 îndreptată sub un unghi α variabil, neglijîndu-se rezistența aerului.

Rezolvare. a) Ecuația de mișcare este: $m\ddot{\bar{r}} = +m\bar{g}$, sau proiectînd

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad m\ddot{y} = -mg.$$

Ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$; $x = 0$; $y = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$ și $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$;
integrînd se obține:

$$x = v_0 \cos\alpha; \qquad x = v_0 t \cos\alpha;$$

$$y = -gt + v_0 \sin\alpha; \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha.$$

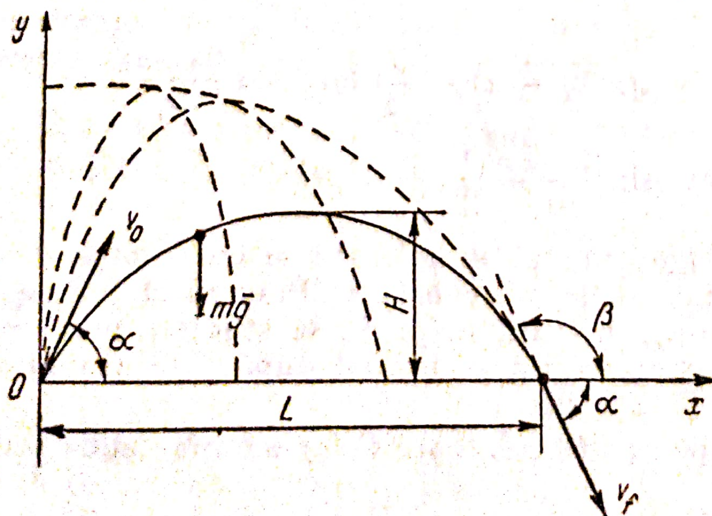


Fig. 12.B.6

Pentru ecuația traiectoriei se elimină parametrul t variabil și se obține parabola:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha),$$

pentru $y' = 0$, deci:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

se obține înălțimea:

$$y_{max} = H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Bătaia L se obţine observînd că $y = 0$ şi deci :

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}; \text{ rezultă : } L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Se observă că timpul de ridicare este egal cu timpul de cădere.

Pentru viteza de cădere se introduce în $\dot{x}$ şi $\dot{y}$ valoarea $t = t_2$ şi se obţine :

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \text{ şi } \dot{y} = -\bar{v}_0 \sin \alpha,$$

deci : $v_{final} = v_0$

Unghiul de cădere este dat de relaţia $\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\operatorname{tg} \alpha$, deci : $\beta = 180 - \alpha$.

b) Domeniul cerut este determinat de înfăşurătoarea familiei de traiectorii care au acelaşi v_0 şi parametrul α variabil, care se obţine eliminînd parametrul variabil α între ecuaţia traiectoriei şi a derivatei traiectoriei în raport cu parametrul variabil.

Se notează tg $\alpha = \lambda$ şi se poate scrie :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \lambda^2) + x\lambda.$$

$$y'(\lambda) = -\frac{gx^2}{v_0^2}\lambda + x.$$

Se elimină λ şi se obţine o parabolă care poartă numele de parabolă de siguranţă :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Această parabolă de siguranţă cuprinde bătaia maximă şi înălţimea maximă.

12.B.7. Să se determine viteza iniţială v_0 şi unghiul sub care trebuie lansată o minge din punctul O pentru a lovi normal la înălţimea $DC = h$ un perete vertical CD situat la distanţa $OD = 2h$. Se neglijează rezistenţa aerului (fig. 12.B.7).

R e z o l v a r e. Mingea va parcurge jumătate din parabolă între O şi C. Din ecuaţia cunoscută se obţine deci :

$$x_c = 2h = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}; \quad y_c = h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

de unde rezultă :

$$v_0 = 2\sqrt{hg}; \quad \alpha = 45°.$$

12.B.8. Să se determine sub ce unghi α luat deasupra orizontalei trebuie aruncat din O un punct greu, astfel încît el să atingă dreapta (d) în timp minim (fig. 12.B.8).

R e z o l v a r e. Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt :

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

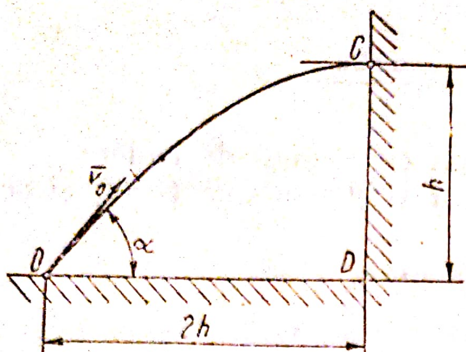


Fig. 12.B.7

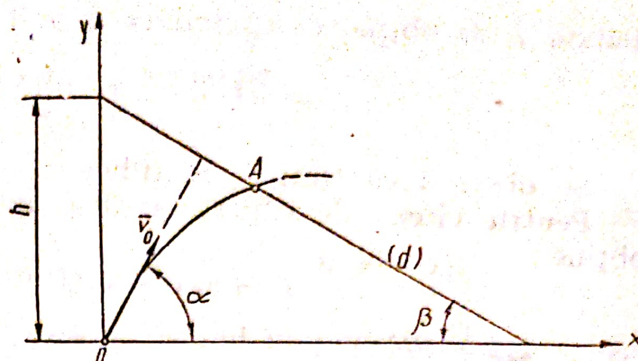


Fig. 12.B.8

Pentru a afla timpul după care punctul ajunge în A, se pune condiția ca traiectoria să întîlnească dreapta (d) care are ecuația:

$$y = h - x \operatorname{tg} \beta.$$

Se obține ecuația:

$$F(\alpha, t) \equiv gt^2 - 2v_0(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\beta)t + 2h = 0$$

și condiția de minim:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \equiv 2v_0(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\beta)t = 0,$$

din care $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, sau $\alpha + \beta = 90°$.

Deci, punctul trebuie aruncat cu $\bar{v}_0$ perpendiculară pe dreapta (d).

12.B.9. Un punct material greu de masă m este aruncat cu viteza inițială $\bar{v}_0$ sub unghiul α în sus față de orizontală. Să se studieze mișcarea punctului, considerînd rezistența aerului proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$.

R e z o l v a r e. Ecuația mișcării devine:

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{h}{m}\dot{\bar{r}} = \bar{g}.$$

Integrînd (se observă că $\bar{r}_0 = \frac{m\bar{g}}{h} t$ este o soluție particulară) se obține:

$$\bar{r} = \frac{m}{h}\left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) + \frac{m\bar{g}}{h}t;$$

$$\bar{v} = \left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\bar{g}}{h}.$$

Traiectoria, care este o curbă verticală, are o asimptotă verticală:

$$x = \frac{mv_0\cos\alpha}{h}.$$

Mișcarea tinde, pentru $t \to \infty$, spre o mișcare uniformă rectilinie cu viteza limită (verticală descendentă)

$$v_1 = \frac{mg}{h}.$$

12.B.10. Un punct material greu A de masă m este aruncat pe verticală în sus cu viteza v_0. Ştiind că rezistenţa aerului este proporţională cu pătratul vitezei ($R = hv^2$), să se studieze mişcarea acestui punct.

Rezolvare: În mişcarea ascendentă asupra punctului acţionează greutatea proprie mg şi rezistenţa aerului dirijate în jos. Alegînd drept sistem de referinţă verticala punctului de lansare cu originea pe sol şi reprezentînd forţele (fig. 12.B.10, *a*), ecuaţia de mişcare va fi:

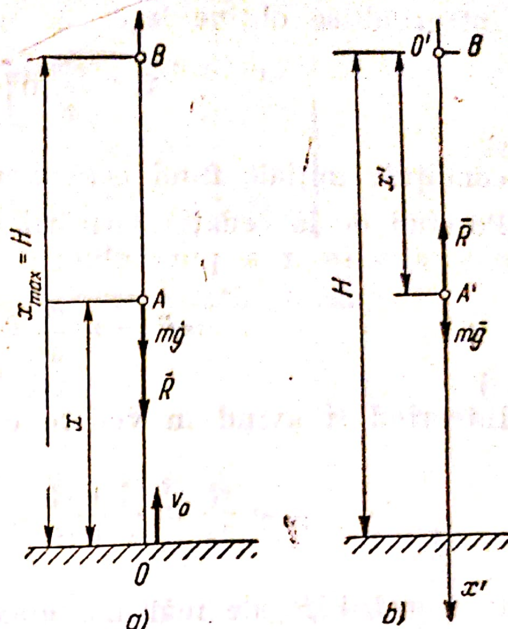


Fig. 12.B.10

$$m\ddot{x} = -mg - hv^2.$$

Folosim notaţia:

$$h = \frac{mg}{v_1^2}, \tag{a}$$

v_1 fiind o viteză constantă a cărei semnificaţie va rezulta ulterior. Ecuaţia (a) se mai poate scrie:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{mg}{v_1^2}v^2. \tag{b}$$

Separînd variabilele şi integrînd, se obţine:

$$t = \int \frac{dv}{g\left(1 + \frac{v^2}{v_1^2}\right)} + C_1 = \frac{v_1}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{v_1} + C_1.$$

Condiţiile iniţiale sînt:

$$t = 0;\; x = 0;\quad \dot{x} = v = v_0 \tag{c}$$

şi rezultă constanta de integrare:

$$C_1 = \frac{v_1}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_1},$$

astfel că se obţine:

$$t = \frac{v_1}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{v_1}\right). \tag{d}$$

Explicitînd expresia vitezei din această relaţie, se obţine:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1\frac{v_0 - v_1\operatorname{tg}\frac{gt}{v_1}}{v_1 + v_0\operatorname{tg}\frac{gt}{v_1}}. \tag{e}$$

Integrînd se obţine legea de mişcare:

$$x = \frac{v_1^2}{g} \ln \left[\cos \frac{gt}{v_1} + \frac{v_0}{v_1} \sin \frac{gt}{v_1} \right], \tag{f}$$

condiţiile iniţiale fiind cele menţionate.

Pornind de la ecuaţia mişcării (a) se poate stabili legătura dintre viteza v şi abscisa x a punctului:

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}.$$

Integrînd şi avînd în vedere condiţiile iniţiale (c) se obţine:

$$x = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_0^2 + v_1^2}{v^2 + v_1^2} \quad \text{şi} \quad v = \sqrt{(v_0^2 + v_1^2)\, e^{-\frac{2gx}{v_1^2}} - v_1^2}.$$

În punctul B, de înălţime maximă, $v = 0$ şi rezultă:

$$t_B = \frac{v_1}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{v_1} \quad \text{şi} \quad x_{max} \equiv H = \frac{v_1^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{v_1^2}\right). \tag{g}$$

În mişcarea descendentă punctul începe să coboare pornind din B pe verticală în jos. Pentru simplificare este utilă o schimbare de axă şi se alege originea în $B = O'$, sensul axei $O'x'$ luîndu-se pozitiv în jos. Ecuaţia de mişcare este:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 = mg - \frac{mgv^2}{v_1^2}.$$

Separînd variabilele se obţine:

$$dt = \frac{v_1^2}{g} \frac{dv}{v_1^2 - v^2},$$

şi:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} + C_2; \quad \text{pentru } v < v_1; \\ t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v - v_1} - C_2; \quad \text{pentru } v > v_1. \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Pentru a considera problema într-o situaţie mai generală, se va presupune că mobilul are o viteză iniţială v_0' dirijată în jos.
Deci: $t = 0$; $x' = 0$; $v = v_0'$.
Pentru determinarea constantei C_2 se au în vedere două posibilităţi: $v_0' < v_1$ şi $v_0' > v_1$.

Se obţin valorile:

$$C_2' = -\frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v_0'}{v_1 - v_0'}; \quad \text{pentru } v_0' < v_1;$$

$$C_2'' = -\frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_0' + v_1}{v' - v_1}; \quad \text{pentru } v_0' > v_1,$$

de unde introducînd în expresia lui t(h) se poate scrie:

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{(v_1 + v)(v_1 - v_0')}{(v_1 - v_1)(v_1 + v_0')}\ ; \quad \text{pentru} \quad v_0' < v < v_1\ ;$$

şi

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{(v_1 + v)(v_0' - v_1)}{(v - v_1)(v_0' + v_1)}\ ; \quad \text{pentru} \quad v_0' > v_1 > v. \qquad \text{(i)}$$

Pentru cazul particular considerat $v_0' = 0$, aceste relaţii devin:

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} = \frac{v_1}{g} \operatorname{arg\,th} \frac{v}{v_1} \cdot \qquad \text{(j)}$$

Expresia vitezei se obţine explicitînd relaţiile (i) şi (j):

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v_1 + v_0')\, e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_1 - v_0')\, e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v_1 + v_0') + (v_1 - v_0') e^{-\frac{gt}{v_1}}}; \text{ pentru } v_0' < v_1; \text{ şi } v < v_1;$$

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v_0' + v_1)\, e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_0' - v_1)\, e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v_0' + v_1)\, e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_0' - v_1)\, e^{-\frac{gt}{v_1}}}; \text{ pentru } v_0' > v_1; \text{ şi } v > v_1; \qquad \text{(k)}$$

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} - e^{-\frac{gt}{v_1}}}{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}} = v_1 \operatorname{th} \frac{gt}{v_1}\ ; \quad \text{pentru} \quad v_0' = 0.$$

Legea de mişcare se obţine integrînd aceste relaţii:

$$x' = \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{(v_1 + v_0') e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_1 - v_0')\, e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2v_1}\ ; \quad \text{pentru} \quad v_0' > v_1\ ;$$

$$x' = \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{(v_0' + v_1)\, e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_0' - v_1)\, e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2v_1}\ ; \quad \text{pentru} \quad v_0' < v_1\ ; \qquad \text{(l)}$$

$$x' = \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2} = \frac{v_1^2}{g} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{gt}{v_1}\right); \quad \text{pentru} \quad v_0' = 0. \qquad \text{(m)}$$

Pentru a determina şi în cazul mişcării descendente relaţia $x' = x'(v)$, se integrează ecuaţia diferenţială de mişcare observînd că:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx'},$$

şi se obţine:

$$x' = \frac{v_1^2}{2g}\ln\frac{v_1^2 - v_0'^2}{v_1^2 - v^2}\,; \quad v = \sqrt{v_1^2 - (v_1^2 - v_0'^2)\,e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}\,; \quad \text{pentru } v_0' < v_1\,;$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g}\ln\frac{v_0'^2 - v_1^2}{v^2 - v_1^2}\,; \quad v = \sqrt{v_1^2 + (v_0'^2 - v_1^2)\,e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}\,; \quad \text{pentru } v_0' > v_1\,;$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g}\ln\frac{v_1^2}{v_1^2 - v^2}\,; \quad v = v_1\sqrt{1 - e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}\,; \quad \text{pentru } v_0' = 0.$$

Analizînd expresiile obţinute pentru viteze şi legea mişcării se pot trage următoarele concluzii. Dacă viteza iniţială $v_0' < v_1$ viteza punctului creşte şi pentru $t \to \infty$ atinge valoarea v_1. Dacă viteza iniţială $v_0' > v_1$ viteza punctului scade şi pentru $t \to \infty$ atinge valoarea v_1.
Independent de condiţiile iniţiale ale problemei, există o viteză limită

$$\lim_{t\to\infty} v = v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}$$

astfel că mişcarea descendentă tinde către o mişcare uniformă cu viteza $v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}$.
Se poate observa că pentru viteza limită rezistenţa aerului este egală cu greutatea punctului:

$$R = hv_1^2 = mg.$$

12.B.11. Un punct material de masă m cade pe verticală fără viteză iniţială. Ştiind că punctul întîmpină o rezistenţă a aerului dată de $R = mg(2v_1^2 - v^2)v^2/v_1^4$, unde $v_1 = \text{const.}$ iar v este viteza de cădere, să se determine legea de mişcare.

R e z o l v a r e. Alegînd axa Ox verticală în jos, cu originea în punctul de plecare, ecuaţia mişcării este:

$$m\dot{v} = mg - \frac{mg}{v_1^4}(2v_1^2 - v^2)v^2,$$

adică:

$$\frac{dv}{(v_1^2 - v^2)^2} = \frac{g\,dt}{v_1^4}\,.$$

Integrînd după amplificare cu v, se obţine:

$$x = \frac{v_1^2 v^2}{2g(v_1^2 - v^2)} \quad \text{sau} \quad v = v_1\sqrt{\frac{x}{x + \frac{v_1^2}{2g}}}\,.$$

Viteza tinde deci asimptotic către v_1.
Relaţia timp-viteză este:

$$t = \frac{v_1^2 v}{2g(v_1^2 - v^2)} + \frac{v_1}{4g}\ln\frac{v_1 + v}{v_1 - v}\,.$$

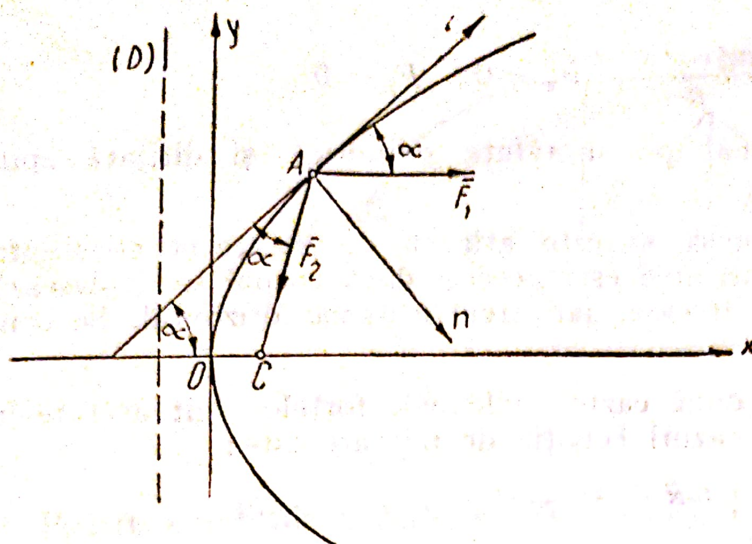


Fig. 12.B.12

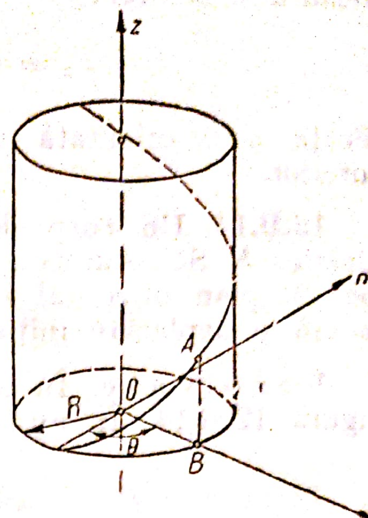


Fig. 12.B.13

12.B.12. Un punct A de masă m, acționat de două forțe, se mișcă uniform cu viteza v_0 pe parabola $y^2 = 2px$. Forța $\bar{F}_1$ este paralelă cu axa parabolei, iar $\bar{F}_2$ este dirijată spre focarul C al parabolei. Să se determine mărimile acestor forțe (fig. 12.B.12).

R e z o l v a r e. Traiectoria și legea de mișcare fiind cunoscute, se întrebuințează comod coordonatele intrinseci:

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \text{devine:} \quad m\ddot{s} = F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha,$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{R} = F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha.$$

Cum $\dot{s} = v_0 = \text{constant}$, $\ddot{s} = 0$, iar $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$,

se obține:

$$F_1 = F_2 = \frac{mv_0^2}{4}\,\frac{1}{x + \dfrac{p}{2}}.$$

12.B.13. Un punct A de masă m acționat de o forță, descrie elicea $r = R$, $z = R\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha$ cu viteza constantă v_0. Să se determine forța $\bar{F}$ care acționează asupra punctului (fig. 12.B.13).

R e z o l v a r e. Se proiectează ecuația dinamicii în coordonate cilindrice:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho; \quad -mR\dot{\theta}^2 = F_\rho;$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\nu; \quad mR\ddot{\theta} = F_\nu;$$

$$m\ddot{z} = F_z; \quad mR\ddot{\theta}\,\mathrm{tg}\,\alpha = F_z.$$

Din expresia vitezei,

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\nu^2 + v_z^2} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos\alpha} = v_0,$$

rezultă θ şi deci:

$$F_\rho = -\frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha}{R}; \quad F_\nu = 0; \quad F_z = 0.$$

Forţa este orientată normal pe suprafaţa cilindrică şi dirijată spre interior.

12.B.14. Un corp de masă m este atîrnat de un arc cu constanta elastică k. Să se arate că mişcarea este aceeaşi dacă corpul se deplasează pe un plan orizontal fără frecare, iar arcul e aşezat orizontal. Se consideră o deplasare iniţială x_0.

R e z o l v a r e. În cele două cazuri, schemele forţelor sînt arătate în figura 12.B.14. În ambele cazuri ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Pulsaţia fiind $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, legea de mişcare obţinută prin integrare este:

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

12.B.15. Un punct A de masă m este acţionat de o forţă constantă $\bar{F}_0$ şi de o forţă elastică, centrul atractiv C şi constanta elastică k fiind cunoscute. Să se determine poziţia de echilibru O a punctului şi să se studieze mişcarea în cazul unor condiţii iniţiale oarecare, $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$, (fig. 12.B.15).

R e z o l v a r e. Forţa elastică este $\bar{F} = -k\overline{CO}$.

La echilibru $\bar{F} = -\bar{F}_0$, deci: $\overline{CO} = \frac{\bar{F}_0}{k}$.

În sistemul $Oxyz$ ecuaţia de mişcare este:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_0 + \bar{F} \quad \text{sau} \quad m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r},$$

deoarece $\bar{F}_0 - k\overline{CO} = 0$. Cu notaţia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ devine

$$\ddot{\bar{r}} + \omega^2 \bar{r} = 0.$$

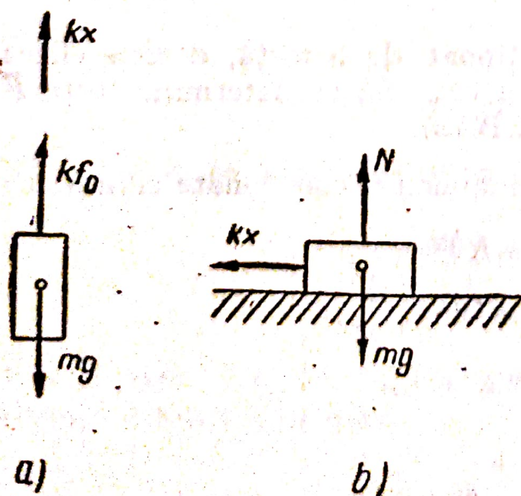


Fig. 12.B.14

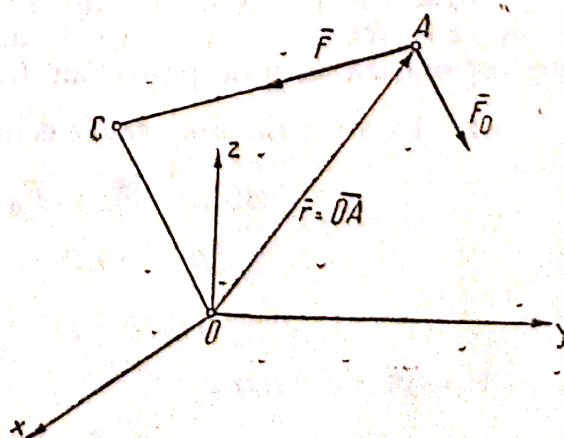


Fig. 12.B.15

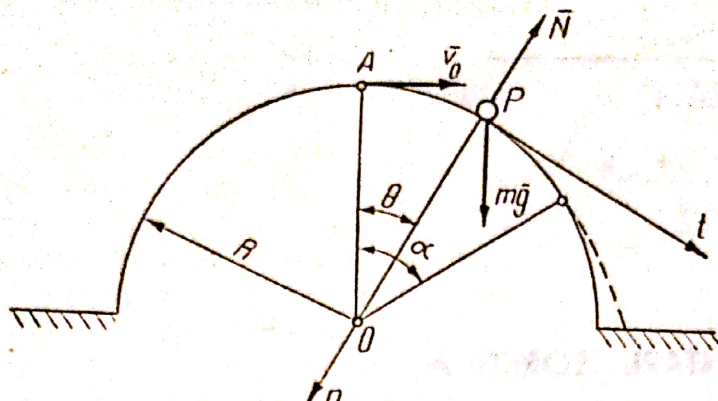


Fig. 12.B.16

Pentru condițiile inițiale $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$ se obține soluția:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t + \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

12.B.16. Pe exteriorul unei emisfere lucioase de rază R se lansează din punctul cel mai înalt A, un punct material greu P de masă m cu viteza $\bar{v}_0$ orizontală. Să se studieze mişcarea punctului (fig. 12.B.16).

Rezolvare. Ecuația fundamentală a dinamicii, scrisă în coordonate tpn este:

$$m\dot{v} = mg \sin \theta; \quad m\frac{v^2}{R} = mg \cos \theta - N.$$

Din prima, amplificînd cu $d\theta$ și integrînd ($t = 0$, $\theta = 0$, $v = v_0$), se obține:

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta) + v_0^2,$$

și reacțiunea:

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}.$$

Punctul părăsește sfera cînd $\theta = \alpha$, $N = 0$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}, \quad \text{cu condiția } v_0^2 \leqslant gR, \ (\cos \alpha \leqslant 1)$$

Capitolul 13

FORŢE CENTRALE

13.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Se defineşte forţă centrală o forţă al cărei suport trece printr-un punct fix O denumit pol. Expresia ei este:

$$\bar{F} = F\bar{\rho}, \tag{13.1}$$

unde F este scalarul forţei centrale care acţionează asupra punctului M (fig. 13.A.1) şi $\bar{\rho}$ versorul direcţiei OM. Dacă $F > 0$, forţa este repulsivă şi dacă $F < 0$ forţa este atractivă.

Dacă un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale, traiectoria punctului este plană şi mişcarea se face cu viteză areolară constantă:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \tag{13.2}$$

Mişcarea punctului se poate studia:

a) cu ajutorul ecuaţiei fundamentale a dinamicii $m\bar{a} = \bar{F}$, ale cărei proiecţii în coordonate polare (fig. 13.A.1) sînt:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho = F;$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_n = 0; \tag{13.3}$$

b) cu ajutorul ecuaţiei lui Binet:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mc^2}, \tag{13.4}$$

în care:

$r;\theta$ sînt coordonatele polare ale punctului;

m — masa punctului;

$c = r^2\dot{\theta} = rv_n = r_0 v_0 \sin \sphericalangle (\bar{r}_0, \bar{v}_0)$ — constanta ariilor (dublul vitezei areolare $c = 2\Omega$).

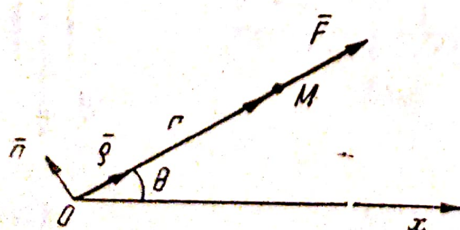


Fig. 13.A.1

Punînd $\frac{1}{r} = u$, ecuaţia lui Binet poate fi scrisă sub forma:

$$mcu^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -F, \tag{13.6}$$

iar viteza $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2}$ a punctului material.

$$v = c\sqrt{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2}. \qquad (13.7)$$

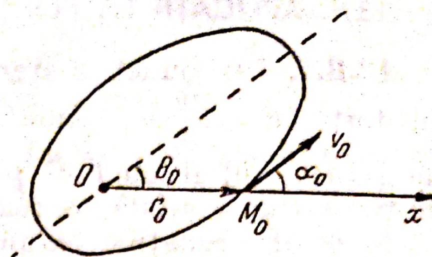


Fig. 13.A.2

Cu ajutorul ecuației lui Binet se poate determina forța F, dacă se cunoaște traiectoria $r = f(\theta)$, iar dacă se cunoaște F, prin integrare se determină ecuația traiectoriei $r = r(\theta, C_1, C_2)$, constantele de integrare determinîndu-se cu ajutorul condițiilor inițiale care se pun în ecuația precedentă și în ecuația obținută prin derivarea ei în raport cu θ sau cu timpul t.

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei $r = r(t)$ și $\theta = \theta(t)$ se obțin din prima ecuație de proiecție (13.3) și ecuația (13.5).

În cazul forței de atracție newtoniană

$$F = -f\frac{mM}{r^2}, \text{ unde:}$$

$f = 6{,}664 \times 10^{-8}$ CGS este constanta atracției universale;
m, M — masele corpurilor care se atrag;
r — distanța dintre cele două corpuri.

Traiectoria este o conică a cărei ecuație în coordonate polare, raportată la focarul O în care se găsește corpul de masă M, este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \qquad (13.8)$$

unde:

$$p = \frac{c^2}{fM}; \quad e = 1 + \frac{r_0 v_0^2 \sin \alpha_0 (r_0 v_0^2 - 2fM)}{f^2M^2}, \qquad (13.9)$$

α_0 fiind unghiul dintre raza vectoare $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ și viteza $\bar{v}_0$ din momentul inițial (fig. 13.A.2).

Dacă excentricitatea

$e < 1$, $v_0^2 < \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o elipsă;

$e = 1$, $v_0^2 = \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o parabolă; (13.10)

$e > 1$, $v_0^2 > \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o hiperbolă.

În cazul sateliților Pămîntului:

$$fM = gR^2, \qquad (13.11)$$

unde M este masa, iar $R = 6370$ km, raza Pămîntului.

13.B. APLICAŢII LA FORŢE CENTRALE

13.B.1. Un punct material de masă m este atras de un centru fix cu forţa $F = \frac{10\,m}{r^3}$, unde r este distanţa punctului la acest centru. În momentul iniţial unghiul polar $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$ şi $v_0 = 2$, iar unghiul α_0 dintre viteza iniţială şi raza vectoare a punctului este de 45°.

Să se afle ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului în coordonate polare şi să se determine ecuaţia implicită a traiectoriei lui.

R e z o l v a r e. Pentru obţinerea ecuaţiilor parametrice ale traiectoriei se folosesc relaţiile:

$$ma_\rho = F_\rho\,;\quad r^2\dot{\theta} = c,$$

unde:

$$F_\rho = -\frac{10\,m}{r^3} \text{ şi } c = r_0 v_0 \sin\alpha_0 = 1.2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \text{ adică:}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{10\,m}{r^3}\,;\quad r^2\theta = \sqrt{2}. \tag{a}$$

Înlocuind pe $\dot{\theta}$ din a doua relaţie în prima, rezultă:

$$\ddot{r} = -\frac{8}{r^3}. \tag{b}$$

Multiplicînd această ecuaţie cu $\dot{r}$ şi integrînd, se deduce succesiv:

$$\ddot{r}\dot{r} = -\frac{8}{r^3}\dot{r}\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{r^2}\right);$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{4}{r^2} + c_1.$$

Ţinînd seama de condiţiile iniţiale $t = 0$, $\dot{r}_0 = (v_\rho)_0 = v_0 \cos\,\alpha_0 = \sqrt{2}$, se deduce $c_1 = -3$, de unde

$$\dot{r}^2 = \frac{8}{r^2} - 6 \quad \text{sau} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{8 - 6r^2}{r}.$$

Separînd variabilele şi integrînd încă odată, rezultă:

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{8 - 6r^2}} = dt\,;\quad t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{8 - 6r^2}} + c_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{8 - 6r^2} + c_2.$$

Constanta de integrare c_2 se determină din condiţiile iniţiale $t = 0$, $r_0 = 1$, de unde rezultă $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, iar după înlocuirea acesteia în expresia lui t, se obţine prima ecuaţie parametrică a mişcării $r = r(t)$:

$$t = -\frac{1}{6}\sqrt{8 - 6r^2} + \frac{\sqrt{2}}{6},$$

sau

$$r = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}. \tag{c}$$

Reluînd a doua ecuaţie din (a) şi ţinînd seama de (c), se obţine:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}.$$

Separînd variabilele şi integrînd, se obţine:

$$d\theta = \frac{\sqrt{2}\,dt}{1 + 2\sqrt{2}\,t - 6t^2}; \quad \theta = \int \frac{\sqrt{2}\,dt}{1 + 2\sqrt{2}\,t - 6t^2} + c_3.$$

Pentru integrare se descompune fracţia în factori; rădăcinile ecuaţiei $1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2 = 0$ sînt: $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ şi $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi se obţine:

$$\frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}\,t - 6t^2} = \frac{\sqrt{2}}{-6\left(t + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6\left(t + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)} =$$

$$= \frac{A}{6} + \frac{B}{t + \frac{\sqrt{2}}{6}} + \frac{C}{\frac{\sqrt{2}}{2} - t}.$$

Făcînd calculele, rezultă:

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = \frac{1}{4};$$

$$\theta = \int \frac{\frac{1}{4}\,dt}{t + \frac{\sqrt{2}}{6}} + \int \frac{\frac{1}{4}\,dt}{\frac{\sqrt{2}}{2} - t} + c_3 = \frac{1}{4}\ln(6t + \sqrt{2}) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2} - 2t) + c_3;$$

$$\theta = \frac{1}{4}\ln\frac{6t + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2t} + c_3.$$

Constanta de integrare c_3 se determină din condiţiile iniţiale $t = 0$, $\theta = 0$; rezultă: $c_3 = 0$, iar după înlocuirea acesteia în relaţia precedentă se obţine cea de a doua ecuaţie parametrică $\theta = \theta(t)$:

$$\theta = \frac{1}{4}\ln\frac{6t + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2t} = \frac{1}{4}\ln\frac{1 + 3\sqrt{2}\,t}{1 - \sqrt{2}\,t}. \quad \text{(d)}$$

Pentru aflarea ecuaţiei implicite a traiectoriei în coordonate polare, se scrie ecuaţia lui Binet. Dacă se notează $\frac{1}{r} = u$, se înlocuieşte scalarul forţei F cu expresia $F = -\frac{10m}{r^3} = -10mu^3$ şi $c = \sqrt{2}$, se obţine ecuaţia diferenţială a traiectoriei în variabilele u şi θ sub forma:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - 4u = 0. \quad \text{(e)}$$

Ecuaţia caracteristică $\lambda^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Integrînd, se obţine soluţia generală:

$$\frac{1}{r} = c_1 e^{2\theta} + c_2 e^{-2\theta}. \quad \text{(f)}$$

Pentru determinarea constantelor c_1 şi c_2 se face derivata soluţiei generale (f) în raport cu θ:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = 2c_1 e^{2\theta} - 2c_2 e^{-2\theta}. \quad \text{(g)}$$

Ţinînd seama de condiţiile iniţiale $t = 0$, $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$, $\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{r_0}{\text{tg}\,\alpha_0} = \frac{1}{1} = 1$, se deduc din (f) şi (g) valorile constantelor c_1 şi c_2:

$$c_1 = \frac{1}{4}; \quad c_2 = \frac{3}{4},$$

iar după înlocuirea lor în (f), va rezulta ecuaţia traiectoriei în variabilele $\frac{1}{r}$ şi θ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{4} e^{2\theta} + \frac{3}{4} e^{-2\theta};$$

sau încă

$$r(e^{2\theta} + 3e^{-2\theta}) = 4. \tag{h}$$

13.B.2. Un punct material M de masă m, descrie o circumferinţă de rază a, sub acţiunea unei forţe centrale, polul 0 al forţei fiind situat pe arc. Cunoscînd constanta ariilor c, să se determine scalarul F al forţei şi viteza v a punctului material în funcţie de poziţia acestuia.

R e z o l v a r e. Din triunghiul OMA (fig. 13.B.2), rezultă ecuaţia cercului în coordonate polare:

$$r = 2a \sin \theta. \tag{a}$$

Traiectoria fiind cunoscută, se scrie ecuaţia lui Binet (13.6). Deoarece:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a \sin \theta}; \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{-\cos \theta}{2a \sin^2 \theta}; \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{2a \sin^3 \theta},$$

rezultă:

$$F = -mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{2a \sin^3 \theta} + \frac{1}{2a \sin \theta}\right) = -\frac{mc^2}{r^2} \frac{2}{2a \sin^3 \theta}.$$

Înlocuind $\sin \theta = \frac{r}{2a}$ se deduce pentru F expresia:

$$F = -\frac{8m\, c^2a^2}{r^5}. \tag{b}$$

Forţa centrală este deci o forţă atractivă invers proporţională cu puterea a cincea a razei vectoare.

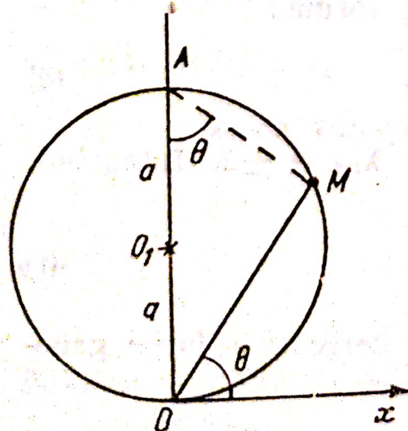


Fig. 13.B.2

Expresia vitezei se obţine din formula (13.7):

$$v = c\sqrt{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2} = c\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{4a^2 \sin^4 \theta} + \frac{1}{4a^2 \sin^2 \theta}} = \frac{c}{2a^2 \sin^2 \theta}.$$

Înlocuind $\sin \theta = \frac{r}{2a}$, rezultă pentru v expresia:

$$v = \frac{2ac}{r^2}. \tag{c}$$

Capitolul 14

DINAMICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL. REPAUSUL RELATIV

14.A. PREZENTARE TEORETICĂ

14.A.1. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative

Principiile mecanicii newtoniene sînt enunţate pe conceptele spaţiului absolut şi al reperului fix. În consecinţă:

$$m\bar{a}_a - \bar{F} = 0 \tag{14.1}$$

este ecuaţia fundamentală a mişcării *absolute*. Pentru studiul unor mişcări mecanice, cum sînt mişcările planetelor sistemului solar în raport cu reperul heliocentric, această ecuaţie a dat rezultate foarte bune.

Studierea unor mişcări mecanice la suprafaţa pămîntului în raport cu Pămîntul ca reper a dus la rezultate bune, în general, însă în unele probleme rezultatele nu au fost satisfăcătoare. Concluzia: ecuaţia (14.1) nu poate fi aplicată în raport cu orice fel de reper.

Ştiind că mişcarea studiată şi observată din reperul mobil este o mişcare relativă şi nu absolută, primul termen al ecuaţiei trebuie să fie $m\bar{a}_r$ şi nu $m\bar{a}_a$. Se ajunge la ecuaţia:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c, \tag{14.2}$$

în care se notează cu:

$\bar{F}_t = -ma_t$ denumită *forţă de transport*;

$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$ denumită *forţă Coriolis*,

rezultă:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c \text{ [1]} \tag{14.3}$$

care este *ecuaţia fundamentală a mişcării relative a punctului material*.

În concluzie, ori de cîte ori se studiază mişcarea mecanică în raport cu un reper mobil, pentru ca rezultatul studiului să corespundă cu experimentul, este necesar să se introducă în ecuaţia fundamentală şi forţele complementare $\bar{F}_t + \bar{F}_c$ pe lîngă forţele date şi de legătură, *efectiv* aplicate punctului material.

O întrebare importantă: Cum trebuie să fie mişcarea reperului mobil *Oxyz* în raport cu *O'x'y'z'*, presupus fix, pentru ca ecuaţia fundamentală a mişcării relative să fie identică cu ecuaţia fundamentală (14.1), aşa cum a stabilit-o N e w t o n?

---

[1] Forţele *complementare* mai primesc şi alte denumiri: $\bar{F}_t$ (forţa centrifugă propriu-zisă), iar $\bar{F}_c$ (forţa centrifugă compusă).

Condiţiile necesare şi suficiente deduse din anularea sumei $\bar{F}_t + \bar{F}_c$, respectiv a expresiei

$$\bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0$$

sînt:

$$\bar{\omega} = 0 \text{ şi } \bar{a}_0 = 0,$$

adică reperul mobil trebuie să aibă, în raport cu reperul presupus fix, o *mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă, adică să fie un reper inerţial.*

Însă, reper fix nu există în natură, în consecinţă calitatea unui reper de a fi inerţial se poate verifica numai experimental. Astfel, dacă studiul unei mişcări mecanice, în raport cu un anumit reper, cu ajutorul ecuaţiei fundamentale ($m\bar{a} - \bar{F} = 0$) ar da exact aceleaşi rezultate ca şi experimental, atunci reperul considerat ar fi un reper perfect inerţial. Cum în general nu există decît o corespondenţă aproximativă între rezultatele teoriei şi ale experienţelor, se consideră că reperele sînt de un grad cu atît mai mare de *inerţialitate,* cu cît aproximaţia este mai bună. Pînă acum, *reperul heliocentric* este cel care are cel mai mare grad de *inerţialitate.* Pentru anumite mişcări mecanice pentru care sînt satisfăcătoare aproximaţii de ordinul celei de-a treia cifre semnificative şi Pămîntul poate fi acceptat ca un reper *inerţial.*

14.A.2. Principiul relativităţii al mecanicii newtoniene

Toate sistemele de referinţă în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă în raport cu un sistem inerţial sînt de asemenea sisteme inerţiale.

Legile mecanicii *newtoniene* sînt identice în toate sistemele inerţiale, deoarece toate aceste sisteme sînt *echivalente.*

Galileo Galilei a enunţat principiul relativităţii astfel: *nici o experienţă mecanică efectuată într-un sistem inerţial nu poate să pună în evidenţă mişcarea sistemului, după cum nici o experienţă mecanică nu poate fi influenţată de mişcarea sistemului inerţial.*

14.A.3. Repausul relativ

Dacă punctul material trebuie să se găsească în repaus relativ faţă de reperul mobil, $\bar{v}_r$ trebuie să fie nul şi în consecinţă, $\bar{a}_r = 0$ şi $\bar{a}_c = 0$. Din ecuaţia (14.3) a mişcării relative nu mai rămîne decît condiţia *necesară* şi *suficientă* a *repausului relativ:*

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0, \tag{14.4}$$

adică: *sistemul de forţe date şi de legătură, efectiv aplicate punctului material, la care se adaugă forţele de transport, să formeze un sistem de forţe care se echilibrează.*

Forţa de transport $\bar{F}_t$ nu este ca $\bar{F}$, rezultanta forţelor date şi de legătură, *efectiv* aplicată punctului material. Ea se datoreşte inerţiei punctului material şi se aplică efectiv asupra *agenţilor* care modifică sau tind să modifice mişcarea punctului material. Condiţia (14.4) este una de *echilibru dinamic, echilibru fictiv* care ar fi fost de *echilibru real* numai dacă şi $\bar{F}_t$ ar fi fost aplicată efectiv punctului material. Cum nu este cazul, metoda folosirii forţelor cu caracter inerţial, adică a echilibrului fictiv, este un mod de a rezolva problemele dinamicii cu mijloacele staticii. De aceea, metoda se numeşte *cinetostatică.*

14.B. APLICAȚII LA DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE ȘI LA REPAUSUL RELATIV ALE PUNCTULUI MATERIAL

14.B.1. Un tub OB se rotește în planul orizontal, în jurul unei axe verticale ce trece prin extremitatea O, cu viteza unghiulară constantă ω_0. În interiorul tubului se deplasează de la A spre B un punct material M de masă m. În momentul inițial punctul se află în A ($OA = b$), viteza sa în raport cu tubul fiind nulă. Să se determine legea de mișcare a punctului, precum și reacțiunea tubului (fig. 14.B.1).

Rezolvare. Ecuația fundamentală a mișcării relative este:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c.$$

Utilizînd sistemul de referință $Oxyz$ (fig. 14.B.1), $\bar{F}$ va avea expresia:

$$\bar{F} = N_x\bar{i} + (N_z - mg)\,\bar{k}.$$

Pentru determinarea lui $\bar{F}_t$ se calculează accelerația de transport a punctului M, care are doar o componentă normală, cea tangențială fiind nulă, deoarece ω_0 este constant:

$a_{tn} = \omega_0^2 OM = \omega_0^2 y$ și este îndreptată de la M spre O, deci:

$$\bar{F}_t = m\omega_0^2 y\bar{j}.$$

Pentru determinarea lui $\bar{F}_c$ se calculează accelerația Coriolis. Direcția și sensul lui $\bar{a}_c$ rezultă din produsul vectorial:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \text{ (fig. 14.B.1), iar modulul: } a_c = 2\omega_0\dot{y}.$$

Rezultă: $\bar{F}_c = -2m\omega_0\dot{y}\bar{i}$.

Proiectînd ecuația de mișcare pe axele triedrului $Oxyz$, se obține:

$$(x)\ 0 = N_x - 2m\omega_0\dot{y};\quad (y)\ m\ddot{y} = m\omega_0^2 y;\quad (z)\ 0 = N_z - mg;$$

de unde $N_x = 2m\omega_0\dot{y}$; $\ddot{y} - \omega_0^2 y = 0$; $N_z = mg$.

Legea de mișcare se obține rezolvînd ecuația diferențială:

$$\ddot{y} - \omega_0^2 y = 0.$$

Soluția ecuației este de forma:

$$y = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t},$$

respectiv:

$$\dot{y} = \omega_0 C_1 e^{\omega_0 t} - \omega_0 C_2 e^{-\omega_0 t}.$$

Se determină constantele de integrare punînd condițiile inițiale: la $t = 0$:

$$y_0 = b;\quad \dot{y}_0 = 0.$$

Rezultă:

$$C_1 = C_2 = \frac{b}{2}.$$

Deci:

$$y = \frac{b}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = b\,\text{ch}\,\omega_0 t,$$

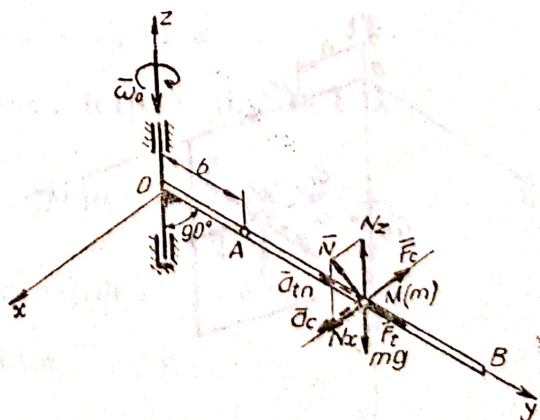


Fig. 14.B.1

respectiv:

$$\dot{y} = \omega_0 \frac{b}{2}\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right).$$

Componentele reacţiunii N sînt:

$$N_x = m\omega_0^2 b\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right); \quad N_z = mg.$$

Rezultă N:

$$N = m\sqrt{b^2\omega_0^4\left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}\right)^2 + g^2}.$$

14.B.2. Un punct material M de masă m se poate mişca fără frecare în planul xOz, care se roteşte cu viteza unghiulară ω_0 constantă în jurul axei verticale Oz. Să se studieze mişcarea relativă a acestui punct, ştiind că în momentul iniţial se află în $M_0(x_0 = b,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0)$, avînd viteza relativă iniţială egală cu zero şi să se determine reacţiunea planului (fig. 14.B.2).

R e z o l v a r e. Se calculează forţele care intervin în ecuaţia fundamentală a mişcării relative:

$$\bar{F} = N\bar{j} + mg\bar{k}.$$

Pentru determinarea forţei de transport, se calculează acceleraţia de transport a punctului M; avînd în vedere rotaţia uniformă a plăcii (ω_0 constant), componenta tangenţială a acceleraţiei este nulă, rămînînd componenta normală:

$$a_{tn} = \omega_0^2 x, \quad \text{respectiv} \quad \bar{a}_{tn} = -\omega_0^2 x\bar{i}.$$

Deci:

$$\bar{F}_t = m\omega_0^2 x\bar{i}.$$

Pentru determinarea forţei Coriolis se calculează acceleraţia Coriolis:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \dot{x} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = 2\omega_0\dot{x}\bar{j}.$$

Rezultă:

$$\bar{F}_c = -2m\omega_0\dot{x}\bar{j}.$$

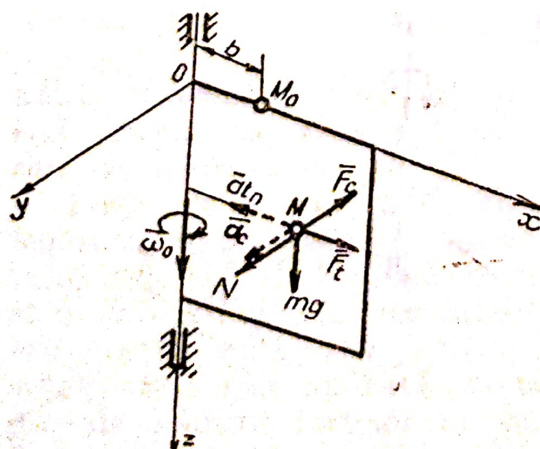


Fig. 14.B.2

Se proiectează ecuaţia fundamentală a mişcării relative a punctului material, pe cele trei axe:

$$(x)\ \ m\ddot{x} = m\omega_0^2 x; \quad (y)\ \ 0 = N - 2m\omega_0\dot{x};$$

$$(z)\ \ m\ddot{z} = mg.$$

Integrînd prima şi ultima ecuaţie şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale: $t = 0$

$$x_0 = b; \quad \dot{x}_0 = 0;$$

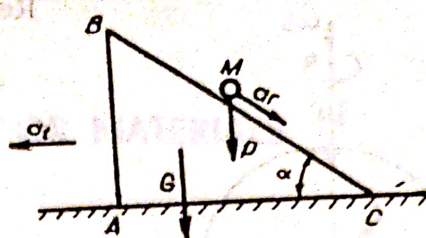
$$y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = 0;$$

$$z_0 = 0; \quad \dot{z}_0 = 0;$$

rezultă ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = \frac{b}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = b \operatorname{ch} \omega_0 t;$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2.$$

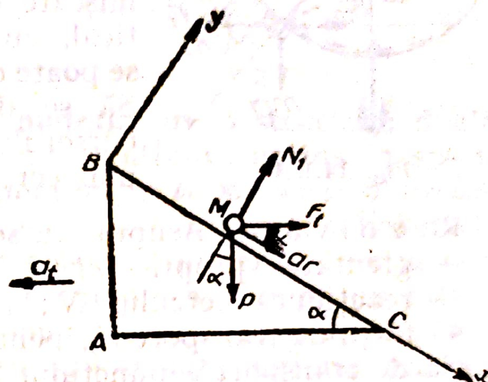


Traiectoria relativă este:

$$x = b \operatorname{ch}\left(\omega_0 \sqrt{\frac{2z}{g}}\right),$$

iar reacțiunea normală:

$$N = 2m\omega_0^2 b \operatorname{ch} \omega_0 t.$$



14.B.3. O pană ABC de greutate G, avînd forma unui triunghi dreptunghic cu unghiul $ACB = \alpha$ dat (fig. 14.B.3, a), se reazemă fără frecare pe un plan orizontal. Pe fața BC a penei se găsește un punct material M de greutate P, care poate aluneca fără frecare în raport cu pana. Să se determine accelerația penei și a punctului material, precum și reacțiunile, știind că sistemul se află inițial în repaus.

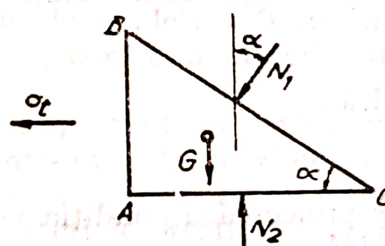


Fig. 14.B.3

R e z o l v a r e. Se izolează punctul material (fig. 14.B.3, b). Asupra sa acționează forțele:

P — greutatea proprie;

N_1 — reacțiunea feței înclinate a penei;

$\bar{F}_t = -\frac{P}{g}\bar{a}_t$ — forța de transport, îndreptată în sens invers lui $\bar{a}_t$.

Se scrie ecuația mișcării relative a punctului material, proiectată pe axele alese în figura 14.B.3, b:

$$(Bx) \quad \frac{P}{g} a_r = F_t \cos \alpha + P \sin \alpha;$$

$$(By) \quad 0 = N_1 - P \cos \alpha + F_t \sin \alpha.$$

Se izolează pana, asupra căreia acționează forțele (fig. 14.B.3, c):

G — greutatea proprie;

N_1 — acțiunea punctului material M asupra feței BC:

N_2 — reacțiunea planului orizontal.

Mișcarea de translație a penei are ecuațiile:

$$\frac{G}{g} a_t = N_1 \sin \alpha$$

$$0 = N_2 - G - N_1 \cos \alpha$$

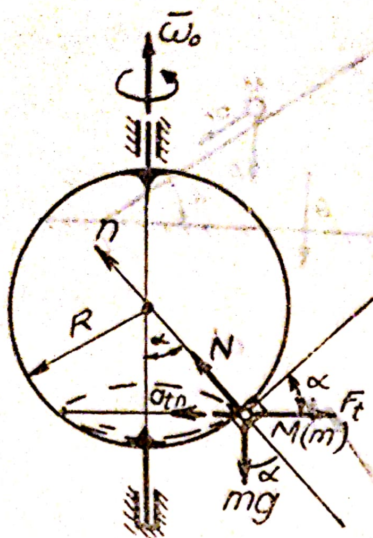


Fig. 14.B.4

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, rezultă:

$$a_r = \frac{(G+P)\sin\alpha}{G+P\sin^2\alpha}g; \quad a_t = \frac{P\sin 2\alpha}{2(G+P\sin^2\alpha)}g;$$

$$N_1 = \frac{GP\cos\alpha}{G+P\sin^2\alpha}; \quad N_2 = \frac{G+P}{1+\frac{P}{G}\sin^2\alpha}.$$

14.B.4. Un cerc de sîrmă cu raza R are o mişcare de rotaţie în jurul diametrului său vertical, cu viteza unghiulară constantă ω_0. Pe cerc se poate deplasa fără frecare un cursor M de masă m. Să se determine poziţiile de repaus relativ ale cursorului (fig. 14.B.4), precum şi valoarea reacţiunii cercului.

R e z o l v a r e. Asupra cursorului M acţionează următoarele forţe:
— greutatea proprie mg;
— reacţiunea cercului N;
— forţa de transport F_t, pentru determinarea căreia se calculează acceleraţia de transport a punctului M, aflat pe cercul de rază R în mişcare de rotaţie; ω_0 fiind constant, componenta tangenţială a acceleraţiei este nulă, rămînînd doar componenta normală (fig. 14.B.4):

$$a_{tn} = \omega_0^2 R \sin\alpha.$$

Rezultă:

$$F_t = m\omega_0^2 R \sin\alpha.$$

Se proiectează condiţia vectorială de repaus relativ pe axele triedrului $Mtnb$:

$$(Mt); \quad -mg\sin\alpha + F_t\cos\alpha = 0;$$

$$(Mn); \quad N - mg\cos\alpha - F_t\sin\alpha = 0.$$

Înlocuind F_t în prima ecuaţie, rezultă:

$$\sin\alpha(-mg + m\omega_0^2 R\cos\alpha) = 0.$$

Soluţiile acestei ecuaţii sînt:

$$\sin\alpha = 0; \quad \alpha = 0; \quad \alpha = \pi.$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega_0^2 R}; \quad \alpha = \pm \arccos\frac{g}{\omega_0^2 R}.$$

Reacţiunea cercului pentru $\alpha = 0,\ \pi,\ N = mg$;

$$\text{pentru } \alpha = \pm\arccos\frac{g}{\omega_0^2 R}; \quad N = m\omega_0^2 R.$$

Capitolul 15

INTRODUCERE ÎN DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE. MĂRIMI DINAMICE

15.A. PREZENTARE TEORETICĂ

15.A.1. Sisteme materiale

În stadiul actual al ştiinţelor naturii, materia are o structură duală: *substanţa*, discontinuă, concentrată şi *cîmpul*, continuu, extins în spaţiu.

În mecanica newtoniană se studiază numai *mişcarea mecanică* a *modelului* de sistem material, corpul constituit numai din substanţă, adică făcîndu-se abstracţie de *cîmpul propriu* al acestor corpuri. Influenţa acestui cîmp asupra mişcării mecanice a corpurilor de pe suprafaţa pămîntului este cu totul neglijabilă în comparaţie cu acţiunea cîmpului gravitaţional al pămîntului, cu aceea a unui cîmp electromagnetic sau cu alte acţiuni, cum sînt acţiunile de contact dintre corpuri.

Pentru corpul constituit numai din substanţă, oglindită prin masa sa inertă sau gravifică, mecanica foloseşte o serie de modele definite la pct. I,A: punct material, sistem de puncte materiale, continuu material deformabil, sau nedeformabil (solidul rigid) etc.

În mecanica newtoniană, o caracteristică importantă a interacţiunii este forţa, iar aceasta poate fi reprezentată printr-un *vector legat* de punctul de aplicaţie, originea acestui vector. Ca urmare, folosirea modelelor de punct material şi de sistem discret de puncte materiale prezintă importante simplificări în studiul matematic al mişcării mecanice a acestor modele. Astfel, în problema mişcării unui sistem de n (finit) puncte materiale M_i, de mase m_i, acţionate de *forţe exterioare*, date şi de legătură $\bar{F}_i$ ($i = 1, 2, 3 \dots n-1, n$) şi de *forţe interioare* $\bar{F}_{ij}$ (fig. 15.A.1), care ascultă şi de principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii, unde $j = 1, 2, 3 \dots n-1, n$, cu condiţia $j \neq i$, se poate ajunge mai uşor la unele rezultate decît în cazul problemei mişcării unui continuu.

Aşa după cum s-a procedat la pct. III.7, folosirea rezultatelor stabilite asupra unui sistem discret de puncte materiale, la un continuu material, are un caracter axiomatic.

P r e c i z ă r i

În general, sistemele materiale discrete sau continue sînt considerate, la stabilirea rezultatelor, ca *deformabile*. În consecinţă, forţele sînt reprezentabile *numai prin vectori legaţi de punct*. În aceste condiţii rezultatele devin utile şi altor mecanici (Hidraulica, Mecanica fluidelor, Rezistenţa materialelor etc.).

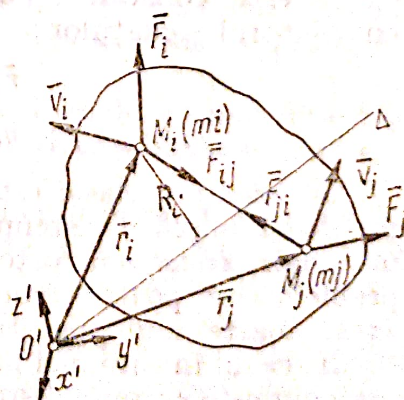


Fig. 15.A.1

Forţele interioare nu se echilibrează, deşi, fiind două cîte două egale şi direct opuse, ele au o *sumă nulă*. Aceasta deoarece ele nu acţionează asupra aceluiaşi punct material. Forţele

interioare apar numai în cazul unor sisteme deformabile şi, în consecinţă, ele *nu pot fi reprezentate prin vectori alunecători*. De pildă, forţele de interacţiune dintre moleculele unui gaz închis în cilindrul unei maşini nu se echilibrează.

Un sistem de puncte materiale care nu are legături exterioare, sau nu este acţionat de forţe dinafara lui, se numeşte *sistem izolat*.

Cu toate că în natură nu există sisteme izolate, totuşi unele sisteme materiale pot fi, cu o foarte bună aproximaţie, asimilate cu un sistem izolat. Exemplu: sistemul solar.

15.A.2. Problema fundamentală

Mărimi de stare. În mecanică, mărimile care determină, la momentul t, starea unui punct material M_i sînt: $\bar{r}_i$ = vectorul de poziţie, m_i = masa inertă sau gravifică a punctului şi $\bar{v}_i$ = viteza punctului.

Mărimile de stare mecanică la un anumit moment $t = t_1$, de obicei $t = 0$, adică $\bar{r}_{i0}$ şi $\bar{v}_{i0}$, m_i fiind invariabil, sînt *condiţiile iniţiale* ale mişcării punctului material M_i.

Enunţul problemei: Se cunosc mărimile de stare, la momentul iniţial, al unui sistem de n puncte materiale $M_i (i = 1, 2, 3 \ldots n-1, n)$, asupra cărora acţionează forţe exterioare date şi de legătură, reprezentate pentru M_i prin $\bar{F}_i$ şi forţe interioare $\bar{F}_{ij}$ $(j = 1, 2, 3 \ldots n-1\ n)$, cu specificarea că $\bar{F}_{ij} \neq 0$.

În ipoteza că atît forţele exterioare $\bar{F}_i$ cît şi cele interioare $\bar{F}_{ij}$ sînt funcţii vectoriale cunoscute de timpul t, de vectorul de poziţie $\bar{r}_i$ şi de viteza $\bar{v}_i$ a punctului de aplicaţie, se cere să se determine mişcarea sistemului de puncte materiale M_i.

Pentru rezolvarea problemei este necesar ca, în primul rînd, să se rezolve sistemul de n ecuaţii diferenţiale vectoriale, de ordinul 2, cu n necunoscute $\bar{r}_i$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n-1, n)$:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.1}$$

în care $\bar{F}_{ii} = 0$.

Soluţiile sistemului (15.1), cînd există integralele generale au forma:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}), \tag{15.2}$$

unde $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}$ sînt $2n$ constante vectoriale, independente între ele. Aceste constante pot fi determinate folosindu-se condiţiile iniţiale, cu ajutorul ecuaţiilor:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{i0} &= \bar{r}_i(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}) \\ \bar{v}_{i0} &= \dot{\bar{r}}_i(0, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}). \end{aligned} \tag{15.3}$$

Un exemplu clasic este „*problema celor* n *corpuri*", cum este denumită problema mişcării sistemului solar, considerat, ca un sistem de n puncte materiale, *izolat*, cu forţe interioare *gravitaţionale atractive*. Pentru $n = 2$, problema se poate rezolva destul de uşor, însă dificultăţile matematice cresc foarte mult pentru $n \geqslant 3$.

În cazul în care nici nu se cunosc expresiile forţelor interioare, problema, aşa cum este ea pusă, este insolubilă, deoarece nu se poate rezolva sistemul celor n ecuaţii diferenţiale vectoriale (15.1).

15.A.3. Teoremele generale

Totuşi, cu ajutorul mărimilor de stare m_i, $\bar{r}_i$ şi $\bar{v}_i$ s-au format alte mărimi : $m_i\bar{v}_i$; $\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i$; $\frac{1}{2} m_i v_i^2$, denumite, respectiv : *cantitatea de mişcare* a punctului M_i *momentul cinetic* al punctului M_i faţă de O, *energia cinetică* a punctului M_i. toate calculate pentru momentul t şi în raport cu reperul fix $Oxyz$. Scriind cele n ecuaţii diferenţiale (15.1), în ipoteza maselor m_i independente de mişcare, sub forma :

$$\frac{d}{dt}(m_i\bar{v}_i) = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \; j \neq i, \qquad (15.4)$$

se poate ajunge pentru sistemul de puncte materiale la expresii în care nu mai apar forţele interioare. Ele exprimă, sub denumirea de *teoreme generale*, variaţia unor mărimi care caracterizează în fiecare moment mişcarea sistemului de puncte materiale. Mai mult, în anumite condiţii, ecuaţiile rezultate din (15.1) se pot integra o dată. Aceste *integrale prime* ale sistemului de ecuaţii diferenţiale exprimă *conservarea* aceloraşi mărimi.

15.A.4. Noţiuni, mărimi, unităţi de măsură

Mecanica fiind prima parte a ştiinţelor naturii, este şi prima care foloseşte o serie de noţiuni şi mărimi care apoi sînt reluate şi dezvoltate în cadrul altor discipline. De aici şi obligaţia mecanicii să fie prima care să-şi *prezinte* aceste noţiuni şi mărimi. Evident, această prezentare se poate face în multe moduri : fie formal matematic prin expresia mărimii, ignorînd cu totul noţiunea, de pildă : „masa este un scalar pozitiv m care se măsoară în kg" sau, „forţa este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie şi se măsoară în N", fie confundîndu-se noţiunea cu mărimea, de pildă, cînd se spune : se aplică un moment $\bar{M}$, în loc de : se aplică un cuplu de moment $\bar{M}$. Alte ori, pornind de la faptul că ecuaţiile mecanicii newtoniene sînt de obicei omogene, se confundă termenul din stînga al ecuaţiei cu cel din dreapta, pe motiv că au aceleaşi expresii de dimensiuni. Astfel multă vreme definiţia forţei a fost aceea din rîndurile precedente, apoi, pînă nu de mult se confunda *lucrul mecanic* cu *energia*, iar nici acum nu se face distincţie dintre *impuls* şi *cantitatea de mişcare*.

Justificarea care se dă uneori este următoarea : „O definiţie dată la mecanică nu poate fi folosită întotdeauna şi în alte domenii". Nici nu ar fi corect, deoarece definiţiile date la mecanică oglindesc realităţile din această disciplină. Cînd se trece la o altă disciplină, se păstrează tot ceea ce corespunde şi se dezvoltă definiţia potrivit fenomenelor studiate în această disciplină.

În consecinţă, în acest manual se va continua să se definească noţiunile şi mărimile, în lumina materialismului dialectic şi strict în limitele mecanicii newtoniene.

Astfel, la Capitolul 1, după definiţia dată de Lenin noţiunii de materie, s-au prezentat două din însuşirile materiei întîlnite în mecanică : *gravitaţia* şi *inerţia*, oglindite, respectiv, în mărimile de *masă gravifică* şi de *masă inertă* şi apoi s-a dat definiţia masei inerte etc.

De asemenea, s-au definit noţiunea şi mărimea de forţă în cadrul mişcării mecanice a materiei şi a legăturii acestei mişcări cu alte forme, mecanice, de mişcare.

La Capitolul 2, s-au definit: noţiunea de cuplu de forţe şi mărimea de moment, măsura cuplului, noţiunea de torsor al unui sistem de forţe, măsura torsorului, noţiunea şi mărimea de moment static etc.

15.A.5. Modele teoretice

Pornind de la unele experienţe, de pildă, de la ciocnirea solidelor, se pot deduce modele teoretice care să permită atît studiul fenomenului, cît şi definirea unor mărimi. Asemenea modele se pot deduce şi din mişcările rachetelor cosmice, a sateliţilor artificiali sau naturali, a planetelor etc. De pildă, se presupune existenţa unui solid rigid S, de masă M, izolat în spaţiu, care se mişcă astfel încît triedrul $Oxyz$, invariabil legat de solid, să fie un reper inerţial. Se consideră un punct material P de masă m, cu totul neglijabilă faţă de M, astfel încît P să nu influenţeze în nici un moment mişcarea lui S.

Dacă P este extrem de departe de S, izolat, el se mişcă în virtutea inerţiei. Dacă în această mişcare S şi P se apropie, la un moment dat S şi P se interacţionează. Din acest moment, se poate analiza *mişcarea relativă* a lui P în raport cu S, presupus fix. Se notează cu $\bar{F}$ forţa de interacţiune cu caracter gravitaţional. $\bar{F}$ este o funcţie vectorială variabilă.

În funcţie de condiţiile de mişcare, la un moment t, considerat iniţial, adică în funcţie de $\bar{r}_0$, $\bar{v}_0$ şi $\alpha = \sphericalangle(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$, mişcarea poate continua în diferite moduri. Se reţin numai condiţiile în care S captează pe P transformîndu-l în satelit.

În general, P descrie o elipsă cu unul din focare în O (fig. 15.A.2, *a*). În cazul special[1], cînd $|\bar{v}_0| = \sqrt{\frac{KM}{r_0}}$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, P descrie un cerc cu centrul în O care este şi centrul de masă atractiv al lui S (fig. 15.A.2, *b*). În cazul cînd P descrie o elipsă, în afară de aspectul *mecanic* al *interacţiunii*, care se traduce prin modificarea mişcării mecanice adică prin *acceleraţia* mobilului, mai există şi un aspect[2] *nemecanic*, tradus prin *deformarea* sistemului de puncte materiale ($S.P.$).

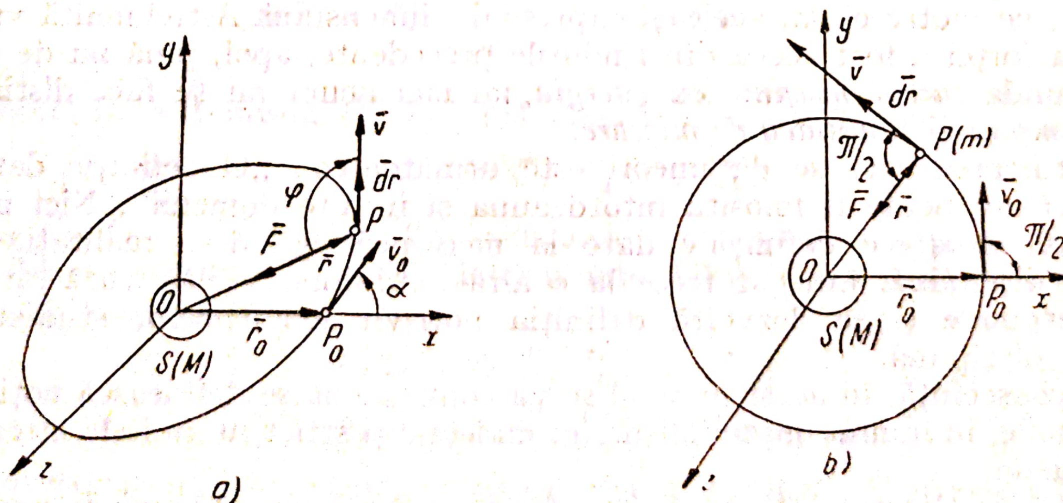


Fig. 15.A.2

[1] Evident, se mai admite că S este sferic şi omogen, iar P nu mai este acţionat de alte forţe în mişcarea lui, de pildă de rezistenţa mediului, ceea ce este realizabil cu o bună aproximaţie.

[2] Deşi interacţiunea în general este un proces extrem de complex, aici se iau în considerare numai două din aspectele ei.

În cazul special cînd P descrie un cerc cu centrul în O, nu există decît aspectul mecanic al interacţiunii, exprimat prin: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\bar{F}}{m}$. Dacă m nu variază în timp, relaţia se scrie sub forma (15.5) apoi, integrată în intervalul de timp $t' - t$, sub forma (15.6)

$$\bar{F}dt = d(m\bar{v}), \tag{15.5}$$

$$\int_t^{t'} \bar{F}dt = m\bar{v}' - m\bar{v}. \tag{15.6}$$

Înmulţind $\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$ scalar cu $d\bar{r}$, se ajunge la

$$\bar{F}d\bar{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{15.7}$$

şi

$$\int_t^{t'} \bar{F}d\bar{r} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2. \tag{15.8}$$

Aceste relaţii, două din consecinţele ecuaţiei fundamentale a mecanicii newtoniene, sînt două din *teoremele importante ale mişcării punctului material*. Ele leagă mărimi care măsoară interacţiunea şi mişcarea mecanică a punctului material, *legături de cauză şi efect*. Se introduc denumirile acestor mărimi:

$\bar{F}dt$ = impulsul elementar al interacţiunii;
$m\bar{v}$ = cantitatea de mişcare a punctului P;
$\bar{F}d\bar{r}$ = lucrul mecanic elementar al interacţiunii;
$\frac{1}{2}mv^2$ = energia cinetică a punctului P.

15.A.6. Analiza relaţiilor

Chiar din punct de vedere matematic reiese că partea întîia a ecuaţiei (15.5) nu este, în general, o diferenţială exactă, pe cînd partea a doua este. La fel şi pentru relaţia (15.7). Deci, nu se va identifica *impulsul cu cantitatea de mişcare*, aşa după cum azi nu se mai identifică lucrul mecanic cu energia.

Din (15.7) aplicată modelului special (fig. 15.A.2, *b*), rezultă că nu în orice condiţii forţa poate furniza un lucru mecanic.

Lucrul mecanic *nu este o mărime derivată din forţă*. Analizînd modelul general (fig. 15.A.2, *a*) rezultă că lucrul mecanic apare numai dacă în procesul de interacţiune apare şi *deformaţia*, considerată ca o *formă nemecanică* de mişcare. În general, condiţia apariţiei lucrului mecanic este schimbarea calitativă *a mişcării*, adică trecerea de la o formă la o altă formă de mişcare[1].

Cantitatea de mişcare $m\bar{v}$ şi energia cinetică $\frac{1}{2}mv^2$ *sînt cele două măsuri ale mişcării mecanice*. În modelul special (fig. 15.A.2, *b*) cantitatea de

[1] Fr. Engels. *Dialectica naturii*, pp. 88—89. E.S.P.L.A. 1950.

mişcare variază datorită impulsului, iar energia cinetică nu variază, neexistînd deformaţie şi deci nici lucru mecanic.

În modelul general (fig. 15.A.2, *a*) există atît impuls, cît şi lucru mecanic, astfel că variază ambele măsuri ale mişcării mecanice.

Impulsul şi lucrul mecanic *sînt două din măsurile interacţiunii.*

Lucrul mecanic elementar $\bar{F}d\bar{r} = |\bar{F}||d\bar{r}|\cos\varphi$, poate fi pozitiv, în care caz energia cinetică a punctului material creşte, poate fi nul, cînd nu variază energia cinetică a punctului material, poate fi negativ, cînd energia cinetică a punctului se micşorează. Deoarece solidul S este presupus fix, aceasta este şi variaţia energiei cinetice a sistemului (S, P). Dar sistemul (S, P) este izolat, astfel că se pune întrebarea : de unde vine plusul de energie cinetică şi ce devine partea de energie cinetică a sistemului, cînd acesta este în mişcare ?

Răspunsul este : sistemul (S, P) mai posedă în afară de energia cinetică a lui P şi o *energie potenţială.* În mecanica newtoniană această energie depinde *numai de poziţia în spaţiu a punctelor materiale ale sistemului,* aici de poziţia relativă dintre S şi P. Dacă prin mişcare P se apropie de S, energia lui cinetică creşte şi scade energia potenţială a sistemului ; dacă P se depărtează de S, scade energia cinetică a lui P şi creşte energia potenţială a sistemului, iar dacă P descrie un cerc cu centrul în O, atît energia cinetică a lui P cît şi energia potenţială a sistemului (S, P) nu variază. Energia potenţială se mai numeşte *energie de poziţie.*

15.A.7. **Definiţii**

Cantitatea de mişcare măsoară *capacitatea* mişcării mecanice de a se *transmite* de la un corp la altul *tot sub formă de mişcare mecanică.* Expresia matematică este $m\bar{v}$. Este considerată în fizică drept una din mărimile de stare. Unitatea de măsură în sistemul SI este kg $\frac{m}{s}$.

Impulsul măsoară *transmiterea mişcării mecanice,* de la un corp la altul în intervalul de timp de la t la t'.

Expresia matematică este : $\int_t^{t'} \bar{F}dt$. Unitatea de măsură în sistemul SI este Ns.

Energia cinetică măsoară *capacitatea* mişcării mecanice de a trece într-o altă formă, *nemecanică, de mişcare.* Expresia matematică este $\frac{1}{2}mv^2$. Unitatea de măsură este aceeaşi ca pentru orice formă de energie; în SI este *joule.*

Lucrul mecanic măsoară *trecerea unei forme de mişcare în altă formă de mişcare,* în intervalul de timp de la t la t'. Expresia matematică este $\int_t^{t'} \bar{F}d\bar{r}$. În toate sistemele se folosesc aceleaşi unităţi ca pentru energie : joule, pentru a nu se confunda lucrul mecanic cu *momentul unei forţe* sau cu *momentul unui cuplu,* care au în sistemul SI unitatea Nm.

Energia. Engels a definit-o ca *măsura generală a mişcării sub toate formele şi în toate transformările.*

Energia potențială este măsura *mişcării nemecanice* a unui sistem material, *capabilă de a trece şi în forma mecanică de mişcare.* În mecanica newtoniană energia potențială (E_p) depinde numai de poziția în spațiu a particulelor sistemului material, concepute ca puncte materiale.

Observație.

Uneori se mai defineşte energia sub forma: capacitatea unui sistem de a produce un lucru mecanic, în sensul de a furniza un travaliu.

15.A.8. Mărimi dinamice la sisteme

Folosind notațiile de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1) pentru sistemul discret de puncte materiale, sau cele de la Capitolul 3 (fig. 3.A.3) pentru sistemele continue, se pot determina expresiile unor mărimi şi ale unor importante teoreme folosite în dinamică.

Cantitatea de mişcare a unui sistem în raport cu un reper fix. Notație $\overline{H}$.

Sistem de puncte materiale: $\overline{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{v}_i.$ (15.9, *a*)

Sistem continuu material: $\overline{H} = \int_D \overline{v} dm.$ (15.9, *b*)

Sistem nedeformabil în mişcare de translație, cu viteza $\overline{v}$:

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{n} (m_i)\overline{v} = m\overline{v} \text{ sau } \overline{H} = \overline{v}\int_D dm = m\overline{v}.$$

Unități de măsură în SI: kg $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (kilogram metru pe secundă).

Momentul cinetic. Cantitatea de mişcare fiind o mărime vectorială are nevoie pentru determinarea ei pozițională şi de *momentul cinetic* care este momentul în raport cu un punct fix O, sau în raport cu o axă fixă (Δ), a cantității de mişcare. Pentru un punct material de masă m_i şi viteză $\overline{v}_i$, momentul cinetic în raport cu O este: $\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i$ unde $\overline{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului M_i (fig. 15.A.1). Momentul cinetic în raport cu axa (Δ) este proiecția ortogonală a lui $\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i$ pe axa (Δ). Dacă $\overline{u}$ este versorul axei, produsul mixt $(\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i)\overline{u}$ este *scalarul momentului cinetic* al punctului M_i în raport cu axa (Δ).

Notații: Momentul cinetic al unui sistem în raport cu O: $\overline{K}_o$, în raport cu (Δ): $\overline{K}_\Delta$, cu scalarul față de axa (Δ): K_Δ.

Sistem de puncte materiale:

$$\overline{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i, \quad K_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i)\,\overline{u}, \qquad (15.10,\ a)$$

iar dacă este nevoie de o exprimare vectorială $\overline{K}_\Delta = K_\Delta\overline{u}$.

Sistem continuu material:

$$\overline{K}_o = \int_D \overline{r} \times \overline{v} dm; \qquad K_\Delta = \overline{K}_o\overline{u}, \text{ etc.} \qquad (15.10, b)$$

Sistem nedeformabil în mişcare de rotaţie în jurul axei (Δ) cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$:

$$\overline{K}_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\overline{\omega} - \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{r}_i\overline{\omega})\overline{r}_i\,; \quad K_\Delta = \overline{K}_0 \frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|} = \frac{\overline{\omega}^2}{|\overline{\omega}|}\Sigma\, m_i R_i^2$$

$\overline{K}_\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2\right)\overline{\omega}$, unde R_i este distanţa punctului M_i faţă de axa de rotaţie (Δ). În aceste expresii $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ este momentul de inerţie al sistemului în raport cu O şi se notează cu J_0, iar $\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ este momentul de inerţie al sistemului în raport cu axa (Δ) şi se notează cu J_Δ. În aceste condiţii, momentul cinetic al sistemului nedeformabil, în mişcare de rotaţie reprezentată prin $(\overline{\omega})$, în raport cu axa de rotaţie (Δ), se poate scrie vectorial:

$$\overline{K}_\Delta = J_\Delta \overline{\omega} \qquad (15.11,\ a)$$

sau scalar

$$K_\Delta = J_\Delta \omega, \qquad (15.11,\ b)$$

deoarece $\overline{\omega}$ este un vector situat pe axa (Δ), iar ω este valoarea scalară a lui $\overline{\omega}$ în raport cu versorul $\overline{u}$ al axei (Δ).

Unităţile de măsură, în sistemul SI, pentru momentele cinetice sînt: kgm^2/s iar pentru momentele de inerţie, kgm^2 etc.

Momentul de inerţie împreună cu momentul static sînt două mărimi care dau indicaţii asupra modului în care este distribuită, permanent sau la un moment dat, masa într-un sistem, în raport cu un anumit reper. Reperul poate fi *originea* unui triedru de obicei ortogonal, oricare din *axele* sau *planele* acestui triedru.

Momentele de inerţie pot fi: *polare* J_o, axiale (J_x, J_y sau J_z) sau planare, de pildă $J_{xoy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$ pentru un sistem discret de puncte materiale sau $J_{xoy} = \int_{(D)} z^2 dm$ pentru un continuu material. Mai există şi *produse* de *inerţie* de pildă $J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$ sau $J_{xy} = \int_{(D)} xy dm$.

Definiţii. Momentul de inerţie J_Δ, al unui solid rigid în rapot cu o axă (Δ), este *măsura inerţiei solidului rigid în mişcarea de rotaţie uniformă în jurul axei* (Δ).

Raza de inerţie i a unui sistem material de masă totală m, în raport cu un punct, o axă sau un plan, este distanţa i a unui punct pînă la reperul considerat, astfel că, dacă în acest punct s-ar concentra masa m, momentul de inerţie să fie egal cu momentul de inerţie al sistemului material în raport cu reperul considerat, adică $mi^2 = J$, sau $i = \sqrt{\frac{J}{m}}$.

Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe paralele

Teoremele lui Steiner sînt enunţate pentru un sistem nedeformabil de n puncte materiale M_i, de mase m_i, determinate, în raport cu reperul cu

originea în O, prin vectorii $\bar{r}_i$, iar în raport cu reperul din O', prin $\bar{r}_i'$; poziția lui O în raport cu O' este dat de $\bar{r}_0$ (fig. 15.A.3). Prin teorema lui Steiner se exprimă relația:

$$J_o' = mr_0^2 + 2\bar{r}\bar{S}_o + J_o, \tag{15.12, a}$$

unde: J_o' și J_o sînt momentele de inerție în raport cu originile O' și O ale sistemului, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, masa sistemului, $\bar{S}_o = m\bar{r}_c$ = momentul static al sistemului în raport cu O, $\bar{r}_c$ = vectorul de poziție al centrului de masă C, în raport cu reperul cu originea în O.

Dacă O coincide cu C, $\bar{r}_c = 0$ și $\bar{S}_o = 0$, iar relația devine:

$$J_o' = mr_o^2 + J_o, \tag{15.12, b}$$

adică: *momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul de inerție al sistemului în raport cu centrul său de masă, adunat cu produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre centrul de masă și punctul oarecare considerat*

Expresia matematică a celei de a doua teoreme este:

$$J_{\Delta'} = md^2 + 2\bar{r}_o\bar{S}_o + J_{\Delta}, \tag{15.13, a}$$

în care notații noi sînt: $J_{\Delta'}$, J_{Δ} adică momentele de inerție ale sistemului în raport cu două axe paralele (Δ') și (Δ), iar d = distanța dintre axele paralele (fig. 15.A.3). Dacă O coincide cu C, adică (Δ) trece prin centrul de masă, $\bar{S}_o = 0$, iar relația devine:

$$J_{\Delta'} = md^2 + J_{\Delta}, \tag{15.13, b}$$

adică: *momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerție al sistemului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă al sistemului și este paralelă cu axa considerată, adunat cu produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.*

O a treia teoremă a lui Steiner privește produsele de inerție: *produsul de inerție al unui sistem de puncte materiale, în raport cu planele unui diedru dreptunghic, este egal cu produsul de inerție al sistemului în raport cu planele unui diedru paralel, la fel orientat cu primul și a cărui muchie trece prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerție, în raport cu planele primului diedru, al centrului de masă în care s-ar presupune concentrată masa sistemului.*

Observații.

Dacă sistemul de puncte materiale este plan, enunțurile teoremelor lui Steiner rămîn neschimbate, cu excepția teoremei pentru produsele de inerție care devine:

Produsul de inerție în raport cu o pereche de axe rectangulare este egal cu produsul de inerție în raport cu axele paralele, la fel orientate cu primele, dar care trec prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerție în raport cu primele axe, ale centrului de masă în care s-ar presupune concentrată masa sistemului.

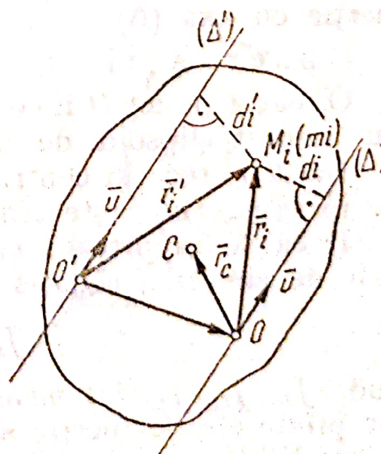


Fig. 15.A.3

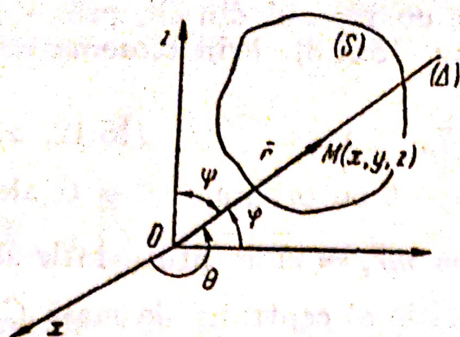


Fig. 15.A.4

Toate teoremele lui Steiner sînt valabile şi pentru sisteme materiale continue.

Variaţia momentelor de inerţie în raport cu axe concurente

Dacă s-au calculat momentul de inerţie (J_x, J_y, J_z) şi produsele de inerţie (J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}) ale sistemului material (S), în raport cu axele triedrului dreptunghic $Oxyz$ (fig. 15.A.4), expresia matematică a momentului de inerţie J_Δ al sistemului (S), în raport cu o axă (Δ) care trece prin O şi formează cu axele Ox, Oy, Oz unghiurile θ, φ şi ψ, ale căror cosinusuri directori sînt α, β şi γ, este:

$$J_\Delta = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha. \qquad (15.14)$$

Variaţia lui J_Δ depinde de α, β şi γ. O imagine a variaţiei lui J_Δ o poate da suprafaţa descrisă de un punct $M(x, y, z)$ al axei (Δ) determinat prin $\bar{r}$ astfel ca $|\bar{r}| = \frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}$, ($J_\Delta \neq 0$), adică rezultată din eliminarea parametrilor α, β şi γ între:

$$x = \frac{k\alpha}{\sqrt{J_\Delta}}; \quad y = \frac{k\beta}{\sqrt{J_\Delta}}; \quad z = \frac{k\gamma}{\sqrt{J_\Delta}}$$

şi (15.14), adică:

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 + J_z \cdot z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = k^2, \qquad (15.15)$$

unde k este o constantă avînd expresia de dimensiuni $[L^2M^{1/2}]$. Ecuaţia (15.15) reprezintă o cuadrică închisă cu centrul în O. În general, este un elipsoid cu excepţia cazului în care sistemul material s-ar reduce la o bară rigidă dreaptă care coincide cu axa (Δ). Acesta este *elipsoidul de inerţie* al sistemului material rigid, în raport cu punctul O. Pentru determinarea lui trebuie calculaţi în prealabil, în raport cu axele şi planele reperului $Oxyz$, termenii J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} şi constanta k. Apoi cu $J_\Delta = \frac{k^2}{r^2}$ se poate determina J_Δ pentru orice direcţie, folosind numai distanţa $OM = r$ între O şi unul din punctele de intersecţie a elipsoidului de inerţie cu axa (Δ).

Observaţii.

Oricărui punct O îi corespunde, pentru un acelaşi sistem material rigid, un anumit elipsoid de inerţie.

Dacă O trece în centrul de masă C al sistemului material, elipsoidul de inerţie se numeşte *central*.

Dacă se raportează elipsoidul la triedrul $CXYZ$ determinat de axele sale de simetrie, ecuaţia elipsoidului central de inerţie devine:

$$J_X X^2 + J_Y Y^2 + J_Z Z^2 = k^2, \qquad (15.15, a)$$

unde J_X, J_Y, J_Z *sînt momentele principale de inerţie* în raport cu noile axe iar produsele de inerţie sînt nule: $J_{XY} = 0$, $J_{XZ} = 0$, $J_{YZ} = 0$, care sînt şi *condiţiile necesare şi suficiente* pentru ca axele şi planele triedrului, $CXYZ$ să fie axe şi plane principale de inerţie.

Momentul de inerție al sistemului rigid în raport cu axa mare a elipsoidului central de inerție este cel mai mic dintre toate momentele de inerție posibile, în raport cu orice axă a sistemului material rigid considerat.

Energia cinetică a unui sistem. Se notează cu E_o energia cinetică în raport cu reperul fix, O fiind origina reperului fix $Ox'y'z'$, cu E_c energia cinetică în raport cu reperul mobil, C fiind centrul de masă considerat ca originea reperului mobil $Cxyz$.

Pentru un sistem oarecare de puncte materiale:

$$E_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2. \qquad (15.16,\ a)$$

Pentru un sistem nedeformabil discret sau continuu în mișcare de *translație*:

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2, \qquad (15.16,\ b)$$

unde: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ sau $m = \int_{(D)} \mathrm{d}m$, iar $\bar{v}_c$ este viteza centrului de masă.

Pentru un sistem nedeformabil, discret sau continuu, în mișcare de *rotație* în jurul unei axe fixe (Δ):

$$E_o = \frac{1}{2} J\omega^2, \qquad (15.16,\ c)$$

unde: $J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ sau $J_\Delta = \int_{(D)} R^2 \mathrm{d}m$, R_i sau R fiind distanțele punctelor la axa fixă, iar $\bar{\omega}$ = vectorul viteză unghiulară, coliniar cu axa (Δ).

Teorema II-a a lui Koenig. Energia cinetică a unui sistem oarecare[1] *de puncte materiale, în raport cu un reper fix, este egală cu energia cinetică a centrului de masă, în care se presupune concentrată întreaga masă* $\left(m = \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$ *a sistemului, adunată cu energia cinetică a sistemului în raport cu reperul care are originea în C, centrul de masă al sistemului, și cu axele paralele cu cele fixe* (fig. 15.A.5), adică:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_c. \qquad (15.16,\ d)$$

Ca aplicație, energia cinetică a unui solid rigid în mișcare plan-paralelă se calculează cu relația:

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \qquad (15.16,\ e)$$

unde J_c este momentul de inerție al solidului în raport cu axa care trece prin C, paralelă cu axa instantanee de rotație $(\Delta, \bar{\omega})$ din momentul considerat.

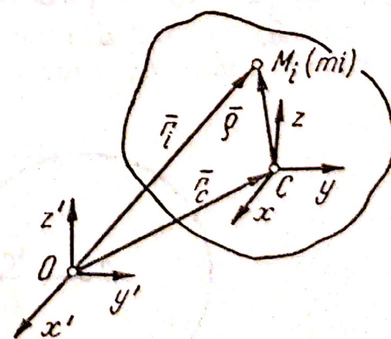


Fig. 15.A.5

[1] chiar deformabil.

Caz particular (fig. 15.A.6) : energia cinetică a unui disc circular omogen de rază R şi masă M care se rostogoleşte fără să alunece pe o dreaptă, este egală cu :

$$E_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

unde: $J_c = \frac{1}{2} M R^2$ iar $v_c = R\omega$ (condiţia de rostogolire fără alunecare).

Rezultatul final este :

$$E = \frac{3}{4} M v_c^2 = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_I \omega^2, \quad (15.17)$$

unde $J_I = \frac{3}{2} M R^2$ = momentul de inerţie al discului în raport cu I, centrul instantaneu de rotaţie.

Lucrul mecanic al forţelor.

În general, lucrul mecanic elementar al unei forţe $\bar{F}(X, Y, Z)$ pentru deplasarea punctului ei de aplicaţie M, reprezentată prin $\mathrm{d}\bar{r}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, adică :

$$L = \bar{F}\mathrm{d}\bar{r} = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z \quad (15.18)$$

nu este o diferenţială exactă.

Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca (15.18) să fie o diferenţială exactă sînt :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \quad (15.19)$$

Se poate găsi o funcţie $U(x, y, z)$ depinzînd explicit numai de coordonatele punctului M, astfel ca :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (15.20)$$

$$\bar{F} = \mathrm{grad}\ U(x, y, z). \quad (15.21)$$

Funcţia $U(x, y, z)$ din care derivă $\bar{F}$ se numeşte funcţie de forţă, iar

$$\bar{F}\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}U(x, y, z).$$

Lucrul mecanic total al forţei $\bar{F}$ pentru deplasarea finită a punctului de aplicaţie M, între $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$, este

$$L_{0-1} = \int_{M_1}^{M_1} \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = \int_{M_0}^{M_0} \mathrm{d}U = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0, \quad (15.22)$$

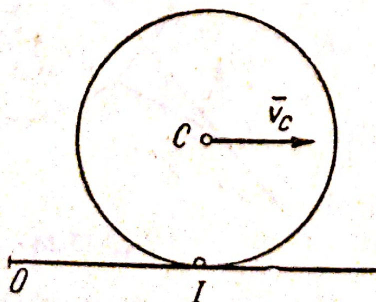


Fig. 15.A.6

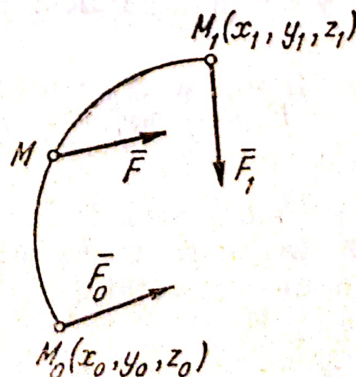


Fig. 15.A.7

şi nu depinde de drumul parcurs şi nici de legea după care se mişcă punctul de aplicaţie al forţei, ci depinde numai de punctele extreme ale traiectoriei (fig. 15.A.7).

Caz particular: lucrul mecanic al greutăţii nu depinde de drumul parcurs de un punct material sau de centrul de masă al unui solid rigid în care se presupune concentrată toată masa solidului, nici de legea mişcării şi este egală cu produsul *greutăţii* şi diferenţa de nivel *h* dintre poziţia *iniţială* şi cea finală a punctului sau centrului de masă.

O b s e r v a ţ i i.

Lucrul mecanic al greutăţii este *pozitiv* dacă poziţia iniţială este la un nivel superior poziţiei finale, este *negativ* dacă poziţia iniţială este la un nivel inferior şi este nul dacă poziţia iniţială se află la acelaşi nivel cu poziţia finală.

Lucrul mecanic pozitiv se numeşte *motor*, lucrul mecanic negativ se numeşte *rezistent.*

Lucrul mecanic elementar al unei forţe aplicată într-un punct al unui solid rigid în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei fixe (Δ) este:

$$\Delta L = \bar{M}_0 \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} d\theta = M_\Delta d\theta, \tag{15.23}$$

unde $\bar{M}_0$ este momentul forţei în raport cu un punct O al axei, M_Δ este scalarul momentului forţei în raport cu axa, pozitiv dacă $\bar{M}_\Delta$ are acelaşi sens cu axa şi negativ dacă $\bar{M}_\Delta$ este de sens contrar cu axa, iar $d\theta$ = unghiul elementar de rotaţie.

Lucrul mecanic al unui cuplu de forţe cu momentul $\bar{M}$ care acţionează un solid rigid în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe fixe (Δ) este:

$$\Delta L = \bar{M} \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} d\theta = M_\Delta d\theta = \bar{M}\bar{\omega} dt, \tag{15.23, b}$$

unde M_Δ este scalarul proiecţiei momentului cuplului pe direcţia axei.

Puterea unui agent

Un sistem material oarecare poate acţiona asupra unui punct material printr-o forţă rezultantă $\bar{F}$, iar asupra unui solid rigid printr-un torsor, adică printr-o forţă $\bar{R}$ şi printr-un cuplu de moment $\bar{M}$.

Sistemul material care acţionează se numeşte agent. Un agent este cu atît mai puternic, cu cît produce în *unitatea de timp* un lucru mecanic mai mare.

Prin definiţie, puterea agentului notată cu P este:

$$P = \frac{\Delta L}{dt}.$$

Agentul acţionează prin forţa $\bar{F}$; puterea este:

$$P = \frac{\bar{F} d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\bar{v}, \tag{15.24}$$

unde $\bar{v}$ este viteza în momentul t al punctului acţionat.

Agentul acţionează asupra unui solid rigid, în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe (Δ), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, printr-un cuplu de moment $\bar{M}$; expresia puterii agentului este:

$$P = \bar{M} \cdot \bar{\omega}. \tag{15.25}$$

Unitatea de putere în sistemul SI este: $\frac{1\text{J}}{\text{s}} = 1\text{W}$ (watt).

15.B. APLICAŢII LA CALCULUL MĂRIMILOR DINAMICE

15.B.1. Să se calculeze momentul de inerţie al unei bare drepte în raport cu extremitatea O şi în raport cu centrul de greutate C, dacă densitatea are o variaţie liniară în lungul axei Ox (fig. 15.B.1). Se cunoaşte că $\rho(0) = \rho_1$ şi $\rho(l) = \rho_2$, l fiind lungimea barei. Se va considera cazul particular al barei omogene $\rho(x) = \rho = \text{const}$.

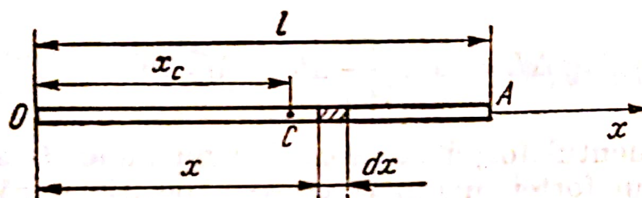


Fig. 15.B.1

Rezolvare. Prin definiţie $J_0 = \int_{(c)} x^2 \mathrm{d}m$.

Din figură rezultă: $\mathrm{d}m = \rho(x)\mathrm{d}x$,

unde: $\rho_x = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x$, reprezintă densitatea liniară într-un punct al barei. Cu aceste notaţii rezultă:

$$J_0 = \int_0^l \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x\right) x^2 \mathrm{d}x = \frac{l^3}{12}(\rho_1 + 3\rho_2).$$

Introducînd masa barei $m = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} l$, se obţine:

$$J_0 = \frac{ml^2}{6} \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Pentru calculul momentului de inerţie faţă de centrul maselor se aplică teorema lui Steiner:

$$J_C = J_0 - m x_C^2,$$

unde distanţa de la O la centrul maselor C al barei este dată de:

$$x_C = l \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Astfel, se obține:

$$J_C = \frac{ml^2[(\rho_1 + \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2]}{18(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Pentru cazul particular al barei omogene $(\rho_1 = \rho_2 = \rho)$, rezultă:

$$J_0 = \frac{ml^2}{3}; \quad x_c = \frac{l}{2} \quad \text{și} \quad J_c = \frac{ml^2}{12}.$$

15.B.2. Să se determine momentul de inerție polar față de O al barei omogene de masă m din figura 15.B.2.

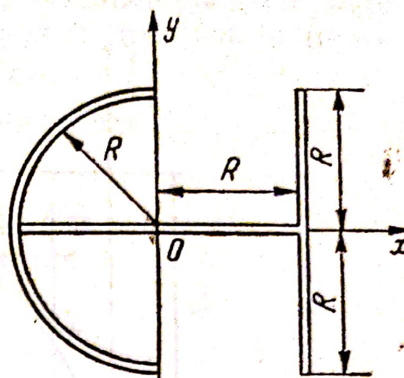


Fig. 15.B.2

R e z o l v a r e. Se împarte figura în trei părți distincte. Calculele sînt date sub formă de tabel.

Fig. 15.B.2, *a*	a) y, x, O	$J_{10} = m_1R^2 = \frac{\pi m}{4+\pi}R^2$
Fig. 15.B.2, *b*	b) y, x, O	$J_{20} = m_2\frac{4R^2}{12} = \frac{2m}{4+\pi}\frac{4R^2}{12}$
Fig. 15.B.2, *c*	c) y, x, O	$J_{30} = m_2\frac{4R^2}{12} + m_2R^2 = \frac{2m}{4+\pi}\frac{4R^2}{3}$

Momentul de inerție al corpului, obținut prin însumarea celor trei momente parțiale, este:

$$J_0 = \frac{mR^2(10 + 3\pi)}{3(4+\pi)}.$$

15.B.3. Să se calculeze momentele de inerție axiale pentru o placă triunghiulară omogenă de bază b și înălțime h. Să se determine momentele de inerție centrale față de axele cu originea în C, paralele cu cele date (fig. 15.B.3). Se vor aplica rezultatele obținute la un triunghi isoscel $(OB = BA)$.

R e z o l v a r e.

$$J_x = \int_{(c)} y^2 \mathrm{d}m, \quad \text{unde } \mathrm{d}m = b_1 \mathrm{d}y\rho.$$

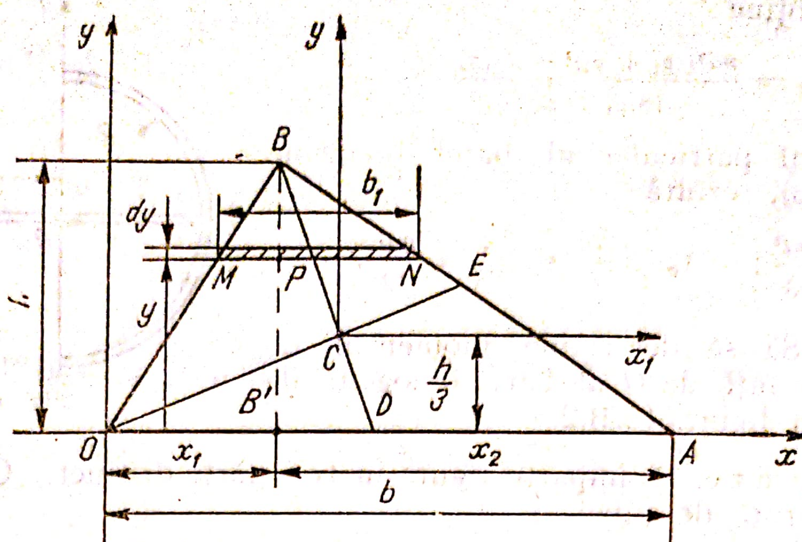


Fig. 15.B.3

Din asemănarea triunghiurilor OAB și MNB rezultă:

$$MN = OA\,\frac{BP}{BB'} = b\,\frac{h-y}{h}.$$

De aici

$$dm = \rho b\,\frac{h-y}{b}\,dy.$$

Rezultă:

$$J_x = \int_0^h \rho b\,\frac{h-y}{b}\,y^2 dy = \frac{bh^3}{12}\,\rho = m\,\frac{h^2}{6},$$

unde $m = \rho\,\frac{bh}{2}$ reprezintă masa plăcii.

Aplicînd formula lui Steiner, rezultă:

$$J_{x_1} = J_x - m\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{mh^2}{18}.$$

Pentru obținerea lui J_y se calculează momentele de inerție ale porțiunilor OBB' și BAB' ale triunghiului, utilizînd pentru fiecare în parte formula **lui** Steiner, prin considerarea în fiecare centru de greutate parțial a unei **axe** paralele cu Oy. S-au notat: $OB' = x_1$ și $B'A = x_2$. Rezultă:

$$J_y = \left[m_1\,\frac{x_1^2}{18} + m_1\left(\frac{2x_1}{3}\right)^2\right] + \left[m_2\,\frac{x_2^2}{18} + m_2\left(x_1 + \frac{x_2}{3}\right)^2\right];$$

$$J_{y_1} = J_y - m\left(\frac{b + x_1}{3}\right)^2; \qquad m = m_1 + m_2.$$

Dacă triunghiul este isoscel, $x_1 = x_2 = \frac{b}{2}$; $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ și **rezultă:**

$$J_y = \frac{7mb^2}{24}, \qquad J_{y_1}\ \frac{mb^2}{24}.$$

15.B.4. Să se determine momentele de inerție ale unei plăci circulare omogene de masă m și rază R în raport cu sistemul de axe dat în figura 15.B.4.

Rezolvare. Se calculează J_0, a cărui expresie este:

$$J_0 = \int_{(c)} r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R 2\pi r^3 \rho \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4 \rho}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

în care: $\mathrm{d}m = 2\pi r \mathrm{d}r \rho$; $m = \pi R^2 \rho$,
ρ fiind densitatea de suprafață a plăcii.
Deoarece:

$$J_0 = J_x + J_y; \quad J_x = J_y,$$

rezultă:

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}.$$

Produsul de inerție $J_{xy} = 0$, axele alese fiind axe de simetrie ale plăcii.

15.B.5. Fiind dată piesa din figura 15.B.5, confecționată dintr-un material omogen de densitate ρ, să se determine momentul de inerție în raport cu axa Ox. Se dau valorile numerice: $a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $c = 10$ cm, $l = 13$ cm, $d = 4$ cm, $\rho = 7{,}8$ kg/dm³.

Rezolvare. Se consideră figura formată din părți simple — paralelipiped și cilindri — care prin adaus sau extragere conduc la forma rezultantă.

Calculul se efectuează în tabelul următor pentru cele patru corpuri ce compun piesa considerată: *1* — paralelipiped; *2* — semicilindru; *3* — cilindru gol; *4* — cilindru plin.

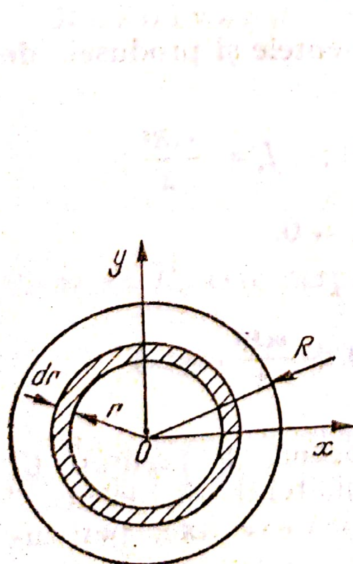


Fig. 15.B.4

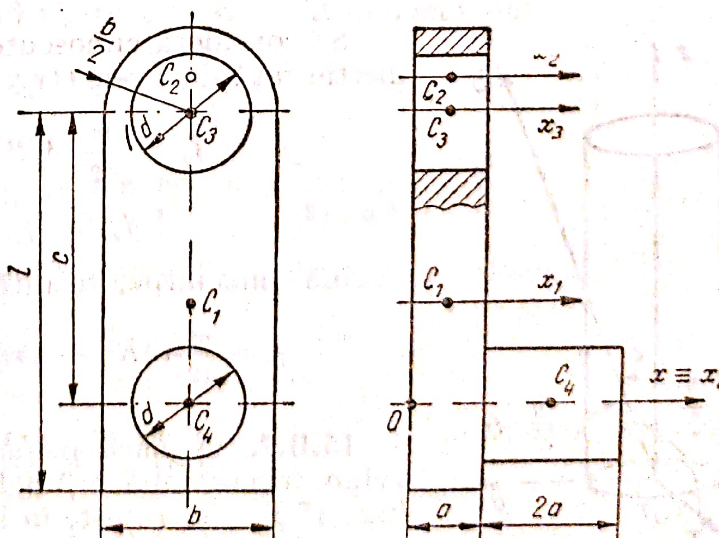


Fig. 15.B.5

Nr. i	J_{z_i}	J_z
1	$\frac{\rho abl}{12}(b^2+l^2)$	$J_{x_1}+\rho abl\left(c-\frac{l}{2}\right)^2$
2	$\frac{1}{4}\frac{\pi b^2}{4}a\rho\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{\pi b^2}{4}a\rho\left(\frac{2b}{3}\right)^2$	$J_{x_2}+\frac{\pi b^2}{4}a\rho\left(c+\frac{2b}{3\pi}\right)^2$
3	$-\frac{\pi d^2}{4}a\rho\frac{d^2}{8}$	$-\left[J_{x_3}+\frac{\pi d^2}{4}a\rho c^2\right]$
4	$\frac{\pi d^2}{4}2a\rho\frac{d^2}{8}$	J_{x_4}

$$J_z=\sum_{i=1}^{4}J_{z_i}=\frac{abl\rho}{12}(b^2+4l^2+12c^2-12cl)+$$

$$+\frac{\pi ab^2}{4}\rho\left(\frac{b^2}{16}+c^2+\frac{4bc}{3\pi}\right)-\frac{\pi d^2a\rho}{32}(8c^2-d^2).$$

Cu valorile numerice rezultă: $J_z=7{,}28\cdot10^{-3}$ kg · m².

15.B.6. Să se determine momentul de inerţie axial al unui disc de masă m, rază R şi înălţime h în raport cu o axă care face unghiul θ în raport cu axa sa de simetrie (fig. 15.B.6).

Rezolvare: Fie axa de simetrie Oz; axa faţă de care momentul de inerţie trebuie calculat s-a notat $O\zeta$, fiind cuprinsă în planul yOz.

Cosinusurile directoare ale axei $O\zeta$ faţă de sistemul $Oxyz$ sînt: $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=\sin\theta$, $\cos\gamma=\cos\theta$.

Expresia lui J_ζ este:

$$J_\zeta=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta-$$

$$-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

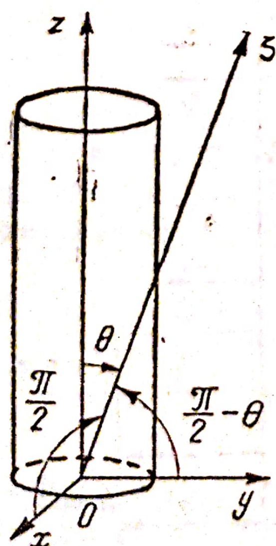


Fig. 15.B.6

Se consideră cunoscute momentele şi produsele de inerţie faţă de axele $Oxyz$:

$$J_x=J_y=\frac{m}{12}(3R^2+4h^2);\quad J_z=\frac{mR^2}{2};$$

$$J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0.$$

Făcînd înlocuirile, rezultă:

$$J=\frac{m}{12}(3R^2+4h^2)\sin^2\theta+\frac{mR^2}{2}\cos^2\theta.$$

15.B.7. O placă plană, omogenă, de greutate G, avînd forma unui triunghi echilateral de latură l (fig. 15.B.7) se roteşte în jurul unei axe fixe, perpendiculară în O pe planul plăcii.

Se cer $\overline{H}$, $\overline{K}_0$ şi E în mişcarea acestei plăci.

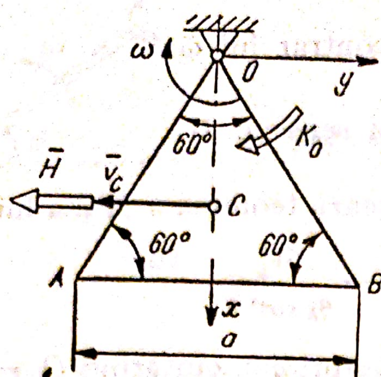


Fig. 15.B.7

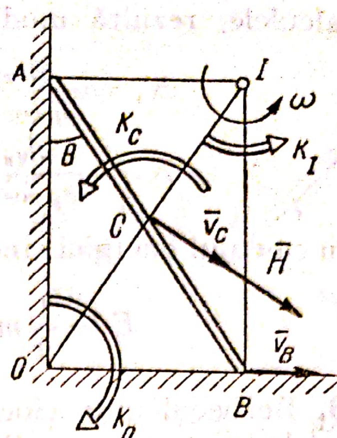


Fig. 15.B.8

R e z o l v a r e. Centrul de greutate C este situat pe axa Ox de simetrie a plăcii, la distanța $OC = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Deci:

$$v_C = \frac{l\sqrt{3}}{3}\omega\,; \quad H = \frac{Gl\sqrt{3}}{3g}\omega\,;$$

$$J_0 = J_x + J_y\,; \quad J_x = \frac{Gl^2}{24g}\,; \quad J_y = \frac{3Gl^2}{8g}\,; \quad J_0 = \frac{5Gl^2}{12g}.$$

$$K_0 = \frac{5Gl^2}{12g}\omega\,; \quad E = \frac{5Gl^2}{24g}\omega^2.$$

15.B.8. O bară $AB = l$, omogenă, de greutate G se deplasează într-un plan vertical, extremitățile A și B mișcîndu-se de-a lungul a doi pereți ortogonali.

Cunoscîndu-se la un moment dat viteza capătului B, $\bar{v}_B$, să se determine cantitatea de mișcare, momentul cinetic în raport cu C, I și O și energia cinetică în mișcarea barei (v. fig. 15.B.8).

R e z o l v a r e. Cunoscînd $\bar{v}_B$, rezultă ω la un moment dat:

$$\omega = \frac{v_B}{IB} = \frac{v_B}{l\cos\theta}.$$

$$v_C = \omega IC = \frac{v_B}{2\cos\theta}\,; \quad H = \frac{Gv_B}{2g\cos\theta}.$$

Vectorul $\bar{K}_C$ este perpendicular pe planul mișcării și are valoarea:

$$K_C = J_C\omega = \frac{Gl^2}{12g}\,\frac{v_B}{l\cos\theta} = \frac{Glv_B}{12g\cos\theta}.$$

Momentele cinetice în raport cu punctele I și O se calculează aplicînd teorema I-a a lui Koenig între axe paralele:

$$\bar{K}_0 = \bar{K}_C + \overline{OC} \times M\bar{v}_C\,;$$

$$\bar{K}_I = \bar{K}_C + \overline{IC} \times M\bar{v}_C.$$

Făcînd calculele, rezultă modulele celor doi vectori:

$$K_0 = \frac{Glv_B}{6g\cos\theta}, \text{ în sens contrar lui } \bar{\omega};$$

$$K_l = \frac{Glv_B}{3g\cos\theta}, \text{ în acelaşi sens cu } \bar{\omega}.$$

Pentru calculul energiei cinetice se utilizează teorema a II-a a lui Koenig:

$$E = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{Gv_B^2}{6g\cos^2\theta}.$$

15.B.9. Berbecul unui ciocan cu aer comprimat cîntărind $Q = 1\,500$ N este ridicat la înălţimea $h = 0{,}75$ m de $n = 84$ ori pe minut. Să se calculeze puterea maşinii, dacă randamentul său este $\eta = 0{,}65$.

R e z o l v a r e. Lucrul mecanic necesar pentru o ridicare este $L_1 = Qh = 1\,125$ J. Lucrul mecanic efectuat timp de un minut este $L = nL_1 = 94\,500$ J.

Puterea utilă a maşinii este $P_u = \frac{L}{60} = 1\,575$ W.

Puterea consumată de maşină este: $P_c = \frac{P_u}{\eta} = \frac{1\,575}{0{,}65} \approx 2{,}423$ kW.

15.B.10. Să se calculeze energia absorbită de la reţea timp de o oră şi jumătate şi valoarea cuplului la axul unui motor electric cu puterea utilă $P_u = 30$ kW, la turaţia $n = 900$ t/min şi randamentul $\eta = 0{,}8$.

R e z o l v a r e. Puterea consumată este $P_u = \frac{P_u}{\eta} = 37\,500$ W. Energia absorbită în timpul $t = 5\,400$ s este:

$$L_c = tP_c = 2{,}025 \cdot 10^8 \text{ J} = 56{,}25 \text{ kWR}$$

Momentul cuplului:

$$M = \frac{P_u}{\omega} = \frac{30P_u}{\pi n} = 318{,}5 \text{ N.m.}$$

15.B.11. Un şurub cu pasul p, asimilat cu un cilindru plin de masă m şi rază R are la un moment dat turaţia n rot/min. Să se calculeze energia cinetică a şurubului în momentul respectiv.

R e z o l v a r e. În momentul considerat vectorii caracteristici ai mişcării, $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$, au următoarele mărimi:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}; \quad v_0 = \frac{p}{2\pi}\omega = \frac{pn}{60}.$$

Aplicînd teorema lui Koenig referitoare la energia cinetică se obţine expresia:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2.$$

Prin înlocuirea lui v_0 şi ω aceasta devine:

$$E = \frac{mn^2(p^2 + 2\pi^2R^2)}{7\,200}.$$

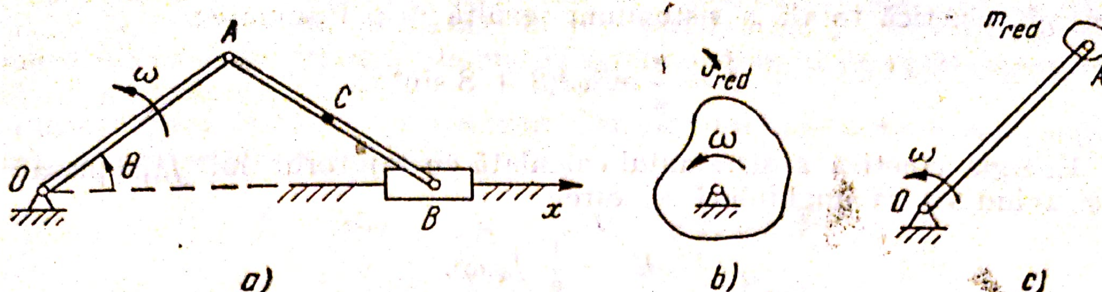


Fig. 15.B.12

15.B.12. Să se determine momentul de inerţie redus la axa de rotaţie ce trece prin $O(J_{red})$ şi masa redusă în articulaţia A a manivelei $OA(m_{red})$ pentru mecanismul bielă-manivelă-culisă din figura 15.B.12. Se cunosc dimensiunile $OA = AB = l$, masele fiecărei bare m, masa culisei M şi poziţia momentană a manivelei θ.

R e z o l v a r e. Pentru anumite sisteme de corpuri mai complicate, studiul dinamic s-ar simplifica, dacă în locul sistemului dat s-ar considera un solid care să aibă aceeaşi energie cinetică şi deci aceeaşi stare de mişcare cu întregul sistem de corpuri (mecanism sau maşină).

Se va considera că acest corp, numit element de reducere, este plasat pe axul unui element al mecanismului, are aceeaşi viteză unghiulară cu acesta şi se caracterizează printr-un „moment de inerţie redus", notat J_{red}.

În majoritatea cazurilor reducerea se face pe axul elementului conducător al mecanismului. În figura 15.B.12*b* este reprezentat corpul cu J_{red}, plasat în punctul O.

De asemenea, poate fi introdusă în mod asemănător noţiunea de „masă redusă", considerînd în articulaţia A a manivelei OA un punct material de masă m_{red}, a cărui energie cinetică în rotaţie faţă de O este aceeaşi cu energia cinetică a sistemului (fig. 15.B.12, *b*).

Noţiunile J_{red} şi m_{red} au o largă aplicabilitate în dinamica mecanismelor şi a maşinilor.

Pentru calculul energiei cinetice a sistemului din figura 15.B.12, *a* este necesar calculul prealabil al vitezelor punctelor C şi B. Astfel:

$$x_C = \frac{3}{2} l \cos\theta; \quad \dot{x}_C = -\frac{3}{2} l\dot{\theta} \sin\theta = -\frac{3}{2} l\omega \sin\theta;$$

$$y_C = \frac{1}{2} l \sin\theta; \quad \dot{y}_C = \frac{1}{2} l\dot{\theta} \cos\theta = \frac{1}{2} l\omega \cos\theta;$$

$$x_B = 2l \cos\theta; \quad \dot{x}_B = -2l\dot{\theta} \sin\theta = -2l\omega \sin\theta.$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri componente —OA, AB şi culisa din B — rezultă în ordine:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2;$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \omega^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2\omega^2}{4} (1 + 8 \sin^2\theta);$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M 4l^2\omega^2 \sin^2\theta.$$

Energia cinetică totală a sistemului rezultă prin însumare:

$$E = \frac{1}{8} ml^2\omega^2(3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Energia cinetică a sistemului calculată cu ajutorul lui J_{red}, plasat în O şi avînd viteza unghiulară ω, este:

$$E' = \frac{1}{2} J_{red}\omega^2.$$

Egalînd E cu E', rezultă:

$$J_{red} = \frac{ml^2}{4} (3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Dacă se calculează energia cinetică a sistemului cu ajutorul lui m_{red}, plasat în punctul A, rezultă:

$$E'' = \frac{1}{2} m_{red}v_A^2 = \frac{1}{2} m(l\omega)^2.$$

Din egalitatea $E'' = E$, se obţine:

$$m_{red} = \frac{m}{4} (3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Relaţia dintre cele două mărimi reduse se obţine cu uşurinţă din egalitatea $E' = E''$:

$$J_{red} = m_{red}(OA)^2.$$

15.B.13. Să se calculeze forţa redusă la articulaţia A şi momentul redus la axul O al elementului conducător, pentru mecanismul bielă-manivelă-culisă din figura 15.B.13, *a*. Asupra sistemului acţionează momentul M şi forţa F; se cunosc dimensiunile $OA = AB = l$, viteza unghiulară ω şi poziţia dată de unghiul θ.

R e z o l v a r e. Noţiunea de „forţă redusă", F_{red}, este utilizată în teoria mecanismelor şi a maşinilor (15.B.13, *b*) şi reprezintă forţa de înlocuire în articulaţia A a elementului conducător, perpendiculară pe bara OA, a întregului sistem de forţe efectiv aplicate sistemului, astfel încît puterea momentană dată de sarcinile active şi puterea forţei reduse să fie egale.

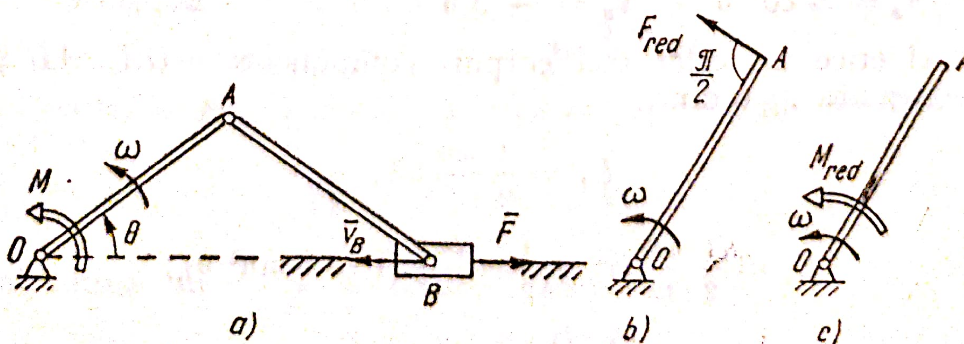


Fig. 15.B.13

În, mod similar se introduce noţiunea de „moment redus", M_{red} (fig. 15.B.13, *c*), acesta fiind momentul de înlocuire la axul O, astfel ca puterea momentană dată de întregul sistem de sarcini active să fie egală cu puterea dată de momentul redus.

Puterea dezvoltată la un moment dat de sarcinile active care acţionează asupra sistemului este:

$$P = M\omega - Fv_B = \omega(M - F2l \sin \theta).$$

$$P' = F_{red}v_A = F_{red}l\omega ; \quad P'' = M_{red}\omega.$$

Din egalităţile $P' = P$ şi $P'' = P$, rezultă:

$$F_{red} = \frac{1}{l}(M - 2Fl \sin \theta) ;$$

$$M_{red} = M - 2Fl \sin \theta.$$

Capitolul 16

TEOREMELE CANTITĂŢII DE MIŞCARE ŞI MOMENTULUI CINETIC

16.A. PREZENTARE TEORETICĂ

16.A.1. Teorema de variaţie a cantităţii de mişcare

Folosind aceleaşi notaţii de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1) pentru sistemele de puncte materiale şi cele de la Capitolul 3 (fig. 3.A.3) pentru sistemele continue, se poate stabili următoarea teoremă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i \quad \text{sau} \quad \dot{\bar{H}} = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i, \tag{16.1}$$

sau:

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i\mathrm{d}t. \tag{16.2}$$

Sub forma (16.1) teorema se enunţă astfel:

derivata în raport cu timpul a cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma vectorială a forţelor exterioare care acţionează, în momentul considerat, asupra sistemului.

Sub forma (16.2) enunţul teoremei este:

diferenţiala cantităţii de mişcare a unui sistem de puncte materiale, acţionat de forţe un timp dt *este egală cu suma vectorială a impulsurilor elementare ale forţelor exterioare aplicate sistemului.*

O b s e r v a ţ i i.

Teorema stabilită pentru un sistem de puncte materiale se extinde şi asupra unui continuu material.

Deoarece nu se foloseşte, în demonstraţia teoremei, de operaţia de alunecare a forţelor pe suporturile respective, adică, deoarece în demonstraţie forţele sînt reprezentate prin vectori legaţi, teorema este aplicabilă şi sistemelor materiale deformabile.

Forţele interioare nu influenţează asupra cantităţii de mişcare totale a unui sistem material.

Dacă se proiectează cantităţile de mişcare şi forţele exterioare pe cele trei axe ale triedrului $Oxyz$, se ajunge la ecuaţiile scalare:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix} = \sum_{i=1}^{n} X_i = X; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy} = Y;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz} = Z \tag{16.3}$$

ale teoremei de variaţie a cantităţii de mişcare.

16.A.2. Teorema de conservare a cantității de mişcare

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat (forțele exterioare sînt nule) *sau dacă suma vectorială a forțelor exterioare este nulă,* rezultă:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \bar{c}, \tag{16.4}$$

deci, cantitatea de mişcare a sistemului se conservă.

Observații.

Această teoremă exprimă faptul că ecuația (16.4) este o *integrală* a sistemului de ecuații diferențiale (15.1) privind mişcarea sistemului de puncte materiale.

Dacă sistemul de forțe exterioare, fără a avea o sumă nulă, are proiecția vectorului sumă, pe una din cele trei axe, nulă, de pildă Ox, atunci *proiecția cantității de mişcare pe această axă se conservă,* adică dacă:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X = 0, \quad \text{atunci } H_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix} = c. \tag{16.5}$$

Teorema conservării cantității de mişcare aplicată unui sistem izolat de două puncte materiale, cu masele m_1 şi m_2, vitezele în momentul t: $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ iar în momentul $t' > t$: $\bar{v}_1'$ şi $\bar{v}_2'$, se exprimă prin:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2',$$

adică:

$$m_2(\bar{v}_2' - \bar{v}_2) = -m_1(\bar{v}_1' - \bar{v}_1),$$

ecuație care se interpretează astfel:

modificarea într-un sens a cantității de mişcare a unui punct material este egală cu modificarea în sens opus a cantității de mişcare a celuilalt punct material. Aceasta justifică definiția dată de Engels cantității de mişcare.

16.A.3. Teorema mişcării centrului de masă

Se ştie că poziția centrului de masă al unui sistem de n puncte materiale $M_i(m_i)$, $i = 1, 2, 3\ldots, n$, în raport cu un reper cu originea O (în fig. 16.A.1) este dată de:

$$m\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{r}_i.$$

Prin două derivări succesive în raport cu timpul se obțin ecuațiile:

$$m\bar{v}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \bar{H}. \tag{16.6}$$

şi

$$m\bar{a}_c = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i. \tag{16.7}$$

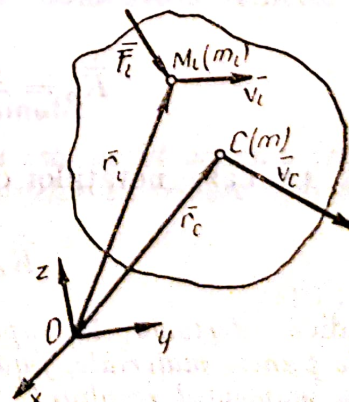


Fig. 16.A.1

Prima ecuație are ca interpretare:

cantitatea de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu cantitatea de mişcare a

centrului de masă al sistemului, dacă se presupune că în acest punct ar fi concentrată masa sistemului.

Cea de a doua ecuaţie reprezintă chiar *teorema mişcării centrului de masă:*

centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mişcă întocmai ca un punct material care ar avea masa sistemului şi asupra căruia ar acţiona toate forţele exterioare aplicate sistemului.

Observaţii.

Rezultatele se consideră aplicabile şi sistemelor materiale continue şi deformabile.

Forţele interioare nu influenţează mişcarea centrului de masă.

Dacă sistemul material este izolat sau dacă forţele exterioare au o sumă nulă, centrul de masă al sistemului are o mişcare uniformă în raport cu un reper inerţial (mişcarea centrului de masă al sistemului solar).

16.A.4. Teorema de variaţie a momentului cinetic al unui punct material

Se demonstrează relaţia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \tag{16.8}$$

care exprimă *teorema de variaţie,* adică:

derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material faţă de un punct fix este egală cu momentul faţă de acelaşi punct al rezultantei forţelor aplicate punctului.

Din (16.8), înmulţind scalar cu $\bar{u}$, versorul unei axe (Δ) care trece prin punctul fix O, se obţine:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r} \times m\bar{v})\bar{u} = (\bar{r}\times\bar{F})\bar{u}$$

şi se deduce teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu o axă fixă.

16.A.5. Teorema de variaţie a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale

Se demonstrează următoarele:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times (m_i\bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_0 \tag{16.9}$$

şi pe baza notaţiilor cunoscute:

$$\dot{\bar{K}}_0 = \bar{M}_0, \quad \text{respectiv } \dot{K}_\Delta = M_\Delta,$$

adică: *derivata, în raport cu timpul, a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, faţă de un punct fix sau faţă de o axă fixă, este egală cu momentul rezultant, faţă de punct sau axă, al forţelor exterioare aplicate sistemului de puncte materiale.*

Observaţii.

Se consideră extinsă aplicabilitatea teoremei şi asupra unui sistem material continuu.

Forţele interioare nu influenţează asupra variaţiei momentului cinetic.

Teorema momentului cinetic în raport cu o axă fixă are şi o expresie scalară preferabilă în aplicaţii.

Dacă sistemul material este nedeformabil şi are o mişcare de rotaţie în jurul axei fixe şi dacă J_Δ este momentul de inerţie al sistemului în raport cu axa, $\bar{\omega}$ cu scalarul ω reprezintă viteza unghiulară, iar $\bar{M}_\Delta$ cu scalarul M_Δ este momentul rezultant faţă de axă al forţelor, relaţia:

$$J_\Delta \cdot \dot{\omega} = M_\Delta \tag{16.10}$$

rezultată din aplicarea teoremei *este ecuaţia fundamentală a mişcării unui solid rigid cu o axă fixă* (Δ).

Ea îndeplineşte acelaşi rol ca şi ecuaţia $m\bar{a} = \bar{F}$ în mişcarea de translaţie a solidului rigid.

Scriind (16.10) sub forma:

$$\dot{\omega} = \frac{M_\Delta}{J_\Delta},$$

se găseşte justificarea definiţiei date momentului de inerţie în raport cu axa (Δ) ca: *măsura inerţiei solidului rigid în mişcarea de rotaţie în jurul axei* (Δ).

16.A.6. Teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă

Se demonstrează următoarea teoremă auxiliară[1]:

momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale faţă de un punct fix este egal cu momentul cinetic al centrului de masă în care ar fi concentrată masa sistemului, adunat cu momentul cinetic al sistemului în mişcarea sa în raport cu un reper cu originea în centrul de masă şi cu axele paralele cu cele ale reperului fix, adică:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}_c + \bar{K}_0; \tag{16.11}$$

din aceasta se deduce:

$$\dot{\bar{K}}_c = \Sigma\bar{\rho}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_c \tag{16.12}$$

unde $\bar{\rho}_i$ este vectorul de poziţie al punctului de masă m_i în raport cu reperul cu originea în centrul de masă.

Ecuaţia (16.12) extinde valabilitatea teoremei momentului cinetic şi faţă de centrul de masă al sistemului.

16.A.7. Teorema de conservare a momentului cinetic

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat sau este astfel acţionat încît momentul rezultant, faţă de punctul fix O, al forţelor exterioare aplicate sistemului este tot timpul nul,

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i = \bar{C}, \tag{16.13}$$

momentul cinetic faţă de O se conservă.

[1] Este teorema I a lui Koenig (1712–1757) matematician olandez.

O b s e r v a ț i e.

Această teoremă exprimă faptul că ecuația (16.13) este încă o *integrală primă* a sistemului de ecuații diferențiale (15.1) privind mișcarea sistemului de puncte materiale.

Dacă momentul rezultant al forțelor exterioare aplicat unui sistem de puncte materiale, față de axa fixă (Δ), este nul, momentul cinetic al sistemului în raport cu axa (Δ) se conservă.

Dacă se alege ca reper una din axele sistemului $Oxyz$, de pildă Oz, conservarea momentului cinetic față de această axă se exprimă prin relația:

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) m_i = 2 \sum_{i=1}^{n} m_i \Omega_i = C, \tag{16.14}$$

adică *legea ariilor. Dacă în timpul mișcării unui sistem de puncte materiale, momentul rezultant al forțelor exterioare față de o axă fixă este nul, proiecțiile punctelor sistemului pe un plan perpendicular pe axa fixă se mișcă astfel încît suma produselor maselor punctelor cu vitezele areolare ale proiecțiilor lor, în raport cu intersecția axei cu planul, este constantă.*

O b s e r v a ț i e.

Un caz particular al acestei legi se întîlnește la mișcarea punctului material acționat de o forță centrală.

16.B. APLICAȚII LA TEOREMELE CANTITĂȚII DE MIȘCARE ȘI MOMENTULUI CINETIC

16.B.1. Să se determine traiectoria unui punct material de greutate $\bar{G}$, aruncat din vîrful unei clădiri de înălțime h cu viteza $\bar{v}_0$ orizontală (fig. 16.B.1).

R e z o l v a r e. Asupra punctului material în mișcare, neglijînd rezistența aerului, acționează o singură forță: greutatea $\bar{G}$. Cu teorema cantității de mișcare se obține pentru un moment oarecare t al mișcării:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{G} \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\bar{v}\right) = \bar{G}.$$

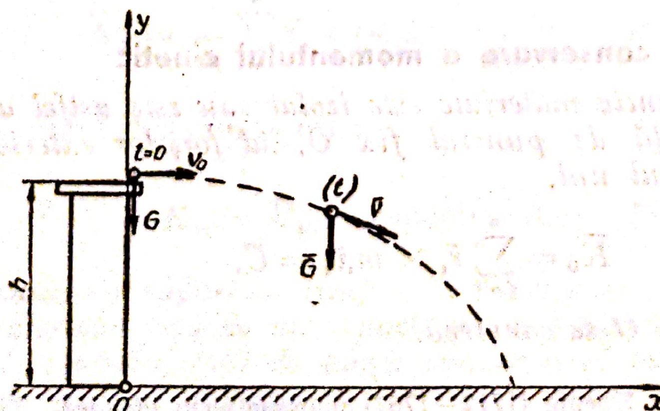


Fig. 16.B.1

Proiectînd pe axele xOy, rezultă:

$$\dot{H}_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\dot{x}\right) = 0; \quad \frac{G}{g}\ddot{x} = 0;$$

$$\dot{H}_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\dot{y}\right) = -G; \quad \frac{G}{g}\ddot{y} = -G.$$

Prin integrare:

$$\ddot{x} = 0; \quad \dot{x} = C_1; \quad x = C_1t + C_2,$$

$$\ddot{y} = -g; \quad \dot{y} = -gt + C_3; \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4.$$

Determinarea constantelor de integrare se face cu ajutorul condițiilor inițiale:

la: $$t = 0; \quad x = 0; \quad v_x = \dot{x} = v_0;$$

$$y = h; \quad v_y = \dot{y} = 0.$$

Deci:

$$C_2 = 0; \quad C_1 = v_0;$$

$$C_4 = h; \quad C_3 = 0.$$

Înlocuind în expresiile lui x și y, se găsesc ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$x = v_0t; \quad y = -g\frac{t^2}{2} + h.$$

Eliminînd parametrul t se obține ecuația traiectoriei:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + h.$$

16.B.2. Două corpuri A și B de greutăți $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ legate printr-un fir, care trece peste un scripete fără greutate, pot aluneca pe fețele unei prisme fixe, coeficientul de frecare fiind μ. Să se afle accelerația a, cu care se mișcă sarcinile, dacă se cunosc unghiurile α și β (fig. 16.B.2).

R e z o l v a r e. Se izolează corpurile de legături. Asupra lui A acționează: greutatea $\bar{P}$, reacțiunea normală $\bar{N}_1$, tensiunea din fir $\bar{S}_1$ și forța de frecare $\bar{T}_1$. Se presupune că A urcă pe plan cu viteza v. Asupra lui B

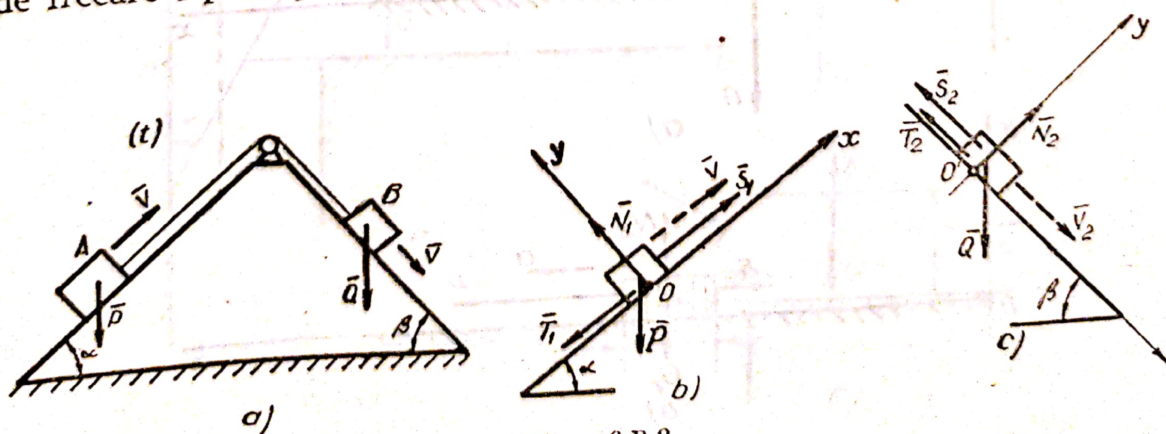


Fig. 16.B.2

acţionează: greutatea $\bar{Q}$, tensiunea din fir $\bar{S}_2$ egală în modul cu $\bar{S}_1$, forţa de frecare $\bar{T}_2$ şi reacţiunea normală $\bar{N}_2$. B coboară cu viteza $\bar{v}_2$ egală în modul cu $\bar{v}_1$, datorită legăturii cu fir. Aplicînd corpurilor teorema cantităţii de mişcare, se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}\bar{v}_1\right) = \bar{P} + \bar{S}_1 + \bar{N}_1 + \bar{T}_1, \text{ unde: } |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = v;$$

$$|\bar{S}_1| = |\bar{S}_2| = S;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{g}\bar{v}_2\right) = \bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{N}_2 + \bar{T}_2.$$

Proiectînd ecuaţiile pe axele xOy, rezultă:

$$\frac{P}{g}a = -P\sin\alpha + S - T_1; \qquad \frac{Q}{g}a = Q\sin\beta - T_2 - S;$$

$$0 = N_1 - P\cos\alpha; \qquad 0 = N_2 - Q\cos\beta;$$

$$T_1 = \mu N_1; \qquad T_2 = \mu N_2.$$

Scoţînd S din fiecare sistem şi egalînd cele două relaţii, se obţine:

$$a = g\frac{Q(\sin\beta - \mu\cos\beta) - P(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{P+Q}.$$

16.B.3. La capetele unei grinzi drepte omogene, de lungime l şi greutate $\bar{G}$, care se mişcă pe un plan orizontal, neted, acţionează de-a lungul axei sale două forţe $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$. Să se afle acceleraţia grinzii şi tensiunea într-o secţiune transversală oarecare, dacă $P > Q$ (fig. 16.B.3).

R e z o l v a r e. Asupra grinzii acţionează greutatea $\bar{G}$, forţele $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ date şi reacţiunea normală $\bar{N}$ a planului, necunoscută. Grinda se va deplasa în sensul lui $\bar{P}$, cu acceleraţia $\bar{a}$. Se aplică teorema cantităţii de mişcare:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{G} + \bar{N}.$$

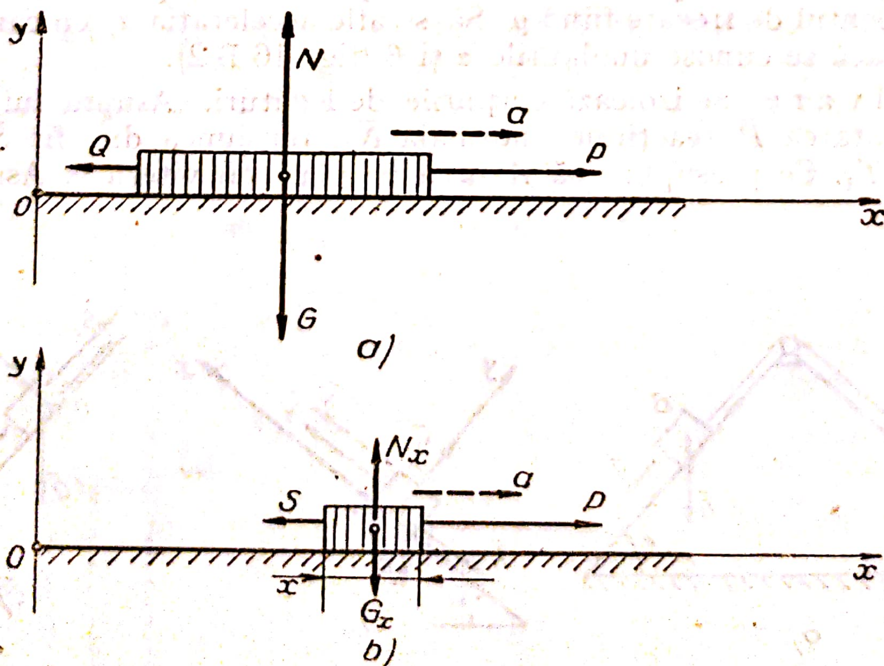


Fig. 16.B.3

Proiectînd pe axele xOy ecuaţia vectorială, se obţine:

$$\frac{G}{g}\cdot a = P - Q,$$

$$0 = N - G,$$

de unde:

$$N = G, \quad a = g\frac{P-Q}{G}.$$

Tensiunea, în secţiunea aflată la distanţa x de punctul de aplicaţie al forţei P, se determină izolînd porţiunea de grindă de lungime x, deci de greutate $G_x = G\frac{x}{l}$ care se mişcă cu acceleraţia a, determinată. Aplicînd teorema cantităţii de mişcare aici, rezultă:

$$\frac{d\bar{H}_1}{dt} = \bar{P} + \bar{S} + \bar{G}_x + \bar{N}_x.$$

Pe axele xOy se obţine:

$$\frac{G}{g}\frac{x}{l}a = P - S,$$

de unde:

$$S = P - \frac{x}{l}(P - Q).$$

16.B.4. O pană de unghi α şi greutate $\bar{P}$ se sprijină cu o parte pe un perete vertical neted, iar cu cealaltă parte pe o prismă de greutate $\bar{Q}$, care alunecă fără frecare pe un plan orizontal. Să se determine acceleraţia $\bar{a}_1$ a penei şi acceleraţia $\bar{a}_2$ a prismei (fig. 16.B.4).

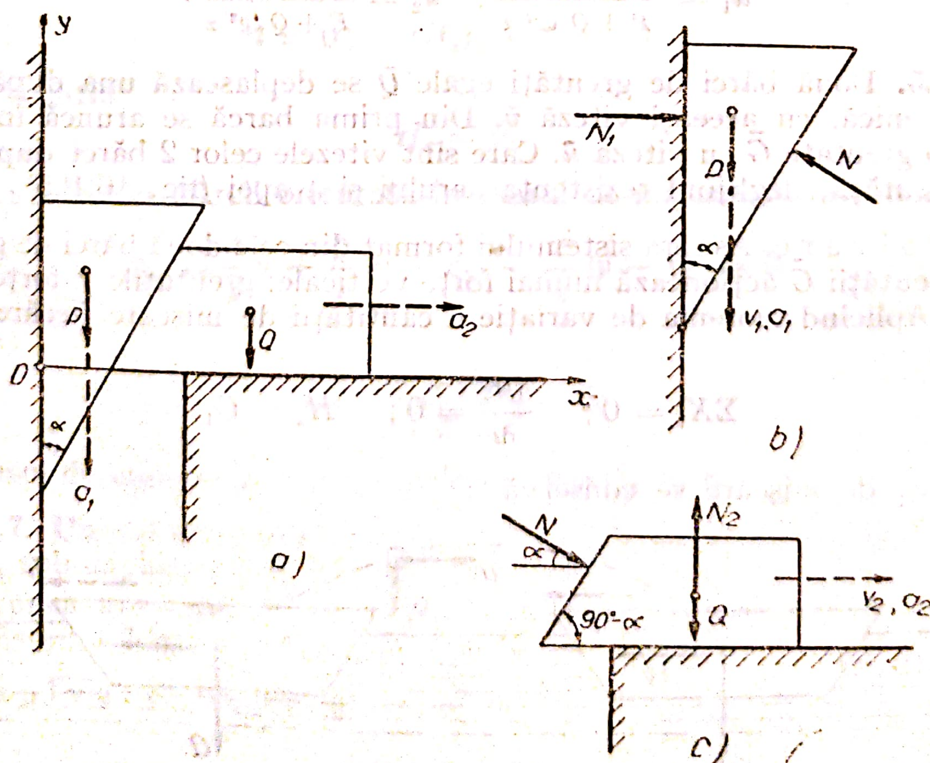


Fig. 16.B.4

R e z o l v a r e. Se studiază mişcarea sistemului de corpuri în translaţie cu teorema cantităţii de mişcare aplicată separat fiecărui corp, după izolarea acestora şi introducerea reacţiunilor normale $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ şi $\bar{N}'$, $\bar{N}''$. Scriind teorema cantităţii de mişcare pentru pană şi prismă:

$$\frac{d\bar{H}_1}{dt} = \bar{P} + \bar{N}' + \bar{N}_1, \quad \frac{d\bar{H}_2}{dt} = \bar{Q} + \bar{N}'' + \bar{N}_2,$$

unde

$$|\bar{N}'| = |\bar{N}''| = N.$$

Faţă de axele xOy rezultă ecuaţiile scalare:

pentru pană: $0 = N_1 - N \cos \alpha;$

$$-\frac{P}{g} a_1 = -P + N \sin \alpha;$$

pentru prismă: $\frac{Q}{g} a_2 = N \cos \alpha;$

$$0 = N_2 - Q - N \sin \alpha.$$

Sînt 4 ecuaţii cu 5 necunoscute. Se mai găseşte o ecuaţie din faptul că vitezele celor două corpuri sînt dependente, corpurile rămînînd tot timpul în contact. Deci:

$$v_1 \sin \alpha = v_2 \cos \alpha$$

sau, prin derivare: $a_1 \operatorname{tg} \alpha = a_2$.

Rezolvînd ecuaţiile rezultă:

$$a_1 = \frac{Pg}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad a_2 = \frac{Pg \operatorname{tg} \alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

16.B.5. Două bărci de greutăţi egale $\bar{Q}$ se deplasează una după alta la distanţă mică, cu aceeaşi viteză $\bar{v}$. Din prima barcă se aruncă în cea de a doua o greutate $\bar{G}$ cu viteza $\bar{u}$. Care sînt vitezele celor 2 bărci după aruncarea greutăţii, neglijînd rezistenţa aerului şi a apei (fig. 16.B.5).

R e z o l v a r e. Asupra sistemului format din cele două bărci de greutate $\bar{Q}$ şi a greutăţii $\bar{G}$ acţionează numai forţe verticale: greutăţile şi forţele arhimedice. Aplicînd teorema de variaţie a cantităţii de mişcare fiecărei bărci, rezultă:

$$\Sigma X_i = 0; \quad \frac{dH_x}{dt} = 0; \quad H_x = C_1.$$

Cantitatea de mişcare se conservă.

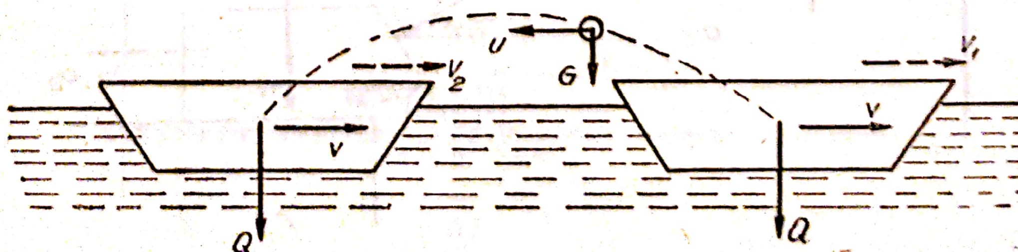


Fig. 16.B.5

Cu ajutorul condiţiilor iniţiale se găseşte la $t = 0$ că $C_1 = (H_x)_0$ constanta de integrare:

— barca din faţă plus greutatea care pleacă din ea va avea:

$$(H_x)_0 = \frac{Q+G}{g} v; \quad H_x = \frac{Q}{g} v_1 + \frac{G}{g}(v - u),$$

de unde egalînd:

$$v_1 = v + \frac{G}{Q} u;$$

— barca din spate plus greutatea care vine în ea va avea:

$$(H_x)_0 = \frac{Q}{g} v + \frac{G}{g}(v - u); \quad H_x = \frac{Q+G}{g} v_2;$$

egalînd, rezultă:

$$v_2 = v - \frac{G}{Q+G} u.$$

16.B.6. Pe bancheta din mijloc a unei bărci se găsesc doi oameni de greutate $P + Q$, unde $(P < Q)$. Barca are greutatea G şi este în repaus. La un moment dat cei doi oameni se deplasează spre cele două capete ale bărcii, cu aceeaşi viteză v_1. Să se determine viteza bărcii $\bar{v}$ şi direcţia ei.

Rezolvare. Sistemul de corpuri barcă-oameni este acţionat de forţe verticale. Deci:

$$\Sigma X_i = 0; \quad \frac{dH_x}{dt} = 0; \quad H_x = C_1 = \text{ct}.$$

În momentul iniţial, cantitatea de mişcare a corpurilor este zero, deci:

$$t = 0; \quad (H_x)_0 = C_1 = 0.$$

Rezultă ecuaţia:

$$H_x = 0.$$

Notînd cu v viteza bărcii orientată în sensul de mişcare al corpului $Q > P$

$$H_x = \frac{G}{g} v + \frac{Q}{g}(v + v_1) + \frac{P}{g}(v - v_1) = 0,$$

de unde:

$$v = \frac{(P - Q)v_1}{G + Q + P} < 0.$$

Deci sensul de mişcare al bărcii este opus sensului ales.

16.B.7. Un om de greutate $\bar{G}$, care poartă în mîini greutatea $\bar{P}$ sare cu viteza v_0 sub unghiul α faţă de orizontală. După atingerea înălţimii maxime, omul aruncă greutatea $\bar{P}$ cu viteza relativă $\bar{u}$ înainte. Cu cît se micşorează distanţa săriturii datorită acestui fapt?

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a omului este:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{G} + \bar{P}.$$

Proiectînd pe orizontală şi verticală, în raport cu un sistem de axe legat de punctul de unde face săritura, rezultă:

$$\frac{G+P}{g}\ddot{x}=0 \quad \text{şi} \quad \frac{G+P}{g}\ddot{y}=-(G+P),$$

deci:

$$\ddot{x}=0; \quad \dot{x}=C_1; \quad x=C_1t+C_2;$$

$$\ddot{y}=-g; \quad \dot{y}=-gt+C_3; \quad y=-g\frac{t^2}{2}+C_3t+C_4.$$

La momentul inițial, avem:

$$t=0 \quad \dot{x}=v_0\cos\alpha; \qquad x=0;$$

$$\dot{y}=v_0\sin\alpha; \qquad y=0.$$

Deci:

$$C_1=v_0\cos\alpha; \qquad C_2=0;$$

$$C_3=v_0\sin\alpha; \qquad C_4=0.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x=(v_0\cos\alpha)t; \quad y=-g\frac{t^2}{2}+(v_0\sin\alpha)t.$$

Înălțimea maximă este:

$$y_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

iar abscisa ei:

$$x_A=\frac{x_{max}}{2}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}.$$

În momentul aruncării greutății $\overline{P}$, se produce conservarea cantității de mişcare pe orizontală. Viteza omului devine v_1:

$$\frac{P+G}{g}v_0\cos\alpha=\frac{G}{g}v_1+\frac{P}{g}(v_0\cos\alpha+u),$$

de unde:

$$v_1=v_0\cos\alpha-\frac{P}{G}u.$$

Ecuațiile mişcării după atingerea punctului de înălțime maximă, în raport cu sistemul de axe ce are origina în abscisa punctului respectiv (A), sînt:

$$\ddot{x}_1=0; \quad \ddot{y}_1=-g;$$

şi integrînd ca în cazul precedent şi cu condițiile inițiale,

$$t=0; \quad x_1=0; \quad \dot{x}_1=v_1;$$

$$y_1=y_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \quad \dot{y}_1=0;$$

rezultă :

$$x_1 = v_1 t, \quad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - g\frac{t^2}{2},$$

de unde bătaia va fi :

$$x_{1_M} = \frac{v_1 v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Distanţa cu care scade săritura este :

$$\Delta x = x_{A1} - x_{1M} = \left(-v_0 \cos \alpha + \frac{P}{G} u\right) \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

$$\Delta x = \frac{P}{gG} v_0 u \sin \alpha.$$

16.B.8. Două puncte materiale de greutăţi $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ se află la momentul iniţial pe aceeaşi verticală, la distanţele a şi b de pămînt ($a < b$). Primul punct are viteza iniţială zero, iar al doilea viteza $\bar{v}_0$, pe orizontală. Se cere traiectoria centrului de masă al sistemului celor 2 puncte materiale.

R e z o l v a r e. Se aplică teorema mişcării centrului de masă. La un moment oarecare t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\bar{v}_c) = \bar{P} + \bar{Q}.$$

Alegînd solul drept axă Ox, iar verticala poziţiei iniţiale a punctelor ca axă Oy, se obţine :

$$\frac{P+Q}{g}\ddot{x}_c = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{P+Q}{g}\ddot{y}_c = -(P+Q).$$

Integrînd, rezultă :

$$\dot{x}_c = C_1; \quad \dot{y}_c = -gt + C_3;$$

$$x_c = C_1 t + C_2; \quad y_c = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

ca se cunosc condiţiile iniţiale :

$$t = 0; \quad x_c = 0 \quad \text{şi} \quad (\bar{v}_{c_y})_0 = 0$$

şi

$$y_c = \frac{Pa + Qb}{P+Q} \quad \text{din teorema momentelor statice.}$$

Pentru găsirea vitezei $(v_{c_x})_0$ se aplică conservarea cantităţii de mişcare pe orizontală la momentul iniţial :

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{Q+P}{g} (v_{c_x})_0,$$

de unde :

$$(v_{c_x})_0 = \frac{Q}{Q+P} v_0.$$

Se determină constantele de integrare:

$$C_1 = \frac{Q}{Q+P} v_0; \quad C_3 = 0;$$

$$C_2 = 0; \quad C_4 = \frac{Pa + Qb}{P+Q},$$

deci ecuațiile parametrice ale mișcării centrului de masă sînt:

$$x_C = \frac{Q}{Q+P} v_0 t; \quad y_C = -g\frac{t^2}{2} + \frac{Pa+Qb}{P+Q}.$$

Eliminînd parametrul t, rezultă că centrul de masă al sistemului descrie o parabolă:

$$y_C = -\frac{g}{2}\frac{(Q+P)^2}{Q^2 v_0^2} x_C^2 + \frac{Pa+Qb}{P+Q}.$$

16.B.9. O barcă de greutate $\bar{G}$ și lungime l stă în repaus atingînd cu prova debarcaderul. Un om care se găsește în acest moment la mijlocul bărcii se deplasează spre mal. Să se determine cu ce distanță se va depărta barca de debarcader, greutatea omului fiind $\bar{P}$ (fig. 16.B.9).

R e z o l v a r e. Se aplică teorema mișcării centrului de masă al sistemului:

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}_C) = \bar{P} + \bar{G} + \bar{N},$$

unde $\bar{N}$ este forța arhimedică exercitată de apă asupra bărcii. Proiectînd pe axele xOy se observă că pe orizontală se produce conservarea cantității de mișcare:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P+G}{g} v_{C_x}\right) = 0; \quad v_{C_x} = C_1.$$

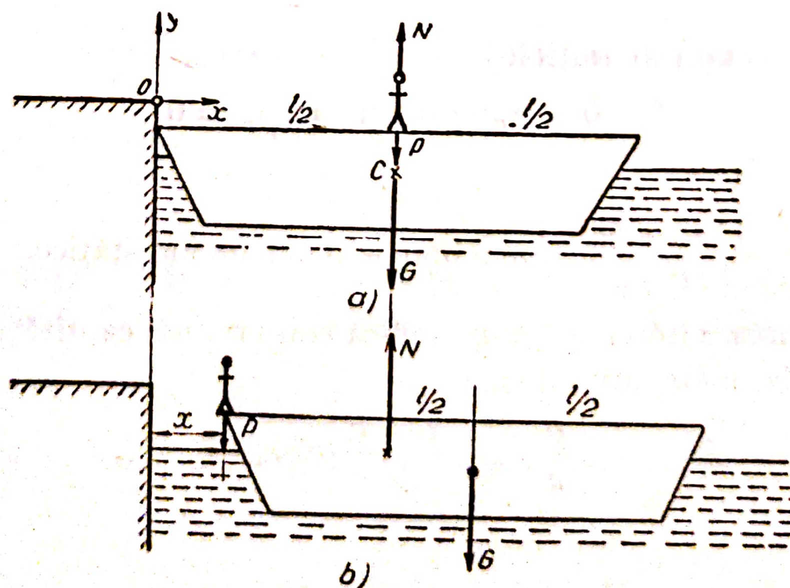


Fig. 16.B.9

Deoarece la momentul inițial sistemul era în repaus, rezultă:

$$t = 0; \quad (v_{C_x})_0 = C_1 = 0,$$

deci rămîne:

$$v_{C_x} = 0.$$

În raport cu axele xOy, viteza centrului este:

$$v_{C_x} = \dot{x}_C = 0,$$

de unde:

$$x_C = C_2 = \text{ct.}$$

Teorema momentelor statice permite determinarea constantei, deci:

$$x_C = l/2.$$

Centrul de masă al sistemului va rămîne deci în repaus, indiferent ce mișcări vor executa corpurile din sistem. Cînd omul se va deplasa la prova bărcii, barca se deplasează cu x:

$$Px + G\left(\frac{l}{2} + x\right) = x_C(P + G),$$

de unde:

$$x_C = \frac{Px + G(l/2 + x)}{P + G}.$$

Punînd condiția să avem același centru de masă ca în cazul precedent, rezultă:

$$x = \frac{Pl}{2(P + G)}.$$

16.B.10. Un pendul este lăsat să oscileze în planul vertical, din poziția inițială OM_0 (fig. 16.B.10).

Cunoscînd masa m a punctului material și lungimea l a firului, să se determine perioada micilor oscilații.

R e z o l v a r e. Se izolează punctul material, asupra căruia vor acționa greutatea mg și tensiunea în fir S. Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu centrul de rotație O:

$$J_0\dot{\omega} = -mgl \sin \theta,$$

unde: $J_0 = l^2m$ este momentul de inerție al punctului material în raport cu O.

Înlocuind $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, rezultă ecuația diferențială a pendulului simplu:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

Deoarece în cazul micilor oscilații $\sin \theta \approx \theta$, ecuația devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

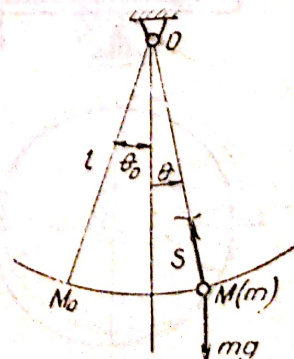


Fig. 16.B. 0

Integrala generală este:

$$\theta = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Punînd condițiile inițiale, rezultă constantele de integrare:

$$C_1 = \theta_0; \qquad C_2 = 0.$$

Înlocuind, se obține ecuația:

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

care reprezintă o mișcare oscilatorie armonică cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}.$$

Cum $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}$, rezultă: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

16.B.11. O bară OA omogenă, de greutate P și de lungime l, avînd o articulație fixă la capătul O, este lăsată să cadă fără viteză inițială din poziția orizontală (fig. 16.B.11). Să se determine viteza unghiulară și accelerația unghiulară în mișcarea de rotație a barei.

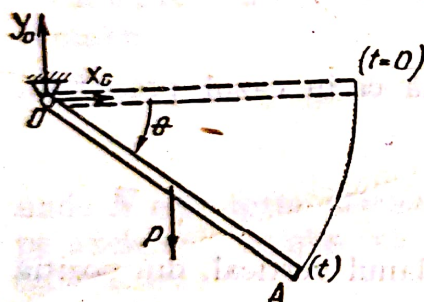


Fig. 16.B.11

R e z o l v a r e. Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în O pe planul mișcării:

$$J_0 \dot{\omega} = P \frac{l}{2} \cos \theta, \quad \text{unde} \quad J_0 = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3}.$$

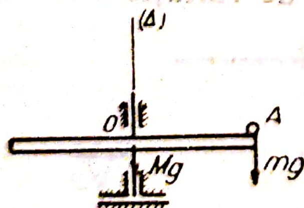
Rezultă:

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2l} \cos \theta,$$

dar: $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$; deci: $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta.$

Înmulțind cu $2\dot{\theta}$ și integrînd, se obține:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \theta}.$$



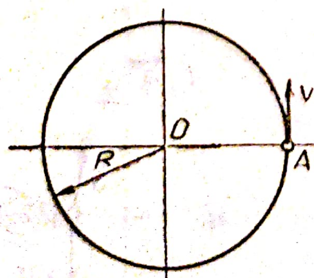


Fig. 16.B.12

16.B.12. Un disc omogen de masă M și rază R, aflat în repaus, se poate roti într-un plan orizontal în jurul unei axe Δ, perpendiculare în centrul O pe planul discului. Pe periferie se găsește un punct material de masă m. Punctul pornește din poziția A și se deplasează pe periferia discului cu viteza v (fig. 16.B.12). Să se determine viteza unghiulară ω a discului, funcție de v.

R e z o l v a r e. Fiind paralele cu axa (Δ), forțele exterioare vor avea momente nule în raport cu aceasta. Se va aplica deci teorema conservării momentului cinetic al sistemului disc-punct material, în raport cu axa (Δ), în ipoteza că mișcările au același sens:

$$\frac{MR^2}{2}\omega + Rmv_a = C = 0,$$

unde v_a este viteza absolută a punctului.

Cum
$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t,$$

unde $|\bar{v}_r| = v$ și $|\bar{v}_t| = \omega R$, vectorii $\bar{v}_r$ și $\bar{v}_t$ fiind coliniari, rezultă:

$$\frac{MR^2}{2}\omega + Rm(v + \omega R) = 0.$$

De unde:

$$\omega = -\frac{2mv}{(M + 2m)R},$$

adică rotația discului se produce în sens contrar mișcării punctului material, viteza unghiulară fiind proporțională cu viteza relativă a punctului.

16.B.13. Un disc omogen de masă M și rază R se rotește într-un plan orizontal în jurul unei axe Δ, perpendiculare în centrul O pe planul discului. În momentul inițial, cînd viteza unghiulară a discului este ω_0, un punct material de masă m începe să se deplaseze pornind din centrul discului pe raza OA cu viteza v constantă (fig. 16.B.13). Să se calculeze viteza unghiulară a discului în funcție de distanța r a punctului de centrul O, în ipoteza că se neglijează frecările.

R e z o l v a r e. Forțele exterioare fiind paralele cu axa (Δ), momentele lor în raport cu aceasta sînt nule. Se va aplica deci teorema conservării momentului cinetic al sistemului disc-punct material, în raport cu axa (Δ).

Viteza absolută a punctului material la un moment dat este $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$, unde $v_r = v$ este viteza relativă, după rază, iar $v_t = \omega r$ este viteza de transport, perpendiculară pe rază.

Momentul cinetic al punctului material, în raport cu axa (Δ), este: $k_\Delta = rmv_t = mr^2\omega$, deoarece momentul componentei $m\bar{v}_r$ este nul, $m\bar{v}_r$ fiind în același plan cu axa (Δ).

Scriind teorema de conservare a momentului cinetic al sistemului în raport cu axa (Δ), se obține:

$$\frac{MR^2}{2}\omega_0 = \frac{MR^2}{2}\omega + mr^2\omega = C.$$

De unde:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{2m}{M}\left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Deci, viteza unghiulară a discului se micșorează odată cu apropierea punctului material de periferia discului și, invers, se mărește odată cu apropierea punctului material de centrul discului.

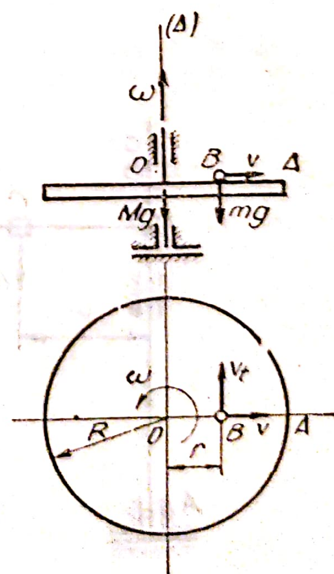


Fig. 16.B.13

16.B.14. O bară AOB în formă de unghi drept se poate roti în jurul laturii sale verticale AO (fig. 16.B.14). Pe latura orizontală OB, la distanța a de punctul O, se găsește o culisă C de masă m. Se imprimă sistemului o viteză unghiulară ω_0 în jurul axei OA. Să se afle relația dintre viteza unghiulară ω a sistemului și distanța $OC = x$, dacă momentul de inerție al barei în raport cu axa OA este J.

R e z o l v a r e. Momentele forțelor exterioare în raport cu axa de rotație fiind nule, se aplică teorema conservării momentului cinetic al sistemului bară-culisă în raport cu axa AO.

$$J\omega_0 + m\omega_0 a^2 = J\omega + xm\omega x.$$

Rezultă:

$$\omega = \frac{J + ma^2}{J + mx^2}\omega_0.$$

16.B.15. Se dă sistemul de corpuri din figura 16.B.15, format din prismele (1) și (2) de greutăți Q, respectiv $2Q$, și troliul (3) avînd razele R, respectiv $2R$ și momentul de inerție J în raport cu axa sa de rotație, perpendiculară în O pe planul figurii. Masa firului și frecarea din articulația O, precum și frecarea dintre fir și roată se neglijează. Sistemul se află inițial în mișcare, sensul fiind determinat de prisma (2) care coboară. În momentul considerat inițial, se rupe firul prismei (2). Să se studieze mișcarea sistemului rămas în continuare.

R e z o l v a r e. Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în O, pentru sistemul rămas după ruperea firului, sistem format din corpurile (1) și (3).

$$\frac{d}{dt}\left(J\omega + R\frac{Q}{g}\omega R\right) = -Q \cdot R.$$

Rezultă:

$$\dot{\omega} = -\frac{QR}{J + \frac{Q}{g}R^2},$$

iar:

$$a = -\frac{QR^2}{J + \frac{Q}{g}R^2}.$$

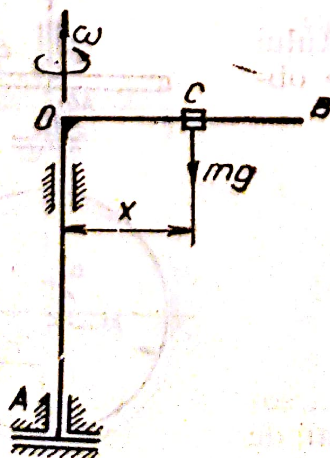


Fig. 16.B.14

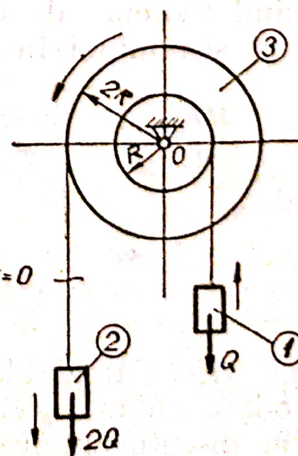


Fig. 16.B.15

Mişcarea prismei (1) este ascendentă încetinită. Sistemul se va opri la un moment dat, după care sensul mişcării se va schimba, prisma (1) va coborî avînd o mişcare accelerată, cu acceleraţia:

$$a = \frac{QR^2}{J + \frac{Q}{g}R^2}.$$

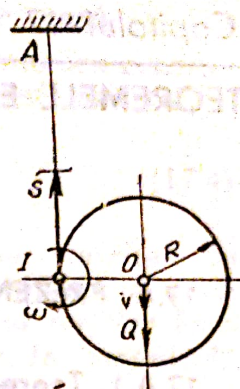


Fig. 16.B.16

16.B.16. Pe periferia unui disc omogen, de greutate Q şi rază R, este înfăşurat un fir de masă neglijabilă, a cărui extremitate este fixată în punctul A (fig. 14.12). Dîndu-se drumul la disc, să se determine acceleraţia cu care coboară centrul O al discului şi acceleraţia unghiulară.

Rezolvare. Discul are o mişcare plan-paralelă. Considerînd că firul nu alunecă în raport cu discul, centrul instantaneu de rotaţie se găseşte în punctul I (fig. 16.B.16). Notînd cu v viteza centrului O şi cu ω viteza unghiulară, se poate scrie:

$$v = \omega R.$$

Se izolează discul şi se aplică teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotaţie, perpendiculară în I pe planul mişcării. Pentru aceasta se calculează întîi momentul cinetic al discului în raport cu punctul I, utilizînd teorema I-a a lui Koenig:

$$K_I = K_o + R\frac{Q}{g}v,$$

unde:

$$K_o = \frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}\omega \quad \text{iar } v = \omega R.$$

Rezultă:

$$K_I = \frac{3QR^2}{2g}\omega.$$

Se scrie teorema de variaţie a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în I:

$$\frac{3QR^2}{2g}\dot{\omega} = QR,$$

de unde:

$$\dot{\omega} = \frac{2g}{3R}.$$

Acceleraţia centrului discului este $a = \frac{2}{3}g$.

Capitolul 17

TEOREMELE ENERGIEI MECANICE

17.A. PREZENTARE TEORETICĂ

17.A.1. Teorema de variaţie a energiei cinetice

Pornind de la teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material acţionat de o forţă (15.7) şi folosind notaţiile de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1), pentru sistemele de puncte materiale, se ajunge la forma diferenţială a teoremei:

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i\cdot \mathrm{d}\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}\right)\mathrm{d}\bar{r}_i \qquad (17.1)$$

sau:

$$\mathrm{d}E_c = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}, \qquad (17.2,\ a)$$

adică: *diferenţiala energiei cinetice a unui sistem deformabil de* n *puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare şi al celor interioare sistemului pentru toate deplasările punctelor sistemului în intervalul de timp* dt.

Calculînd lucrul mecanic elementar al forţelor interioare, se găseşte, pentru sistemul de n puncte materiale, expresia scalară:

$$\Delta L_{int} = \Sigma F_{ij}\mathrm{d}r_{ij} \qquad (17.2,\ b)$$

unde: F_{ij} sînt scalarii forţelor interioare în raport cu versorii $\bar{u}_{ij}$ $(i < j)$ ai axelor M_iM_j $(i < j)$, iar $r_{ij} = |\bar{r}_{ij}|$ adică distanţa M_iM_j. Suma conţine, din toate combinaţiile luate cîte două a celor n puncte materiale, numai pe acelea în care $i < j$.

Observaţii.

Dacă forţele interioare sînt *atractive* $F_{ij} > 0$ şi dacă distanţa M_iM_j se micşorează $\Delta L_{int} > 0$ şi invers, $\Delta L_{int} < 0$ dacă distanţa M_iM_j se măreşte. Dacă forţele interioare sînt repulsive $F_{ij} < 0$ şi dacă distanţa M_iM_j se măreşte $\Delta L_{int} > 0$ şi invers, $\Delta L_{int} < 0$ dacă distanţa M_iM_j se micşorează.

Din teorema energiei *nu sînt eliminate forţele interioare; ele dau lucru mecanic.*

În cazul modelului de solid nedeformabil, se pot considera neglijabile deformaţiile şi, în consecinţă, lucrul mecanic al forţelor interioare devine neglijabil, iar teorema se exprimă, după integrare, sub forma:

$$E_c' - E_c = L_{ext}, \qquad (17.3)$$

adică: *variaţia energiei cinetice a unui sistem material nedeformabil, între momentul iniţial* t *şi cel final* t', *este egală cu lucrul mecanic total al forţelor exterioare aplicate sistemului, pentru deplasarea corespunzătoare intevalului de timp considerat.*

17.A.2. Teorema energiei cinetice în raport cu centrul de masă

Folosind teorema II-a a lui Koenig (Cap. 15), teorema mişcării centrului de masă (Cap. 15) şi figurile 15.A.5, 16.A.1, se demonstrează că:

$$dE_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i d\bar{\rho}_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} \right) d\bar{\rho}_i, \tag{17.4}$$

adică: *diferenţiala energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale în raport cu reperul cu originea în C, centrul de masă al sistemului, cu axele paralele cu cele fixe, este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare şi al celor interioare pentru toate deplasările punctelor, în timpul* dt, *faţă de reperul considerat.*

17.A.3. Teorema de conservare a energiei mecanice

Definiţii. Un sistem material se numeşte *conservativ* dacă *forţele interioare ale sistemului derivă dintr-o funcţie de forţă U,* funcţie depinzînd numai de poziţia în spaţiu a particulelor sistemului, concepute ca puncte materiale.

În consecinţă, lucrul mecanic elementar al forţelor interioare este o diferenţială exactă şi se poate scrie $\Delta L_{int} = dU$, iar pe baza definiţiei energiei potenţiale (E_p) dată la Capitolul 15, $\Delta L_{int} = -dE_p$.

Deşi energia potenţială este o măsură a unei forme nemecanice de mişcare a unui sistem material, deoarece această măsură caracterizează capacitatea trecerii acestei mişcări într-o formă mecanică, se obişnuieşte a se denumi: *suma energiei cinetice şi a energiei potenţiale a unui sistem ca energie mecanică totală a sistemului:* $E_c + E_p$.

În aceste condiţii, teorema de variaţie a energiei cinetice: $dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}$ se scrie, pentru un sistem material conservativ, sub forma: $dE_c = \Delta L_{ext} - dE_p$. Dacă $\Delta L_{ext} = 0$,

$$d(E_c + E_p) = 0 \quad \text{şi} \quad E_c + E_p = C, \tag{17.5}$$

adică: *dacă forţele exterioare care acţionează asupra unui sistem material conservativ nu produc lucru mecanic, pe un interval de timp, energia mecanică totală a sistemului se conservă în acel interval de timp.*

Observaţii.

Teorema de conservare a energiei mecanice, în cazul unui sistem conservativ, exprimă prin ecuaţia (17.5) cea de a treia *integrală primă* a sistemului de ecuaţii diferenţiale (15.1) privind mişcarea sistemului de puncte materiale.

Un exemplu de verificare a teoremei de conservare a energiei mecanice poate fi modelul satelitului captat, în cazul în care P descrie o elipsă cu centrul O al lui S, plasat într-unul din focare (Cap. 15).

Se mai pot găsi, chiar experimenta şi alte modele care, teoretic, sînt concepute ca exemple pentru verificarea teoremei de conservare a energiei mecanice. Însă experimentele de laborator au dovedit că mişcarea mecanică trece ireversibil în alte forme nemecanice: mişcare termică, deformaţie neelastică etc. După un timp, relativ redus, de funcţionare a sistemului, energia mecanică a sistemului se anulează, adică forma nemecanică (energia potenţială) şi forma mecanică (energia cinetică) trec în alte forme de mişcare.

În aceste condiţii se ajunge la principiul fundamental al fizicii: *principiul conservării materiei şi energiei.*

17.B. APLICAȚII LA TEOREMELE ENERGIEI MECANICE

17.B.1. Un lanț omogen de lungime l și greutate p pe unitatea de lungime se reazemă cu frecare pe un plan orizontal. În poziția inițială o porțiune de lungime l_1 a lanțului atîrnă pe verticală (fig. 17.B.1). Să se calculeze valoarea l_1 pentru care lanțul începe să se miște și viteza lanțului în funcție de lungimea porțiunii sale de pe verticală, coeficientul de frecare între lanț și plan fiind μ.

R e z o l v a r e. În momentul inițial $x = l_1$. Pentru începerea mișcării, trebuie ca: $pl_1 > \mu p(l - l_1)$. Deci:

$$l_1 > \frac{\mu l}{1 + \mu}.$$

Lanțul pleacă din repaus la $x = l_1$, deci $E_1 = 0$.
Pentru $x > l_1$, lanțul este în mișcare cu viteza v, deci:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{pl}{g}v^2.$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele ce acționează asupra lui este:

$$L_{12} = \int_{l_1}^{x} [px - \mu p(l - x)]\,dx = \frac{p(x - l_1)}{2}[(1 + \mu)(x + l_1) - 2\mu l].$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{g(x - l_1)}{l}[(1 + \mu)(x + l_1) - 2\mu l]}.$$

17.B.2. Se dă bara omogenă $OA = l$ de masă m care se poate roti fără frecare în jurul articulației din O (fig. 17.B.2). În poziție inițială, bara este înclinată cu unghiul α deasupra orizontalei ce trece prin O. Să se găsească legile de variație ale vitezei unghiulare și accelerației unghiulare în funcție de θ și valorile lor maxime, dacă în momentul inițial bara se găsește în repaus.

R e z o l v a r e. Energia barei în poziție inițială este nulă:

$$E_1 = 0.$$

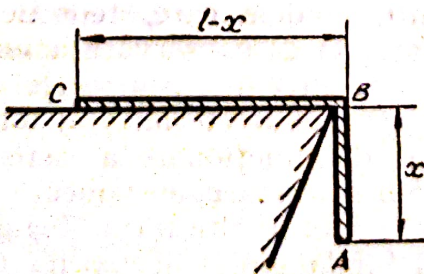


Fig. 17.B.1

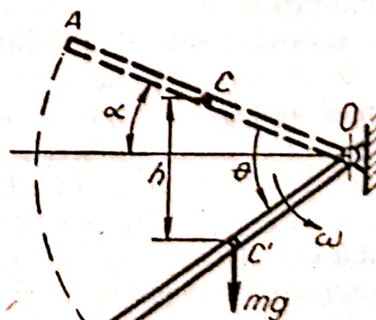


Fig. 17.B.2

În poziția următoare bara este în mișcare cu viteza unghiulară ω și are energia cinetică:

$$E_2 = \frac{1}{2} J_0\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2.$$

Lucrul mecanic efectuat între cele două poziții este:

$$L_{12} = mgh = mg \frac{l}{2} [\sin \alpha + \sin(\theta - \alpha)] = mgl \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice:

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2 = mgl \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)$$

se obține:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l} \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)}; \quad \dot{\omega} = \frac{3g}{2l} \cos (\theta - \alpha).$$

17.B.3. Se dă sistemul de corpuri din figura 17.B.3, format dintr-un scripete fix de greutate P și rază R și un corp de greutate G. Sistemul pleacă din repaus și are după un anumit timp t_0 energia cunoscută E_0. Să se calculeze t_0 și drumul x_0 parcurs de greutatea G în acest interval de timp.

Rezolvare. În momentul inițial energia cinetică a sistemului este: $E_1 = 0$.

După un anumit timp de la începutul mișcării, viteza corpului G este v, iar energia sistemului este:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{PR^2}{2g} \frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{4g} (2G + P).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice

$$\frac{v^2}{4g} (2G + P) = Gx$$

și derivînd ecuația obținută, rezultă:

$$a = \frac{2gG}{2G + P}.$$

Legile mișcării lui G sînt:

$$v = \frac{2gG}{2G + P} t; \quad x = \frac{gG}{2G + P} t^2.$$

Introducînd în expresia lui E_2 expresia vitezei și notînd $E_2 = E_0$, rezultă:

$$t_0 = \sqrt{\frac{E_0(2G + P)}{gG^2}}.$$

Drumul parcurs este $x_0 = \dfrac{E_0}{G}$.

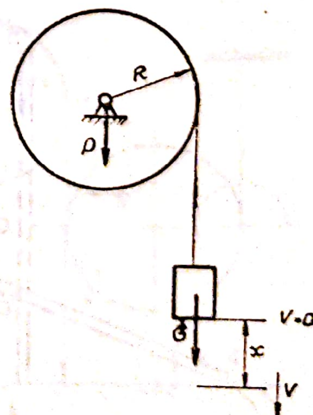


Fig.17.B.3

17.B.4. Bara $AB = l$ (fig. 17.B.4) omogenă de masă m, se reazemă fără frecare cu capătul A pe un plan orizontal. Lăsată liberă în poziție verticală $(A'B')$, ea începe mișcarea fără viteză inițială. Să se calculeze viteza centrului de greutate al barei funcție de înălțimea sa y deasupra planului.

R e z o l v a r e. Deoarece bara pornește din repaus, $E_1 = 0$. Bara are o mișcare plană. Notînd cu v viteza centrului său de greutate la înălțimea y, rezultă:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{2\dot{y}}{\sqrt{l^2 - 4y^2}},$$

Energia cinetică în această poziție este:

$$E_2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_c\omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \frac{4v^2}{l^2 - 4y^2} = \frac{mv^2(4l^2 - 12y^2)}{6(l^2 - 4y^2)}.$$

Lucrul mecanic efectuat de greutatea barei din poziția inițială pînă la înălțimea y este:

$$L_{12} = mg\left(\frac{l}{2} - y\right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă:

$$v = \frac{l - 2y}{2} \sqrt{\frac{3g(l + 2y)}{l^2 - 3y^2}}.$$

17.B.5. Se dă sistemul de bare omogene, articulate, din figura 17.B.5 unde $O_1A = O_2B = l$ și $O_1O_2 = AB = 2l$. Sistemul pornește din repaus la $\theta_0 = \pi/6$ și se mișcă liber sub acțiunea greutăților barelor. Să se stabilească legile $\omega = \omega(\theta)$ și $\dot{\omega} = \dot{\omega}(\theta)$.

R e z o l v a r e. Deoarece sistemul pornește din repaus, $E_1 = 0$. Barele O_1A și O_2B au mișcări de rotație cu viteze unghiulare egale. Fie ω viteza lor comună la un moment dat.

Bara AB are mișcare de translație cu viteza $v_A = l\omega$.

Energia sistemului la un moment dat este:

$$E_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Gl^2}{3g} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{2G}{g} l^2\omega^2 = \frac{4}{3} \frac{Gl^2}{g} \omega^2.$$

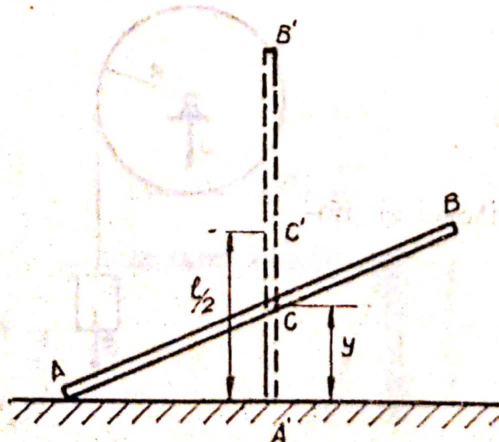


Fig. 17.B.4

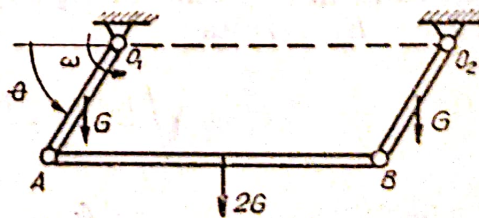


Fig. 17.B.5

Lucrul mecanic efectuat de greutățile barelor între $\theta_0 = \pi/6$ și θ este:

$$L_{12} = 2G\frac{l}{2}\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) + 2Gl\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 3Gl\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, se obține:

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g(2\sin\theta - 1)}{2l}},$$

iar prin derivare:

$$\omega = \frac{9g\cos\theta}{8l}.$$

Valoarea maximă a lui $\omega(\theta = \pi/2)$ este:

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

17.B.6. Se consideră sistemul de corpuri din figura 17.B.6 acționat de un cuplu de moment M_0. Să se calculeze accelerația corpului G.

R e z o l v a r e. Pentru calculul accelerației, se poate considera că sistemul pornește din repaus, deci $E_1 = 0$. Considerînd că la un moment dat de la începutul mișcării corpul în translație a parcurs drumul x, și are viteza v, rezultă vitezele celorlalte corpuri în funcție de v:

$$\omega_1 = \frac{v}{R}; \quad \omega_2 = \frac{2v}{R}.$$

Energia cinetică în acest moment se compune din:

— energia corpului în translație:

$$E_2' = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2;$$

— energia scripetelui mobil în mișcare plană:

$$E_2'' = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{GR^2}{2g}\omega_1^2;$$

— energia cinetică a scripetelui cu axa fixă:

$$E_2''' = \frac{1}{2}\frac{GR^2}{2g}\omega_2^2.$$

Însumînd rezultă:

$$E_2 = \frac{9G}{4g}v^2.$$

În acest interval, lucrul mecanic este:

$$L_{12} = -2Gx + M_0\frac{2x}{R}.$$

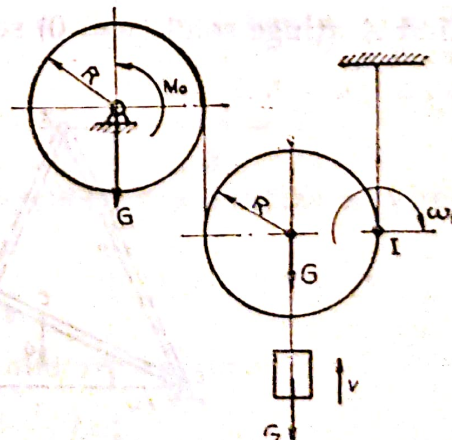


Fig. 17.B.6

Aplicînd teorema energiei cinetice,

$$\frac{9G}{4g}v^2 = 2x\left(\frac{M_0}{R} - G\right),$$

şi derivînd, rezultă:

$$a = \frac{4g(M_0 - GR)}{9GR}.$$

17.B.7. Se dă sistemul de bare articulate din figura 17.B.7 ($OA = AB = l$), aflat iniţial în repaus la $y = h$. Să se găsească viteza punctului A pentru o poziţie a sistemului dată de y.

R e z o l v a r e. Energia cinetică a sistemului în momentul iniţial este $E_1 = 0$. La un moment dat viteza unghiulară ω a barei OA şi viteza instantanee de rotaţie a barei AB sînt egale, energia cinetică a sistemului fiind:

$$E_2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}J_I\,\omega^2,$$

unde:

$$J_0 = \frac{Gl^2}{3g},$$

$$J_I = \frac{Gl^2}{12g} + \frac{G}{g}\,ID^2 = \frac{G(l^2 + 6y^2)}{3g}.$$

Deci:

$$E_2 = \frac{G\omega^2}{3g}(l^2 + 3y^2).$$

Lucrul mecanic între cele două poziţii ale sistemului este

$$L_{12} = G(h - y).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice şi notînd $v_A = l\omega$, rezultă:

$$v_A = l\sqrt{\frac{3g(h-y)}{l^2 + 3y^2}}.$$

Cînd A atinge solul ($y = 0$) se obţine $v_A = \sqrt{3gh}$.

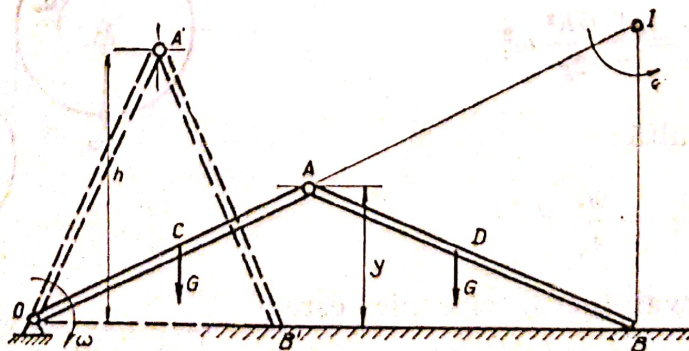


Fig. 17.B.7

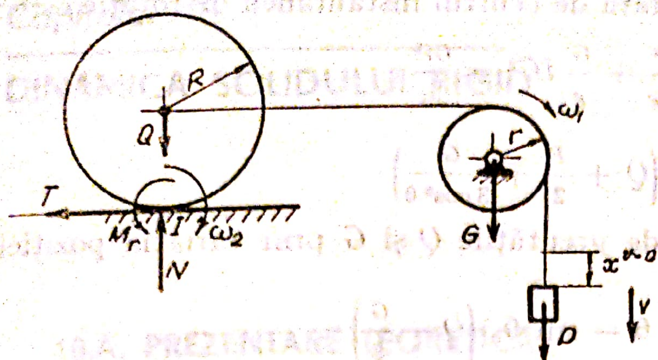


Fig. 17.B.8

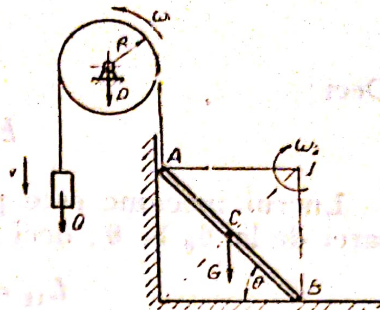


Fig. 17.B.9

17.B.8. Se consideră sistemul de corpuri omogene din figura 17.B.8 care porneşte din repaus sub acţiunea greutăţilor proprii. Discul de pe planul orizontal se rostogoleşte fără alunecare, coeficienţii de frecare de alunecare şi de rostogolire sînt μ respectiv s. Să se calculeze acceleraţia corpului de greutate P.

Rezolvare. Sistemul este iniţial în repaus ($E_1 = 0$). Considerînd că sistemul începe să se mişte la un moment dat, greutatea P are viteza v după ce a străbătut pe verticală distanţa x. În acest moment:

$$\omega_1 = \frac{v}{r}, \quad \omega_2 = \frac{v}{R}.$$

Energia cinetică este:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{Gr^2}{2g}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{QR^2}{2g}\omega_2^2 = \frac{v^2}{4g}(2P + G + 3Q).$$

Lucrul mecanic este produs numai de forţa P şi de cuplul de frecare la rostogolire al cărui moment este $M_r = sN = sQ$. Forţa de frecare $T < \mu N$ nu produce lucru mecanic, deoarece discul nu alunecă pe suprafaţa planului. Deci:

$$L_{12} = Px - sQ\frac{x}{R}.$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă prin derivare

$$a = \frac{2g(PR - sQ)}{R(2P + G + 3Q)}.$$

17.B.9. Se consideră sistemul de corpuri omogene din figura 17.B.9 alcătuit din bara $AB = l$ de greutate G, discul de greutate P şi rază R şi corpul de greutate Q. Să se calculeze viteza greutăţii Q pentru o poziţie θ a barei, considerînd că sistemul porneşte din repaus la $\theta = \theta_0$.

Rezolvare. Sistemul fiind iniţial în repaus, $E_1 = 0$.

După începerea mişcării, corpul Q are la un moment dat viteza v. Vitezele celorlalte corpuri vor fi:

$$\omega_1 = \frac{v}{R}; \quad \omega_2 = \frac{v}{l\cos\theta}.$$

În acest moment, energia cinetică a sistemului are expresia:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{PR^2}{2g}\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_I\omega_2^2.$$

Momentul de inerţie al barei faţă de centrul instantaneu de rotaţie este:

$$J_I = \frac{Gl^2}{12g} + \frac{G}{g} IC^2 = \frac{Gl^2}{3g}.$$

Deci:

$$E_2 = \frac{v^2}{2g}\left(Q + \frac{P}{2} + \frac{G}{3\cos^2\theta}\right).$$

Lucrul mecanic este produs de greutăţile Q şi G prin variaţia poziţiei barei de la θ_0 la θ; deci:

$$L_{12} = l(\sin\theta - \sin\theta_0)\left(Q - \frac{G}{2}\right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{gl(\sin\theta - \sin\theta_0)(2Q - G)}{Q + \frac{P}{2} + \frac{G}{3\cos^2\theta}}}.$$

17.B.10. Un disc de rază r şi masă $2m$ este antrenat în mişcare de rostogolire de o bară omogenă avînd lungimea l şi masa $3m$. Un capăt al barei se sprijină pe planul vertical, iar celălalt este articulat în centrul discului. Să se studieze mişcarea sistemului (fig. 17.B.10).

Rezolvare. Presupunînd că la momentul iniţial sistemul era în repaus şi avea poziţia definită de $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}$ (discul situat lîngă peretele vertical), putem scrie $E_0 = 0$.

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} 3mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{3ml^2}{12}\omega_1^2 + \frac{1}{2} 2mv_2^2 + \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{2}\omega_2^2.$$

Înlocuind în această expresie vitezele

$$v_1 = \frac{l}{2}\dot\theta;\quad \omega_1 = \dot\theta;\quad v_2 = l\dot\theta\cos\theta;\quad \omega_2 = \frac{l}{r}\dot\theta\cos\theta,$$

se obţine:

$$E = \frac{1}{2} ml^2\dot\theta^2(1 + 3\cos^2\theta).$$

Lucrul mecanic efectuat de forţele date şi de legătură este:

$$L_{0-1} = 3mg\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta_0 - r - \frac{l}{2}\cos\theta\right) = 3mg\frac{l}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} - \cos\theta\right).$$

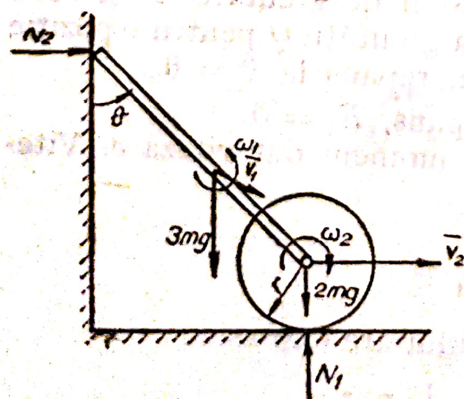


Fig. 17.B.10

Din teorema energiei cinetice se deduce imediat:

$$\omega_1^2 = f(\theta) = \frac{3\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} - \cos\theta\right)g}{(1 + 3\cos^2\theta)\,l},$$

Derivînd această ecuaţie în raport cu timpul, rezultă acceleraţia unghiulară:

$$\varepsilon = \frac{df}{2d\theta}.$$

Capitolul 18

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

18.A. PREZENTARE TEORETICĂ

1. În cazul rigidului cu o axă fixă (axa Oz), teormele generale sînt:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \Sigma \bar{F}_i; \text{ (sau } M\ddot{\bar{\rho}} = \Sigma \bar{F}_i); \tag{18.1}$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{F}_i; \tag{18.2}$$

$$dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}, \ (\Delta L_{int} = 0), \tag{18.3}$$

unde cantitatea de mişcare $\bar{H}$, acceleraţia centrului maselor $\ddot{\bar{\rho}}$, momentul cinetic $\bar{K}_o$ şi energia cinetică E au expresiile:

$$\bar{H} = M\dot{\bar{\rho}} = M\bar{\omega} \times \bar{\rho} = -M\omega\eta\bar{i} + M\omega\xi\bar{j}; \tag{18.4}$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = (-\omega^2\xi - \varepsilon\eta)\bar{i} + (\varepsilon\xi - \omega^2\eta)\bar{j}; \tag{18.5}$$

$$\bar{K} = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k}; \tag{18.6}$$

$$E = \frac{1}{2} J_z\omega^2. \tag{18.7}$$

Prin proiectarea relaţiilor (18.1) şi (18.2) pe axele unui sistem de referinţă mobil, invariabil legat de corp (fig. 18.A.1), în care s-a ţinut seama de expresia derivatei unui vector cunoscut prin proiecţiile sale pe axele unui sistem de referinţă mobil: $\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u}$, se obţin ecuaţiile scalare ale mişcării:

$$\begin{aligned}
-M(\omega^2\xi + \varepsilon\eta) &= X + R_x + R'_x; \\
M(\varepsilon\xi - \omega^2\eta) &= Y + R_y + R'_y; \\
0 &= Z + R_z + R'_z; \\
-J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y; \\
-J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x; \\
J_z\varepsilon &= M_{oz},
\end{aligned} \tag{18.8}$$

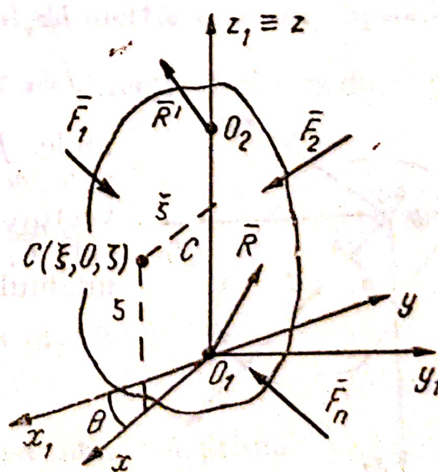


Fig. 18.A.1

unde originea O s-a ales în punctul fix O_1, M fiind masa corpului; $\omega = \dot{\theta}$ şi $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ — viteza şi acceleraţia unghiulară; ξ, η, ζ — coordonatele centrului de

greutate C; X, Y, Z şi M_{ex}, M_{ey}, M_{ez} — proiecţiile vectorului rezultant $\bar{F}$ şi momentului rezultant $\bar{M}_0$ ale forţelor aplicate $\bar{F}_i$; h — distanţa între punctele fixe O_1 şi O_2, în care se aplică $\bar{R}(R_x, R_y, R_z)$ şi $\bar{R}'(R'_x, R'_y, R'_z)$.

Mişcarea rigidului rezultă din ultima ecuaţie a sistemului (18.8) sau din teorema energiei cinetice (18.3):

$$J_z\ddot{\theta} = M_{ez}, \tag{18.9}$$

în care s-a înlocuit $\varepsilon = \ddot{\theta}$. Componentele reacţiunilor $\bar{R}$ şi $\bar{R}'$ se deduc din celelalte cinci relaţii ale sistemului (18.3).

În general, componentele R_z şi R'_z nu pot fi determinate decît în cazul cînd se cunoaşte o condiţie suplimentară.

Un caz particular de rigid cu axă fixă este pendulul compus (fig. 18.A.2) a cărui ecuaţie diferenţială a mişcării este:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\cdot\xi}{J_z}\sin\theta = 0, \tag{18.10}$$

unde $OC = \xi$ este distanţa de la centrul de greutate al corpului pînă la axa de rotaţie Oz.

Pendulul compus oscilează la fel cu un pendul simplu, a cărui lungime este

$$l' = \frac{J_z}{M\xi} \tag{18.11}$$

şi care se numeşte pendul simplu sincron cu pendulul compus. Perioada lui de oscilaţie este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}. \tag{18.12}$$

2. În cazul rigidului cu un punct fix 0, ecuaţiile de mişcare se deduc prin proiectarea teoremei momentului cinetic

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \tag{18.13}$$

pe axele principale de inerţie $Oxyz$, solidar legate de rigid. Expresiile ecuaţiilor sînt:

$$\begin{aligned} J_1\varepsilon_x + (J_3 - J_2)\omega_y\omega_z &= M_{ex};\\ J_2\varepsilon_y + (J_1 - J_3)\omega_z\omega_x &= M_{ey};\\ J_3\varepsilon_z + (J_2 - J_1)\omega_x\omega_y &= M_{ez}. \end{aligned} \tag{18.14}$$

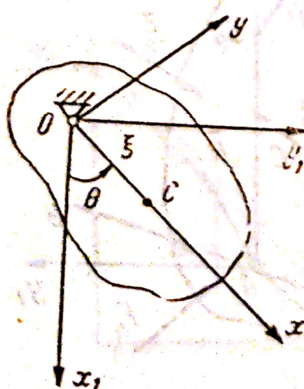


Fig. 18.A.2

unde J_1, J_2 şi J_3 sînt momentele de inerţie principale ale rigidului, iar M_x, M_y şi M_z sînt componentele vectorului moment rezultant $\bar{M}_0$ ale forţelor aplicate $\bar{F}_i$ în raport cu aceleaşi axe. Componentele vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ pe axele sistemului mobil sînt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi;\\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi;\\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{18.15}$$

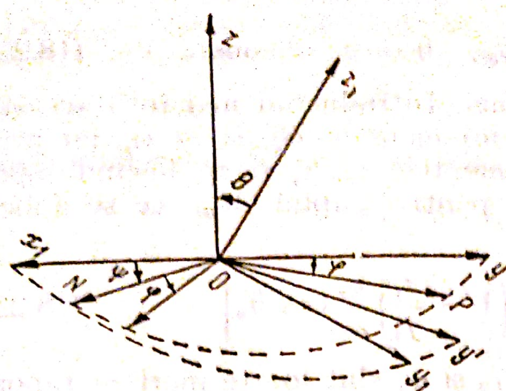


Fig. 18.A.3

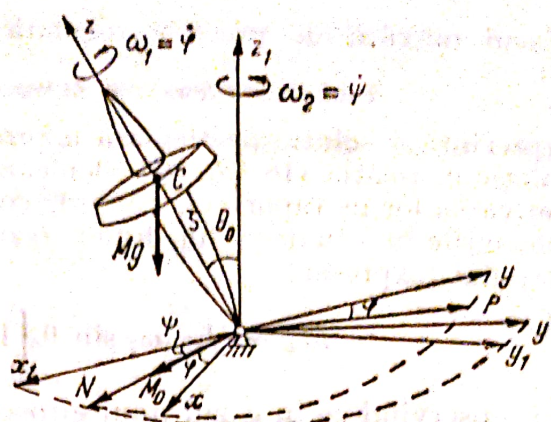


Fig. 18.A.4

ψ, θ și φ fiind unghiurile lui Euler (fig. 18.A.3). Ecuațiile sînt integrabile, independent de condițiile inițiale, în următoarele trei cazuri :

a) *Cazul Euler-Poinsot*, cînd $\overline{M}_0 = 0$, adică $M_{ox} = M_{oy} = M_{oz} = 0$. În acest caz se pot obține următoarele integrale prime :

$$J_1\omega_x^2 + J_2\omega_y^2 + J_3\omega_z^2 = 2E, \tag{18.16}$$

care exprimă conservarea energiei cinetice E, și

$$J_1^2\omega_x^2 + J_2^2\omega_y^2 + J_3^2\omega_z^2 = K_0^2, \tag{18.17}$$

care exprimă conservare modulului vectorului moment cinetic :

$$\overline{K}_0 = J_1\omega_x\bar{i} + J_2\omega_y\bar{j} + J_3\omega_z\bar{k}. \tag{18.18}$$

Rezolvînd ecuațiile (18.16) și (18.17) în raport cu una dintre componentele lui $\overline{\omega}$, de exemplu ω_z, și introducînd pe ω_x și ω_y astfel determinați în cea de a treia ecuație a sistemului lui Euler $J_3\varepsilon_z + (J_2 - J_1)\omega_x\omega_y = 0$, se poate exprima printr-o integrală eliptică timpul t în funcție de ω_z. Introducînd apoi pe ω_x, ω_y și ω_z în ecuațiile (18.15), rezultă $\psi = \psi(t)$; $\theta = \theta(t)$ și $\varphi = \varphi(t)$.

b) *Cazul Lagrange-Poisson*, în care rigidul este supus numai acțiunii greutății proprii Mg, centrul de greutate al corpului se află pe axa de rotație $-C(0, 0, \zeta)$ și $J_1 = J_2$, adică elipsoidul de inerție este un elipsoid de rotație în jurul axei Oz (fig. 18.A.4).

Momentul forțelor aplicate $M_0 = Mg\zeta \sin\theta$ are direcția liniei nodurilor ON, componentele acestuia fiind :

$$\begin{aligned} M_{ox} &= Mg\zeta \sin\theta \cos\varphi ; \\ M_{oy} &= -Mg\,\zeta \sin\theta \sin\varphi ; \\ M_{oz} &= 0. \end{aligned} \tag{18.19}$$

Din a treia ecuație Euler se obține integrala primă :

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const.}, \tag{18.20}$$

și din integrala energiei se obține cea de a doua integrală primă :

$$J_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_3\omega_z^2 + 2Mg\,\zeta \cos\theta = \text{const.} \tag{18.21}$$

Cazul mişcării de precesie regulată:

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0; \quad \psi = \omega_2 t + \psi_0; \quad \theta = \theta_0 = \text{const.}, \tag{18.22}$$

reprezintă o soluţie particulară a problemei. Introducînd mai întîi această soluţie în relaţia (18.15), se calculează componentele ω_x, ω_y şi ω_z, iar prin derivarea lor în raport cu timpul, componentele ε_x, ε_y şi ε_z. Făcînd apoi înlocuirile în ecuaţiile lui Euler rezultă pentru cuplul M_0, ce se aplică corpului, expresia:

$$M_0 = J_3\omega_1\omega_2 \sin\theta_0\left[1 + \left(1 - \frac{J_1}{J_3}\right)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta_0\right] \tag{18.23}$$

sau, observînd că în cazul unui giroscop J_3 şi ω_1 sînt foarte mari în raport cu J_1, respectiv ω_2, se poate scrie:

$$M_0 \approx J_3\omega_1\omega_2 \sin\theta_0. \tag{18.24}$$

Ca vector, $\overline{M}_0$ este orientat după linia nodurilor şi are expresia:

$$\overline{M}_0 = J_3\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1. \tag{18.25}$$

Pentru cazul în care momentul forţelor aplicate este produs de greutatea Mg a corpului, ţinînd seama de relaţia (18.19), rezultă:

$$J_1\omega_1\omega_2 + (J_3 - J_1)(\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\cos\theta_0) = Mg\zeta,$$

sau:

$$J_3\omega_1\omega_2 + (J_3 - J_1)\omega_2^2\cos\theta_0 = Mg\zeta. \tag{18.26}$$

Dacă $\omega_1 \gg \omega_2$, adică viteza unghiulară de rotaţie proprie este mult mai mare decît viteza unghiulară de precesie, relaţia (18.26) poate fi scrisă sub forma

$$J_3\omega_1\omega_2 = Mg\zeta \quad \text{sau} \quad \omega_2 = \frac{Mg\zeta}{J_3\omega_1}. \tag{18.27}$$

c) *Cazul S. Kovalevskaia* este un al treilea caz de integrabilitate, în care, de asemenea, elipsoidul de inerţie relativ la punctul fix O este un elipsoid de rotaţie: $J_1 = J_2$, iar centrul de greutate se află în planul perpendicular pe axa de rotaţie, adică $C(\xi, \eta, 0)$. În plus, în acest caz se consideră $J_1 = J_2 = 2J_3$.

3. În cazul mişcării generale a rigidului, observînd că teoremele generale ale dinamicii determină mişcarea centrului de greutate, se alege ca origină a sistemului de referinţă solidar cu corpul centrul de greutate C al acestuia, reducînd forţele aplicate $\overline{F}_i$, în acest punct.

Teorema mişcării centrului de greutate $M\bar{a}_C = \Sigma\overline{F}_i$ proiectată pe axele sistemului de referinţă fix conduce la ecuaţiile:

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}_1 &= X_1; \\ M\ddot{\eta}_1 &= Y_1; \\ M\ddot{\zeta}_1 &= Z_1. \end{aligned} \tag{18.28}$$

în care s-a notat cu X_1, Y_1 şi Z_1 proiecţiile pe axele fixe ale vectorului rezultant $\overline{R}$ al forţelor aplicate, iar cu ξ_1, η_1 şi ζ_1 coordonatele lui C în sistemul fix.

Pentru studiul mișcării față de centrul de greutate, se aleg ca axe ale sistemului de referință solidare cu corpul direcțiile principale de inerție relativ la centrul de greutate C. Teorema momentului cinetic scrisă față de acest punct $\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \bar{M}_c$, proiectată pe axele sistemului de referință invariabil legat de corp, conduce la ecuațiile:

$$J_1\varepsilon_x + (J_3 - J_2)\,\omega_y\omega_z = M_{cx};$$
$$J_2\varepsilon_y + (J_1 - J_3)\omega_z\omega_x = M_{cy}; \qquad (18.29)$$
$$J_3\varepsilon_z + (J_2 - J_1)\omega_x\omega_y = M_{cz}.$$

Ecuațiile diferențiale (18.28) și (18.29) determină mărimile ξ_1, η_1 ζ_1, ψ, θ și φ ca funcțiuni de timp.

18.B. APLICAȚII LA DINAMICA SOLIDULUI RIGID

18.B.1. Un disc de rază R și greutate P se rotește în jurul unei axe verticale z, cu viteza unghiulară constantă ω. Axa de rotație trece prin centrul de greutate al discului, care coincide cu centrul O și formează unghiul α cu normala pe planul discului. Să se determine reacțiunile din O și O', dacă $OO' = h$ și $OC = \frac{h}{2}$.

R e z o l v a r e. Pentru determinarea mișcării se folosește teorema energiei cinetice (18.3). Cum $\Delta L_{ext} = \Delta L_{int} = 0$, rezultă $E = \text{const.}$, adică $\omega = \omega_0$, mișcarea fiind uniformă.

Pentru determinarea reacțiunilor se aplică teorema impulsului (18.1) și teorema momentului cinetic (18.2).

Centrul de greutate aflîndu-se pe axa Oz, $\dot{\bar{\rho}} = 0$, deci $\bar{H} = 0$, $\dot{\bar{H}} = 0$.

Pentru calculul momentelor de inerție, se vor considera sistemele de axe $Cxyz$ și $Cxuv$, în care Cx este diametrul orizontal, Cu diametrul perpendicular pe Cx și Cv normala la disc (fig. 18.B.1). Va rezulta:

$$J_{xz} = \Sigma m_i x_i z_i = \Sigma m_i x_i u_i \sin\alpha =$$
$$= \sin\alpha \Sigma m_i x_i u_i = \sin\alpha \cdot J_{xu} = 0;$$
$$J_{yz} = \Sigma m_i y_i z_i = \Sigma m_i u_i^2 \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\cdot J_u = \frac{\sin 2\alpha}{2}\cdot\frac{MR^2}{2};$$
$$J_z = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) = \Sigma m_i(x_i^2 + u_i^2\cos^2\alpha) =$$
$$= J_u + J_x\cos^2\alpha + J_x(1 + \cos^2\alpha) =$$
$$= \frac{MR^2}{2}(1 + \cos^2\alpha).$$

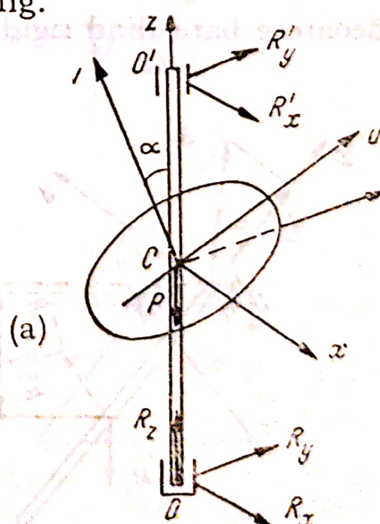


Fig. 18.B.1

Momentul cinetic (18.6) are deci expresia:

$$\overline{K}_0 = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha \cdot \omega_0 \overline{j} + \frac{MR^2}{2} (1 + \cos^2 \alpha)\omega_0 \cdot \overline{k} \quad \text{(b)}$$

şi

$$\dot{\overline{K}}_0 = \frac{\partial \overline{K}_0}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{K}_0 = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha \cdot \omega_0 \overline{i}. \quad \text{(c)}$$

Proiectînd ecuaţiile (18.1) şi (18.2) pe axele sistemului mobil $Cxyz$, se obţine:

$$R_x + R'_x = 0;$$
$$R_y + R'_y = 0; \quad \text{(d)}$$
$$R_z - P = 0;$$
$$\frac{MR^2}{2} \omega_0^2 \sin 2\alpha = R_y \frac{h}{2} - R'_y \frac{h}{2};$$
$$0 = R'_x \frac{h}{2} - R_x \frac{h}{2}.$$

Rezolvînd sistemul se deduce:

$$R_x = R'_x = 0;$$
$$R_y = -R'_y = \frac{MR^2}{8h} \omega_0^2 \sin 2\alpha = \frac{P}{g} \frac{R^2}{8h} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin 2\alpha; \quad \text{(e)}$$
$$R_z = P.$$

18.B.2. O bară omogenă de masă M şi lungime l (fig. 18.B.2) este adusă în poziţia orizontală şi apoi i se dă drumul fără viteză iniţială. Să se afle unghiul α dintre reacţiunea totală $\overline{R}$ a axei de rotaţie şi bară.

Rezolvare. Pentru determinarea lui ω se foloseşte teorema energiei cinetice (18.3), a cărei formă integrală este:

$$E - E_0 = L_{ext}, \quad \text{(a)}$$

deoarece bara fiind rigidă $L_{int} = 0$. Din (18.7) şi (18.4) se obţine:

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{Ml^2}{6} \omega^2; \; E_0 = \frac{Ml^2}{6} \omega_0^2 = 0;$$

$$L_{ext} = Mg \frac{l}{2} \sin \theta. \quad \text{(b)}$$

Înlocuind în (a) rezultă $\omega = \omega(\theta)$;

$$\frac{Ml^2}{6} \omega^2 = Mg \frac{l}{2} \sin \theta;$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \theta. \quad \text{(c)}$$

Derivînd relaţia (c), se găseşte $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$:

$$2\omega \dot{\omega} = \frac{3g}{l} \dot{\theta} \cos \theta; \quad \varepsilon = \frac{3g}{2l} \cos \theta. \quad \text{(d)}$$

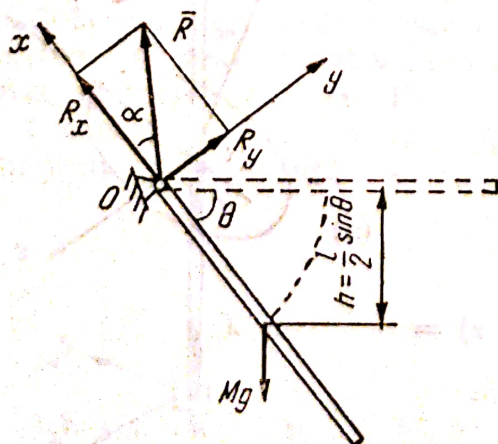


Fig. 18.B.2

Pentru determinarea reacţiunilor se foloseşte teorema cantităţii de mişcare proiectată pe axele Ox şi Oy (primele două ecuaţii din (18.8) în care $\xi = \frac{l}{2}$; $\eta = 0$; $R_y = R'_y = 0$; $X = -Mg \sin \theta$; $Y = -Mg \cos \theta$).

Ţinînd seama de (c) şi (d), se obţine:

$$-M \frac{3g}{l} \sin \theta \left(-\frac{l}{2}\right) = -Mg \sin \theta + R_x;$$

$$M \frac{3g}{2l} \cos \theta \left(-\frac{l}{2}\right) = -Mg \cos \theta + R_y,$$

de unde

$$R_x = \frac{5}{2} Mg \sin \theta; \quad R_y = \frac{1}{4} Mg \cos \theta; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{10} \operatorname{ctg} \alpha.$$

18.B.3. Să se determine perioada micilor oscilaţii pentru corpurile omogene din figurile 18.B.3.

1. Bară de lungime a (fig. 18.B.3, a):

$$l' = \frac{J_0}{M\zeta} = \frac{\frac{Ma^2}{3}}{M\frac{a}{2}} = \frac{2a}{3}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}.$$

2. Placă pătrată de latură a (fig. 18.B.3; b):

— axa de oscilaţie Oz perpendiculară în O pe planul plăcii:

$$J_z = \frac{2Ma^2}{3}; \quad l' = \frac{\frac{2Ma^2}{3}}{Ma\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}};$$

— axa de rotaţie Ox, orizontală în planul plăcii:

$$J_z = \frac{Ma^2}{12}; \quad l' = \frac{\frac{Ma^2}{12}}{Ma\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{12}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{12g}}.$$

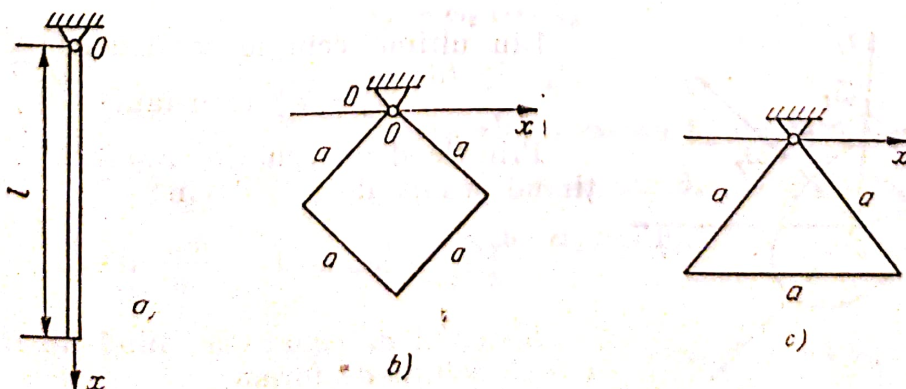


Fig. 18.B.3

3. Placă în formă de triunghi echilateral de latură a (fig. 18.B.3, c):

— axa de oscilaţie Oz, perpendiculară în O pe planul plăcii:

$$J_z = \frac{5Ma^2}{12}; \quad l' = \frac{\frac{5Ma^2}{12}}{M\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}g}};$$

— axa de rotaţie Ox, orizontală în planul plăcii:

$$J_x = \frac{11Ma^2}{12}; \quad l' = \frac{\frac{11}{12}Ma^2}{M\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{11a}{4\sqrt{3}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{11a}{4\sqrt{3}g}}.$$

18.B.4. Un disc circular omogen se roteşte, în virtutea inerţiei în jurul centrului de greutate. În momentul iniţial discul a primit viteza unghiulară ω_1 în jurul unei axe oarecare care formează cu planul discului unghiul α. Să se determine viteza unghiulară de precesie şi unghiul β dintre axa de precesie şi planul discului.

Rezolvare. Se alege sistemul de referinţă mobil solidar cu discul cu axele Ox, Oy în planul discului şi Oz perpendiculară în O pe acest plan. Sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ se alege de asemenea cu originea O_1, în centrul O al discului, avînd axa O_1z în planul Oxz, unghiul dintre axele Oz_1 şi Ox este α, iar ω_1 este situat pe axa Oz_1 (fig. 18.B.4). În acest caz, condiţiile iniţiale sînt:

$$t = 0 \rightarrow \omega_x = \omega_1 \cos\alpha; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega_1 \sin\alpha.$$

Ecuaţiile lui Euler (18.14) sînt:

$$\begin{aligned} &\frac{MR^2}{4}\dot{\omega}_x + \frac{MR^2}{4}\omega_y\omega_z = 0; \\ &\frac{MR^2}{4}\dot{\omega}_y - \frac{MR^2}{4}\omega_z\omega_x = 0; \\ &\frac{MR^2}{2}\dot{\omega}_z = 0, \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

în care, $J_x = J_y = \dfrac{MR^2}{4}$ şi $J_z = \dfrac{MR^2}{2}$, M fiind masa discului şi R, raza lui.

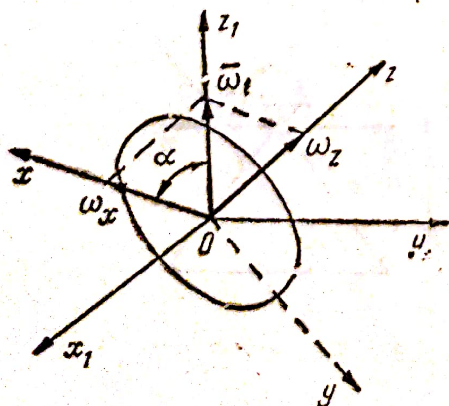


Fig. 18.B.4

Din ultima ecuaţie se deduce:

$$\omega_z = \omega_z^0 \text{ (constant).} \qquad \text{(b)}$$

Primele două ecuaţii, după simplificări şi ţinînd seama de (b), devin:

$$\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z^0\omega_x = 0; \quad \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z^0\omega_y = 0. \qquad \text{(c)}$$

Sistemul de ecuaţii (c) fiind liniar, se încearcă soluţii de forma:

$$\omega_x = c_1e^{rt}; \quad \omega_y = c_2e^{rt}. \qquad \text{(d)}$$

Rezultă, pentru determinarea lui r, sistemul omogen:

$$C_2 r - \omega_z^0 C_1 = 0; \quad \omega_z^0 C_2 + C_1 r = 0.$$

Ecuația caracteristică ce se obține prin anularea determinantului sistemului este $r^2 + (\omega_z^0)^2 = 0$, rădăcinile ei fiind $r = \pm i\omega_z^0$.
Rezultă, pentru ω_x, o soluție de forma:

$$\omega_x = A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t, \tag{e}$$

iar pentru ω_y, ținînd seama de a doua ecuație din (c), soluția:

$$\omega_y = -\frac{1}{\omega_z^0} \cdot \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{\omega_z^0} (A\omega_z^0 \sin \omega_z^0 t - B\omega_z^0 \cos \omega_z^0 t).$$

Soluțiile sistemului (a) sînt deci:

$$\omega_x = A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t; \quad \omega_y = A \sin \omega_z^0 t - B \cos \omega_z^0 t; \quad \omega_z = \omega_z^0. \tag{f}$$

Constantele A, B și ω_z^0 se determină prin condițiile inițiale arătate:

$$\omega_1 \cos \alpha = A; \quad 0 = -B; \quad \omega_1 \sin \alpha = \omega_z^0. \tag{g}$$

Ținînd seama de aceste valori ale constantelor, soluțiile (f) se scriu:

$$\omega_x = (\omega_1 \cos \alpha) \cos (\omega_1 \sin \alpha)t; \quad \omega_y = (\omega_1 \sin \alpha) \sin (\omega_1 \sin \alpha)t; \quad \omega_z = \omega_1 \sin \alpha. \tag{h}$$

Ținînd seama că discul are o mișcare de precesie regulată, soluțiile sistemului sînt de forma:

$$\psi = \omega_2 t + \psi_0; \quad \varphi = \omega_3 t + \varphi_0; \quad \theta = \theta_0. \tag{i}$$

Introducînd aceste soluții în (18.15), se obțin pentru ω_x, ω_y și ω_z expresiile:

$$\omega_x = \omega_2 \sin \theta_0 \sin(\omega_3 t + \varphi_0); \quad \omega_y = \omega_2 \sin \theta_0 \cos (\omega_3 t + \varphi_0); \quad \omega_z = \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0. \tag{j}$$

Prin identificarea relațiilor (h) și (j):

$$\omega_1 \cos \alpha \sin [90° - (\omega_1 \sin \alpha)t] \equiv \omega_2 \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \omega_3 t);$$
$$\omega_1 \cos \alpha \cos [90° - (\omega_1 \sin \alpha)t] \equiv \omega_2 \sin \theta_0 \cos (\varphi_0 + \omega_3 t); \tag{k}$$
$$\omega_1 \sin \alpha \equiv \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0.$$

Se obține:

$$\omega_1 \cos \alpha = \omega_2 \sin \theta_0; \quad \varphi_0 = 90°; \quad -\omega_1 \sin \alpha = \omega_3; \tag{l}$$
$$\omega_1 \sin \alpha = \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0.$$

Necunoscutele problemei sînt ω_2 şi θ_0. Eliminînd pe ω_2 între prima şi ultima ecuaţie din (1) se obţine sistemul:

$$\omega_2 \sin \theta_0 = \omega_1 \cos \alpha;$$

$$\omega_2 \cos \theta_0 = 2\omega_1 \sin \alpha,$$

de unde:

$$\omega_2 = \omega_1\sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \omega_1\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}; \qquad \text{(m)}$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Unghiul cerut de problemă este $\beta = 90° - \theta_0$, deci $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

18.B.5. Un giroscop greu, simetric, execută o precesie regulată în jurul unei axe verticale Oz. Viteza unghiulară a rotaţiei proprii în jurul axei Oz este foarte mare în comparaţie cu viteza unghiulară de precesie. Să se afle o expresie aproximativă pentru forţa orizontală de reacţiune în punctul fix O dacă se cunosc: greutatea G a corpului, distanţa z_c de la punctul O pînă la centrul de greutate al corpului, momentul de inerţie J_z în raport cu axa Oz, unghiul θ dintre axele Oz_1 şi Oz, şi viteza unghiulară de rotaţie proprie ω_1 (fig. 18.B.5).

R e z o l v a r e. Aplicînd teorema mişcării centrului de greutate şi observînd că mişcarea sa este, cu aproximaţiile problemei, circulară şi uniformă pe un cerc de rază $r = z_c \sin \theta$, rezultă:

$$\frac{G}{g} z_c \sin \theta\omega_2^2 = F. \qquad \text{(a)}$$

Teorema momentului cinetic, $\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}_O$, arată că viteza vîrfului vectorului $\overline{K}_O$ este egală cu momentul forţelor exterioare în raport cu punctul O. Observînd că vîrful lui $\overline{K}_O$ (al cărui suport nu diferă sensibil de suportul vectorului ω_1 — situat pe axa Oz — dacă aceasta este foarte mare şi dacă $J_z = J_3$ este de asemenea mare) se roteşte pe un cerc cu raza $|\overline{K}_O| = J_z\omega \sin \theta$, cu viteza unghiulară ω_2, se poate scrie:

$$J_z\omega_1 \sin \theta \cdot \omega_2 = G \cdot z_c \sin \theta. \qquad \text{(b)}$$

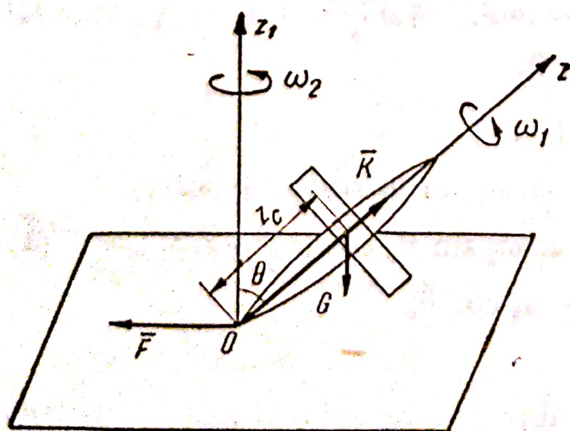


Fig. 18.B.5

Eliminînd pe ω_2 între relaţiile (b) şi (a), se obţine F:

$$F = \frac{G^3 z_c^3}{J g \omega_1^2} \sin \theta. \qquad \text{(c)}$$

18.B.6. Un giroscop, la care $J_1 = J_2 = 2J_3$, se roteşte în virtutea inerţiei în jurul centrului de greutate, executînd o precesie regulată. Cunoscînd viteza unghiulară ω_1 a rotaţiei proprii a giroscopului şi unghiul dintre axa giroscopului şi axa de precesie $\theta = 60°$, să se afle viteza unghiulară de precesie ω_2.

R e z o l v a r e. Se aplică relaţia (18.22) în care se ţine seama că $Mg\zeta = 0$ şi $J_1 = J_2 = 2\ J_3$; rezultă:

$$J_3\omega_1\omega_2 + (J_3 - 2J_3)\,\omega_2^2 \cos 60° = 0;$$

$$J_3\omega_1 - J_3\omega_2 \frac{1}{2} = 0, \quad \text{de unde} \quad \omega_2 = 2\omega_1.$$

18.B.7. O turbină avînd arborele paralel cu axa longitudinală a vaporului, face 250 de rotaţii pe minut. Greutatea rotorului este de 180 000 N, iar raza de inerţie, de 1,43 m. Să se determine presiunea giroscopică pe lagăre, distanţa între ele fiind 5,55 m, la întoarcerea vaporului cu 10° pe secundă.

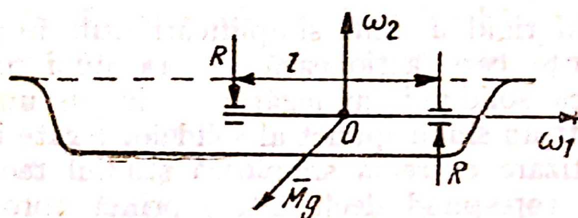


Fig. 18.B.7

R e z o l v a r e. Presiunea giroscopică pe lagăre este dată de relaţia: $R = \frac{J\omega_1\omega_2}{l}$ (fig. 18.B.7) în care:

$$J = Mi^2 = \frac{180\,000}{9,81} \cdot 1,43^2 = 37\,521\ \text{Kgm}^2;$$

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 250}{30} = \frac{25\pi}{3} = 26,18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

$$\omega_2 = 10\,\frac{\text{grade}}{\text{s}} = 10\,\frac{\pi}{180}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,1745\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Rezultă: $R = \frac{37\,521 \cdot 26,18 \cdot 0,1745}{5,55} = 30\,885\ \text{N}.$

Capitolul 19

CIOCNIRI. PERCUŢII

19.A. PREZENTARE TEORETICA

19.A.1. Generalităţi

Modelul de solid rigid a adus simplificări utile în problema reducerii unui sistem de forţe care acţionează asupra unui corp solid. Folosirea modelului în statica solidului cu legături a impus un nou model matematic: contactul într-un singur punct al solidelor legate între ele. Cu toate că această schematizare extremă simplifică studiul teoretic, totuşi rezultatele obţinute nu corespund decît într-o primă aproximaţie legăturilor reale, mai ales dacă se ţine seama şi de frecările din legături. De aceea, la Capitolul 5 s-a renunţat la modelul solidului nedeformabil, adoptîndu-se un model ameliorat, pe baza ipotezei unui contact pe o suprafaţă regulată (plană, cilindrică, sferică) de o anumită arie, consecinţă a unor deformaţii superficiale limitate, sau a unor prelucrări prealabile. La acest model apar pentru prima dată ipoteze privind distribuţia forţelor de suprafaţă (presiuni, frecări), ipoteze justificate pe baza unor încercări de laborator.

Fenomenul de ciocnire a două sau mai multe solide în mişcare se produce în momentul în care ele vin în contact sau li se aplică acestor solide, *brusc*, una sau mai multe legături. Fenomenul desprinderii de legătură nu constituie o ciocnire. Dacă nu s-ar ţine seamă de deformarea solidului în momentul ciocnirii, ar trebui să se admită că în punctele de contact ar lua naştere forţe infinite care ar acţiona un timp nul, concluzie evident absurdă, ceea ce înseamnă că modelul rigid a atins limita lui de aplicabilitate la studiul ciocnirii.

Pentru ameliorarea modelului de solid care să fie utilizabil în problemele de ciocniri, sînt necesare unele ipoteze. Aceste ipoteze pot fi justificate numai pe baza experimentelor şi a observaţiilor.

19.A.2. Observaţii asupra ciocnirii solidelor

Ciocnirea solidelor se produce într-un interval de timp *foarte mic, dar niciodată nul.*

În intervalul de timp al ciocnirii, solidele se deformează şi revin, într-o măsură oarecare, la forma lor iniţială.

În intervalul de timp cît durează ciocnirea, deplasările particulelor solidelor *sînt foarte mici* faţă de deplasările dinainte şi după ciocnire.

Modificările vitezelor în timpul foarte scurt al ciocnirii sînt *cu mult mai mari* decît modificările vitezelor, într-un timp egal înainte de începerea sau după terminarea fenomenului de ciocnire. Din această observaţie reiese că forţele din timpul ciocnirii sînt cu *mult mai mari* decît forţele obişnuite, cum ar fi greutăţile solidelor în ciocnire.

În trecut, din observații asemănătoare, s-au tras concluzii greșite: că ciocnirea ar fi un *fenomen discontinuu, instantaneu*, că modificarea bruscă a mișcărilor mecanice s-ar datora unor *forțe instantanee*.

În realitate, fenomenul are o durată foarte mică, dar *diferită de zero*, în care timp forțele de ciocnire variază continuu, ating valori foarte mari *dar limitate*, astfel că ciocnirea este *un fenomen continuu*.

19.A.3. Ipoteze asupra ciocnirii solidelor

Dacă t este momentul inițial, iar t' este momentul final al procesului de ciocnire (interacțiunii) există, în general, un moment intermediar $t_0 (t < t_0 < t')$ cînd procesul rămînînd continuu își schimbă sensul, adică viteza relativă a solidelor se anulează, își schimbă sensul și valoarea, iar solidele care sînt comprimate în intervalul de timp $t_0 - t$ se pot destinde în intervalul $t' - t_0$.

Se presupune că în intervalul $t' - t$ pozițiile particulelor solidelor nu variază în raport cu un reper fix.

Denumind impulsul total al forțelor în intervalul de timp foarte mic al ciocnirii prin *percuție*, se presupune că percuțiile forțelor obișnuite sînt nule și astfel se consideră numai percuțiile forțelor de ciocnire, denumite *forțe percutante*.

Forțele percutante notate cu $\bar{\mathfrak{F}}$ pot fi atît forțe *date*, cît și *de legătură*, atît *exterioare*, cît și *interioare*.

Deoarece se ține seama de deformările și de revenirile solidelor în timpul ciocnirii, sînt necesare ipoteze privind starea elasto-plastică a materialelor solidelor care se ciocnesc.

Principiile mecanicii newtoniene se consideră aplicabile și în intervalul de timp al ciocnirii.

Numai pentru stabilirea unor teoreme, se pot asimila particulele cu punctele materiale.

19.A.4. Problemele și teoremele generale ale ciocnirii

În cadrul unui studiu teoretic, problema generală a ciocnirii se poate enunța astfel: se cunosc, în momentul inițial t al ciocnirii, pozițiile punctelor materiale $M_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ale unui sistem, prin $\bar{r}_i$, vectorii de poziție în raport cu un reper fix (fig. 19.A.1), vitezele lor inițiale $\bar{v}_i$ și masele lor m_i.

Se cere să se determine vitezele $\bar{v}'_i$ din momentul final t' al ciocnirii.

Pentru rezolvare, pe baza ipotezelor, se va considera $\bar{r}_i$ invariabil în intervalul $t' - t$, se vor considera numai forțele percutante $\bar{\mathfrak{F}}_i$, $\bar{\mathfrak{F}}_{ij}$ și percuțiile acestor forțe

$$\bar{\mathfrak{P}}_i = \int_t^{t'} \bar{\mathfrak{F}}_i \mathrm{d}t, \quad \bar{\mathfrak{P}}_{ij} = \int_t^{t'} \bar{\mathfrak{F}}_{ij} \mathrm{d}t,$$

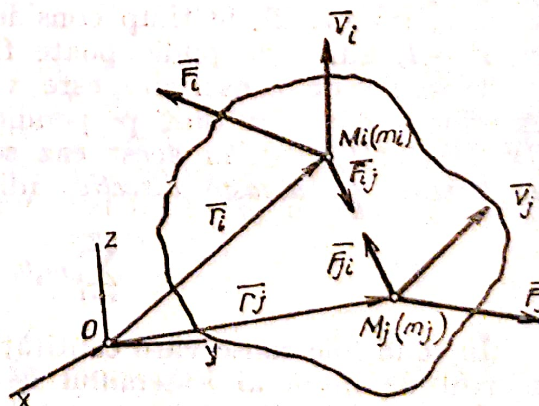


Fig. 19.A.1

apoi în baza valabilității principiilor, se vor folosi relațiile:

$$\overline{\mathfrak{P}}_{ij} + \overline{\mathfrak{P}}_{ji} = 0,$$

$$\bar{r}_i \mathrm{x} \overline{\mathfrak{P}}_{ij} + \bar{r}_i \mathrm{x} \overline{\mathfrak{P}}_{ji} = 0.$$

Teorema de variație a cantității de mișcare se enunță astfel: *variația cantității de mișcare a sistemului de puncte materiale, în intervalul de timp al ciocnirii, este egală cu suma percuțiilor exterioare (date și de legătură) pentru același interval de timp,* adică:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{P}}_i. \tag{19.1}$$

Observații

Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = m\bar{v}_c$, unde $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, iar $\bar{v}_c$ este viteza în momentul t a centrului de masă al sistemului, teorema are și următoarea formă: *variația cantității de mișcare a sistemului este aceeași cu aceea a centrului de masă, dacă s-ar presupune concentrată masa sistemului în acest punct și asupra căruia ar acționa, pe durata considerată a ciocnirii, toate forțele percutante exterioare,* adică:

$$m\bar{v}_c' - m\bar{v}_c = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{P}}_i. \tag{19.2}$$

Expresiile vectoriale (19.1) și (19.2) se pot traduce prin proiectarea vectorilor pe axele triedrului $Oxyz$, în expresii scalare.

Teorema de conservare a cantității de mișcare. În cazul în care sistemul nu are legături, ciocnirea se numește *liberă*. Dacă ciocnirea este liberă și nu sînt forțe percutante exterioare, adică $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{P}}_i = 0$, cantitatea de mișcare a sistemului *se conservă* în intervalul de timp considerat, adică:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i. \tag{19.3}$$

Observații

Se precizează că atît în teorema de variație, cît și în aceea de conservare, intervalul de timp considerat poate fi cuprins chiar în interiorul lui $t' - t$, adică de pildă: poate fi $t_0 - t$ sau $t' - t_0$.

Teorema de conservare este valabilă și dacă există forțe percutante exterioare dar care sînt perpendiculare toate pe o direcție, de pildă pe Ox, adică: $\mathfrak{P}_{ix} = 0$, în acest caz se *conservă valoarea proiecției cantității de mișcare pe această direcție,* adică:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}' = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}. \tag{19.4}$$

În condițiile conservării cantității de mișcare a unui sistem fără legături, centrul de masă al sistemului își menține mișcarea: $\bar{v}_c' = \bar{v}_c$.

Teorema de variație a momentului cinetic. Momentul cinetic poate fi considerat în raport cu un punct oarecare O, originea unui sistem de

referință și se notează $\overline{K}_0$, sau în raport cu axa (Δ) care trece prin O și are valoarea scalară K_Δ.

Expresia matematică a teoremei, în raport cu un punct, este:

$$\overline{K}_0' - \overline{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{\mathfrak{P}}_i, \qquad (19.5)$$

adică: *variația momentului cinetic în raport cu un punct oarecare al unui sistem de puncte materiale în intervalul de timp considerat este egală cu momentul rezultant în raport cu același punct al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură).*

Observații

Potrivit definiției, momentul unui vector în raport cu o axă (Δ) este proiecția, pe direcția axei, a momentului vectorului în raport cu un punct O al axei. Conform convenției adoptate, această proiecție este *tot un vector*. Astfel că momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă (Δ) de versor $\overline{u}$ se notează cu $\overline{K}_\Delta$ și are valoarea scalară: $K_\Delta = \overline{K}_0 \cdot \overline{u}$.

Înmulțind scalar cu $\overline{u}$ expresia matematică (19.5) a teoremei de variație a momentului cinetic în raport cu originea O, se obține expresia matematică (scalară) a teoremei momentului cinetic, al sistemului de puncte materiale, în raport cu axa (Δ):

$$K_\Delta' - K_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i')\overline{u} - \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times m_i\overline{v}_i)\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times \overline{\mathfrak{P}}_i)\overline{u} = \mathfrak{M}_\Delta$$

au

$$K_\Delta' - K_\Delta = \mathfrak{M}_\Delta, \qquad (19.6)$$

adică: *variația momentului cinetic, în raport cu o axă oarecare, al unui sistem de puncte materiale, în intervalul de timp considerat, este egală cu momentul rezultant, în raport cu aceeași axă, al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură).*

Se precizează că (19.6) exprimă scalar această teoremă.

Teorema de conservare a momentului cinetic. În cazul cînd nu sînt percuții exterioare sau dacă momentul rezultant al percuțiilor exterioare (date și de legătură), în raport cu punctul O, este nul în intervalul de timp considerat, momentul cinetic al sistemului, în raport cu O, se conservă în acel interval de timp.

Teorema de conservare a momentului cinetic se aplică și în cazul momentului cinetic în raport cu o axă (Δ): dacă momentul rezultant al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură) în raport cu axa (Δ) este nul în intervalul de timp considerat, momentul cinetic al sistemului în raport cu (Δ) se conservă în acel interval de timp, adică: $K_\Delta' = K_\Delta$, relația de conservare putîndu-se exprima scalar.

19.A.5. Unele aplicații clasice

a) *Definiții.* Dacă două solide au, în momentul ciocnirii, mișcări de translație, iar vitezele lor sînt dirijate după normala comună în punctul de contact, ciocnirea se numește *dreaptă* (fig. 19.A.2).

Dacă normala comună trece prin centrele de masă ale celor două solide, ciocnirea se numeşte *centrică.*

Dacă solidele sînt sfere omogene, ciocnirea dreaptă este şi centrică.

b) *Ciocnirea dreaptă a două sfere omogene. Date :* m_1, m_2, masele sferelor ; $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ vitezele în momentul t, la începutul ciocnirii ; Ox, linia centrelor şi normala comună (fig. 19.A.3). Nu există decît percuţii interioare. Aceste percuţii au momente nule faţă de centrele de masă. Ca urmare şi după ciocnire mişcarea va fi tot de translaţie.

Necunoscute : $\bar{v}_0$ viteza în momentul t_0, al schimbării sensului procesului de ciocnire (sfîrşitul comprimării şi începutul destinderii) ; $\bar{v}_1'$ şi $\bar{v}_2'$, vitezele în momentul t' al sfîrşitului ciocnirii.

Relaţii scrise în baza conservării cantităţii de mişcare în oricare din momentele ciocnirii :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_0 = m_1v_1' + m_2v_2'. \qquad (19.7)$$

Vitezele fiind coliniare în toate momentele, relaţiile au fost scrise scalar ; la fel va fi şi pentru percuţii.

Percuţiile interioare din faza de comprimare :

$$\mathfrak{L} = m_1(v_1 - v_0) = m_2(v_0 - v_2) = \frac{m_1m(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (19.8)$$

Percuţiile interioare din faza de destindere :

$$\mathfrak{L}' = m_1(v_0 - v_1') = m_2(v_2' - v_0) = \frac{m_1m_2(v_2' - v_1')}{m_1 + m_2}. \qquad (19.9)$$

Raportul percuţiilor :

$$\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = e, \qquad (19.10)$$

este dat de *raportul, cu semn schimbat, al vitezelor relative de la sfîrşitul şi de la începutul ciocnirii.*

S-a notat cu e *coeficientul de restituire al percuţiei.*

Acest coeficient, *determinat numai experimental,* reprezintă starea elasto-plastică a materialelor solidelor în intervalul de timp al ciocnirii. Dacă $e = 1$, percuţia de destindere este egală cu percuţia din faza de comprimare şi se obişnuieşte a se denumi ciocnirea, în aceste condiţii, ca fiind *perfect elastică.* Dacă $e = 0$, percuţia de destindere este nulă, adică cele două solide au aceeaşi viteză $v_1' = v_2'$ în continuare, ciocnirea ar fi *perfect plastică.*

În realitate $0 < e < 1$, percuţia, la destindere, nu se restituie decît parţial.

Cunoaşterea coeficientului de material e permite ridicarea nedeterminării şi calculul necunoscutelor cu ajutorul ecuaţiilor (19.8), (19.9), (19.10), adică :

$$v_0 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad v_1' = \frac{v_1(m_1 - em_2) + v_2(1 + e)\,m_2}{m_1 + m_2}; \qquad (19.11)$$

$$\mathfrak{L} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \quad \mathfrak{L}' = -e\,\frac{m_1m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \qquad (19.12)$$

$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - em_1) + v_1(1 + e)\,m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (19.13)$$

O parte a mişcării mecanice trece în alte forme nemecanice de mişcare (termică, electrică, de deformaţie etc.).

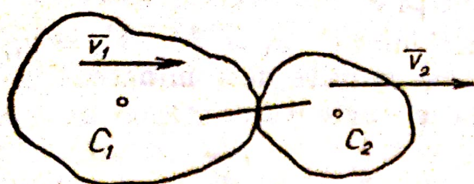


Fig. 19.A.2

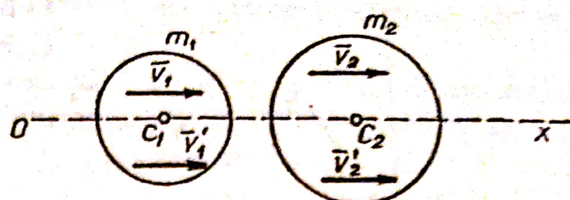


Fig. 19.A.3

Această trecere se exprimă prin diferența dintre energia cinetică E la momentul t și energia cinetică E' la momentul t':

$$E - E' = \frac{m_1 m_2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \tag{19.14}$$

O b s e r v a ț i i

Relația (19.7) justifică definiția dată *cantității de mișcare*, una din măsurile mișcării mecanice care caracterizează capacitatea acestei mișcări de a *se transmite*, tot sub formă mecanică, de la o sferă la alta.

Relația (19.14) justifică *definiția energiei cinetice*, cea de a doua măsură a mișcării mecanice caracterizînd capacitatea acestei mișcări de *a trece* într-o altă formă nemecanică de mișcare.

c) *Ciocnirea oblică a două sfere omogene*. Sferele au mișcări de translație dar vitezele lor *nu* sînt îndreptate după normala comună în punctul de contact (fig. 19.A.4). Se neglijează percuțiile tangențiale (datorită frecărilor) față de percuțiile centrale. Dacă $\bar{V}_1 = \bar{v}_1 + \bar{u}_1$ și $\bar{V}_2 = \bar{v}_2 + \bar{u}_2$, se calculează componentele normale $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ca la ciocnirea centrală și deoarece $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$ nu se modifică,

$$|\bar{V}_1'| = \sqrt{v_1'^2 + u_1^2}; \quad |\bar{V}_2'| = \sqrt{v_2'^2 + u_2^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{u_1}{v_1'}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{u_2}{v_2'} \text{ etc.}$$

Dacă sfera O_1 lovește oblic o placă plană fixă (similară cu o sferă de masă infinită) cu viteza $\bar{V}_1$ înclinată de unghi α față de normala la placă (fig. 19.A.5), se găsește:

$$v_1' = ev_1 = -eV_1 \cos \alpha_1; \quad u_1 = V_1 \sin \alpha_1,$$

$$|\bar{V}_1| = |\bar{V}_1| \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + e^2 \cos^2 \alpha_1} \leqslant |\bar{V}_1|,$$

iar

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = -\frac{1}{e} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

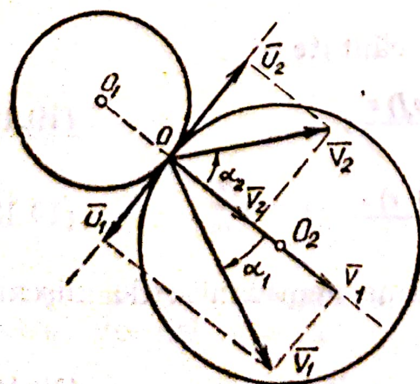


Fig. 19.A.4

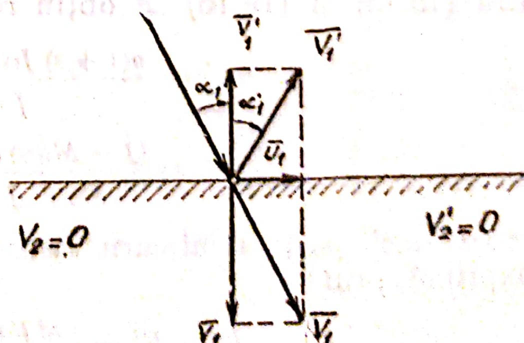


Fig. 19.A.5

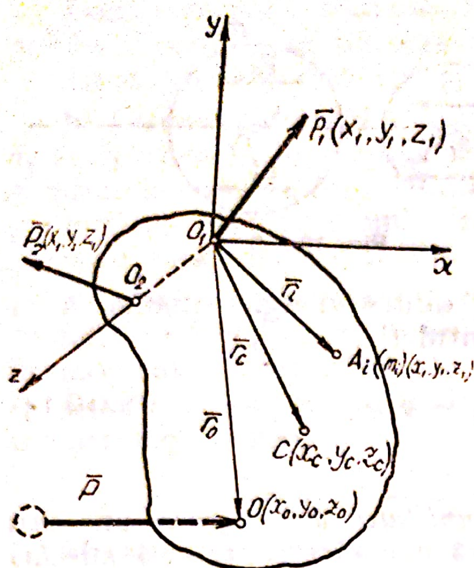


Fig. 19.A.6

Observaţie

Cazul particular: $\alpha_1 = 0$, $V_1 = v_1$, $V_1' = v_1' = -ev_1$ permite determinarea experimentală a coeficientului e:

$$e = -\frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{h'}{h}},$$

unde h este înălţimea de la care este lăsată sfera să cadă pe placa plană fixă, iar h' este înălţimea pînă la care se ridică sfera după ciocnire.

d) *Ciocnirea unei sfere în mişcare de translaţie cu un solid în mişcare de rotaţie.*

Date: un solid este în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe O_1z, O_1 şi O_2 fiind punctele de legătură fixe cu axa ($O_1O_2 = c$). Sfera de masă M, în translaţie rectilinie într-un plan perpendicular pe axă, loveşte solidul după normala comună în punctul de contact O, cu viteza $\bar{v}$ în momentul în care solidul se rotea cu $\bar{\omega}$. Distanţa de la axa O_1O_2 la suportul vitezei $\bar{v}$ este a, iar momentul de inerţie al solidului în raport cu axa de rotaţie este $J = J_z$, în calculele faţă de triedrul O_1xyz (fig. 19.A.6).

Necunoscute: vitezele $\bar{v}'$ şi $\bar{\omega}'$ după ciocnire şi percuţiile: $\bar{\mathfrak{X}}$ (percuţie exterioară) $\bar{\mathfrak{X}}_1$ şi $\bar{\mathfrak{X}}_2$ percuţiile de legătură din punctele O_1 respectiv O_2 ale axei.

Se aplică sistemului sferă-solid în rotaţie, teorema momentului cinetic în raport cu axa O_1O_2. În acest caz, în intervalul $t' - t$ percuţia din O devenind interioară, iar momentele percuţiilor din O_1 şi O_2 fiind nule, momentul cinetic al sistemului se conservă şi se obţine ecuaţia scalară cu v' şi ω' ca necunoscute:

$$J\omega' + Mav' = J\omega + Mav. \qquad (19.15)$$

Notînd cu v_0 şi v_0' vitezele punctului O la începutul şi la sfîrşitul ciocnirii care, local, are caracterul ciocnirii drepte a două sfere, se poate scrie, în funcţie de coeficientul de restituire e, ecuaţia:

$$e = -\frac{v' - v_0'}{v - v_0} = -\frac{v' - \omega' a}{v - \omega a}. \qquad (19.16)$$

Din (19.15) şi (19.16) se obţin rezultatele căutate:

$$v' = \frac{a(1+e)J\omega + (Ma^2 - eJ)v}{J + Ma^2}; \qquad (19.17)$$

$$\omega' = \frac{(J - Ma^2 e)\omega + Ma(1+e)v}{J + Ma^2}. \qquad (19.18)$$

Trecerea unei părţi a mişcării mecanice în forme nemecanice de mişcare se exprimă prin:

$$E - E' = \frac{MJ(1-e^2)}{2(J + Ma^2)}(v - a\omega)^2. \qquad (19.19)$$

Calculul percuțiilor. Se continuă cu precizarea axelor sistemului de referință ales: axa de rotație O_1O_2 este O_1z.

Percuția $\bar{\mathfrak{P}}$ fiind perpendiculară pe O_1z, se alege planul O_1xy astfel încît să conțină percuția, iar O_1x să fie paralelă cu $\bar{\mathfrak{P}}$; deci $\bar{\mathfrak{P}}(X, O, O)$, iar $\bar{r}_0(x_0, y_0, O)$. Se notează cu $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ vectorul de poziție al unui punct A_i de masă m_i al solidului în rotație, cu $\bar{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ vectorul de poziție al centrului de masă C și cu m, masa solidului.

Necunoscutele sistemului sînt scalarii proiecțiilor pe axe ale percuțiilor $\bar{\mathfrak{P}}(X, O, O)$; $\bar{\mathfrak{P}}_1(X_1, Y_1, Z_1)$; $\bar{\mathfrak{P}}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, în număr de șapte.

Se aplică teorema cantității de mișcare pentru solid:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \bar{\mathfrak{P}} + \bar{\mathfrak{P}}_1 + \bar{\mathfrak{P}}_2, \tag{19.20}$$

relație care, ținînd seamă de teorema mișcării centrului de masă, devine

$$m(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \times \bar{r}_c = \bar{\mathfrak{P}} + \bar{\mathfrak{P}}_1 + \bar{\mathfrak{P}}_2. \tag{19.21}$$

Se aplică și teorema momentelor cinetice în raport cu O_1:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i' - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i = \bar{r}_0 \times \bar{\mathfrak{P}} + \overline{O_1O_2} \times \bar{\mathfrak{P}}_2, \tag{19.22}$$

după care se fac obișnuitele transformări pe baza relațiilor complexe, consecințe ale alegerii axelor.

19.B. APLICAȚII LA CIOCNIRI

19.B.1. Să se determine raportul maselor a două bile care se ciocnesc în următoarele situații: una dintre bile este în repaus, iar cealaltă bilă rămîne în repaus după ciocnire (fig. 19.B.1, *a*); vitezele celor două bile sînt egale și opuse înainte de ciocnire, iar după ciocnire una dintre bile rămîne în repaus (fig. 19.B.1, *b*).

R e z o l v a r e. Se notează cu m_1 și m_2 valorile celor două mase și cu e coeficientul de restituire la ciocnire. Pentru rezolvare, se aplică teorema de conservare a cantității de mișcare pentru sistemul celor două bile și formula coeficientului de restituire la ciocnire:

— Primul caz:

$$m_1v_1 = m_2v_2'; \quad e = \frac{v_2'}{v_1}.$$

Rezultă:

$$\frac{m_1}{m_2} = e.$$

O condiție necesară a producerii acestei ciocniri este ca

$$m_1 < m_2.$$

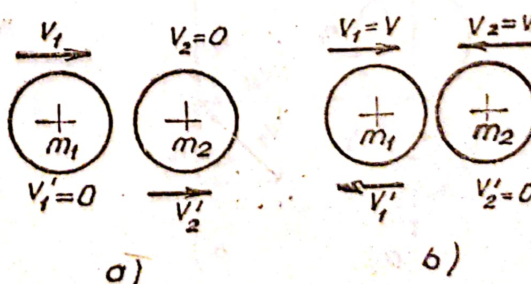


Fig. 19.B.1

— Al doilea caz:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1v_1'; \quad e = \frac{v_1'}{v_1 + v_2},$$

unde:

$$v_1 = v_2 = v.$$

Rezultă:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1 + 2e}.$$

19.B.2. O bilă de masă $m_1 = 2$ kg cade pe verticală și are viteza $v_1 = 5$ m/s în momentul ciocnirii cu o altă bilă. Cea de-a doua bilă are masa $m_2 = 0{,}8$ kg și viteza $v_2 = 3\sqrt{2}$ m/s, înclinată cu unghiul $\alpha = 45°$ față de direcția vitezei primei bile (fig. 19.B.2, *a*). Să se calculeze vitezele după ciocnire ale celor două bile, cunoscînd $e = 0{,}8$.

R e z o l v a r e. Se aplică teorema de conservare a cantității de mișcare pe linia centrelor celor două bile:

$$m_1v_1 - m_2v_2 \cos\alpha = m_1v_1' + m_2v_{2n}',$$

unde v_{2n}' este componenta normală, după ciocnire, a vitezei $\bar{v}_2'$.

Se aplică de asemenea formula coeficientului de restituire la percuție:

$$e = 0{,}8 = \frac{v_{2n}' - v_1'}{v_1 + v_2 \cos\alpha}.$$

Înlocuind și rezolvînd, rezultă:

$$v_1' = 0{,}9 \text{ m/s}; \qquad v_{2n}' = 7{,}3 \text{ m/s}.$$

Viteza după ciocnire a bilei de masă m_2 se obține compunînd pe v_{2n}' cu componenta v_{2t} tangentă la suprafețele în contact care nu se modifică (fig. 19.B.2, *b*):

$$v' = \sqrt{v_{2t}^2 + v_{2n}'^2} \equiv 7{,}9 \text{ m/s}.$$

19.B.3. O bilă de masă m cade fără viteză inițială din punctul A și ciocnește în B o suprafață fixă de rază R (fig. 19.B.3). Să se calculeze

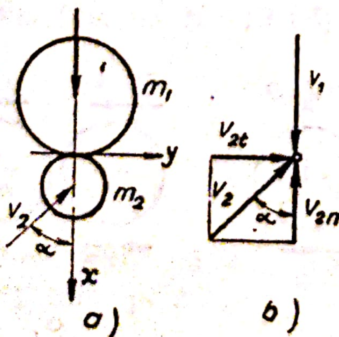


Fig. 19.B.2

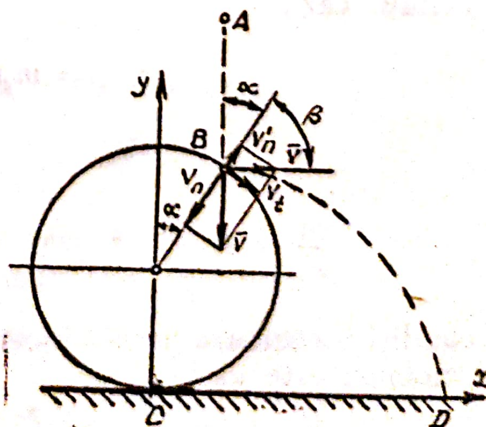


Fig. 19.B.3

distanța CD la care bila cade pe sol, dacă $AB = 1{,}5\ R$, $\alpha = 30°$ și coeficientul de restituire $e = \frac{1}{3}$.

Rezolvare. Ciocnirea bilei este oblică pe o suprafață fixă. În acest caz nu este valabilă teorema de conservare a cantității de mișcare. Se aplică formula lui e pentru componentele normale ale vitezelor la suprafața de ciocnire:

$$e = \frac{v'_n}{v_n} = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha}.$$

Deoarece componenta tangentă la suprafața de ciocnire a vitezei rămîne nemodificată:

$$\text{tg}\ \alpha = e\ \text{tg}\ \beta,$$

rezultă:

$$\beta = 60°; \quad v' = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} ve.$$

Viteza cu care bila atinge suprafața cilindrică este $v = \sqrt{3gR}$. Deci:

$$v' = \sqrt{gR}.$$

Se studiază în continuare mișcarea punctului lansat din B cu viteza inițială orizontală v'. Ecuațiile mișcării raportate la sistemul xCy sînt:

$$x = \frac{R}{2} + t\sqrt{gR}; \quad y = R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{gt^2}{2}.$$

Introducînd în expresia lui x valoarea lui t obținută din condiția $y = 0$ (bila atinge solul) se găsește:

$$CD = R\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$$

19.B.4. Pe capătul A al unei bare omogene $AB = 2l (AO = OB)$ de greutate G, cade de la înălțimea l o bilă de greutate 0,5 G (fig. 19.B.4). Să se calculeze unghiul descris de bară în rotație pînă la oprire, cunoscînd raza articulației r, coeficientul de frecare în articulație μ' și coeficientul de restituire la ciocnire $e = 0{,}5$.

Rezolvare. Viteza cu care bila ciocnește bara este:

$$v_1 = \sqrt{2gl}.$$

Pentru studiul ciocnirii, se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O și formula coeficientului de restituire e:

$$\frac{G}{2g} v_1 l = \frac{G}{2g} v'_1 l + \frac{Gl^2}{3g} \omega'_2;$$

$$e = 0{,}5 = \frac{l\omega'_2 - v'_1}{\sqrt{2gl}}.$$

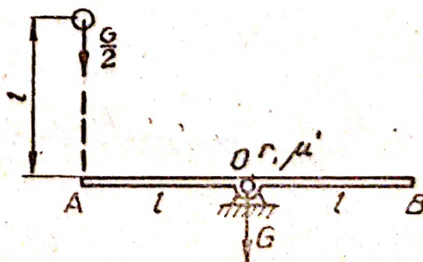


Fig. 19.B.4

Viteza barei după ciocnire este:

$$\omega_2' = \frac{9}{10\,l}\sqrt{2gl}.$$

Pe durata ciocnirii nu s-a ţinut seama de efectul cuplului de frecare din articulaţie. După ciocnire, se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice, ştiind că în final bara se opreşte. Valoarea momentului cuplului de frecare din articulaţie este:

$$M_f = \mu' G r.$$

Deci:

$$-\frac{1}{2}\frac{Gl^2}{3g}\omega_2'^2 = -\mu' G r \theta.$$

De aici:

$$\theta = \frac{27l}{100\,\mu' r}.$$

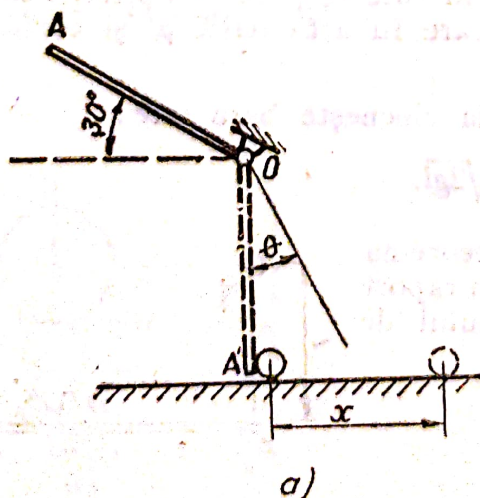
19.B.5. Bara $OA = l$ de greutate G pleacă din repaus şi ciocneşte, cînd ajunge în poziţie verticală, o bilă de greutate $\frac{G}{2}$ aflată în repaus pe un plan orizontal (fig. 19.B.5, *a*). Să se calculeze distanţa parcursă de bilă pe planul orizontal pînă la oprire (coeficientul de frecare μ), unghiul de înclinare maximă a barei după ciocnire şi valoarea percuţiei din articulaţie. Coeficientul de restituire $e = 0,5$.

R e z o l v a r e. Viteza barei în poziţia OA' se obţine aplicînd teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\omega = 3\sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu O şi formula coeficientului de restituire:

$$\frac{Gl^2}{3g}3\sqrt{\frac{g}{2l}} = \frac{Gl^2}{3g}\omega' + \frac{G}{2g}v'l; \qquad \frac{1}{2} = \frac{v' - l\omega'}{3l\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$



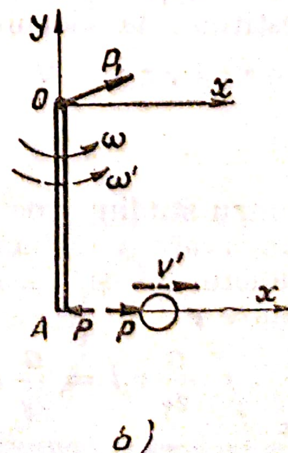


Fig. 19.B.5

Rezultă:

$$\omega' = \frac{3}{10}\sqrt{\frac{g}{2l}}\,; \qquad v' = \frac{9l}{5}\sqrt{\frac{g}{2l}}\,.$$

Aplicînd teorema de variaţie a energiei cinetice pentru mişcarea bilei pe planul orizontal şi pentru mişcarea barei, rezultă:

$$x = \frac{81l}{100\mu}\,; \qquad \theta = \arccos\frac{197}{200}\,.$$

Pentru calculul percuţiei din articulaţie se izolează bara şi corpul (fig. 19.B.5, *b*), aplicîndu-se teorema de variaţie a cantităţii de mişcare:

— pentru bară:

$$\frac{G}{g}\,\frac{l}{2}\,(\omega' - \omega) = \mathfrak{P}_{1x} - \mathfrak{P}\,; \quad 0 = \mathfrak{P}_{1y}.$$

— pentru bilă:

$$\frac{G}{2g}\,v' = \mathfrak{P}.$$

Rezultă:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{1x} = -\frac{9G}{20}\sqrt{\frac{l}{2g}}\,.$$

19.B.6. O rondelă de greutate $\frac{G}{2}$ cade de la înălţimea h pe corpul de greutate G (fig. 19.B.6). Considerînd ciocnirea perfect plastică, să se calculeze valoarea maximă a deformaţiei arcului în urma ciocnirii. Discul este omogen, de greutate G şi rază R.

Rezolvare. Deformaţia iniţială statică a arcului este:

$$x_s = \frac{G}{k}\,.$$

Viteza rondelei la ciocnire:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O:

$$\frac{G}{2g}\sqrt{2gh}\,R = \frac{3G}{2g}\,v'R + \frac{GR^2}{2g}\,\frac{v'}{R}\,.$$

Rezultă viteza după ciocnire a sistemului, dată prin viteza corpurilor în translaţie:

$$v' = \frac{1}{4}\sqrt{2gh}\,.$$

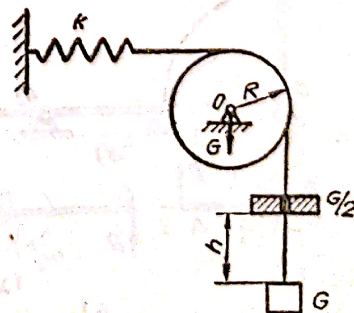


Fig. 19.B.6

Se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice pentru mişcarea sistemului după ciocnire, în final sistemul ajungînd în repaus:

$$E_1 = \frac{1}{2}\,\frac{3G}{2g}\,v'^2 + \frac{1}{2}\,\frac{GR^2}{2g}\left(\frac{v'}{R}\right)^2 = \frac{Gh}{8}\,; \qquad E_2 = 0\,;$$

$$L_{12} = \frac{3G}{2}\,(x_m - x_s) - \int_{x_s}^{x_m} kx\,dx,$$

unde: x este deformaţia absolută a arcului;
x_m — deformaţia maximă.

Efectuînd calculele, rezultă:

$$x_m = \frac{3G + \sqrt{G(G + kh)}}{2k}.$$

19.B.7. O bară omogenă OA de lungime l şi greutate G aflată în repaus, porneşte din poziţie verticală şi ciocneşte cu capătul A capătul B al unei bare omogene BC de lungime $2l$ şi greutate $2G$ articulată în mijloc şi aflată în repaus în poziţie orizontală (fig. 19.B.7, *a*). Să se calculeze vitezele unghiulare după ciocnire ale celor două bare şi percuţiile din articulaţii. Coeficientul de restituire al percuţiei este $e = 2/3$.

R e z o l v a r e. Aplicînd teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bara O_1A, se găseşte viteza ei unghiulară în poziţie orizontală:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Pentru studiul ciocnirii se aplică teorema de variaţie a momentului cinetic pentru fiecare bară în raport cu articulaţia proprie (fig. 19.B.7, *b*). Pentru bara O_1A:

$$\frac{Gl^2}{3g}(\omega_1' - \omega_1) = -\mathfrak{P}l.$$

Pentru bara AB:

$$\frac{2G4l^2}{12g}\omega_2' = \mathfrak{P}l.$$

Coeficientul de restituire la percuţie este:

$$e = \frac{2}{3} = \frac{l\omega_2' - l\omega_1'}{l\omega_1}.$$

Rezolvînd sistemul celor trei ecuaţii pentru ω_1', ω_2' şi $\mathfrak{P}$, se obţine:

$$\omega_1' = -\frac{1}{9}\sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad \omega_2' = \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad \mathfrak{P} = \frac{10G}{27}\sqrt{\frac{3l}{g}}.$$

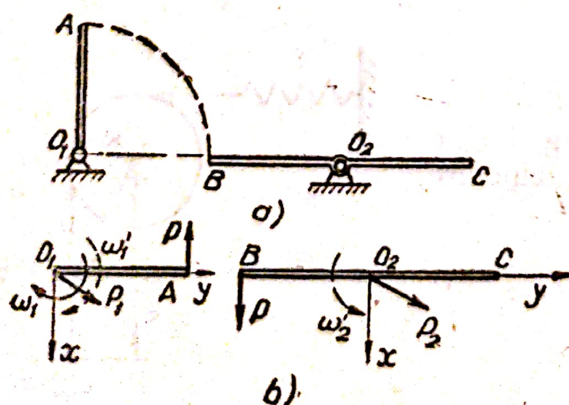


Fig. 19.B.7

Pentru determinarea percuţiilor din articulaţie, se aplică teorema de mişcare a centrului de masă pentru fiecare din cele două bare.
Pentru bara O_1A:

$$\frac{G}{g}\frac{l}{2}(\omega_1' - \omega_1) = \mathfrak{P}_{1x} - \mathfrak{P}; \qquad 0 = \mathfrak{P}_{1y}.$$

Rezultă:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{1x} = -\frac{5G}{27}\sqrt{\frac{3l}{g}},$$

în sens contrar axei O_1x.

Pentru bara BC:

$$0 = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_{2x}; \quad 0 = \mathfrak{L}_{2y}.$$

De aici:

$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_{2x} = -\frac{10Gl}{27g}\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

îndreptată în sens contrar axei O_2x.

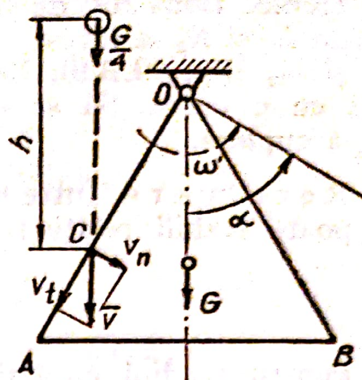


Fig. 19.B.8

19.B.8. O bilă de greutate $\frac{G}{4}$ cade în C pe muchia unei plăci omogene, de forma unui triunghi echilateral de latură l și greutate G (fig. 19.B.8). Să se calculeze distanța h de cădere, pentru ca în urma ciocnirii înclinarea maximă față de verticală a înălțimii care trece prin O a triunghiului să fie $\alpha = 60°$. Coeficientul de restituire la ciocnire este $e = \frac{2}{3}$, iar $OC = 2CA$.

Rezolvare. Viteza bilei în C este $v = \sqrt{2gh}$.

Deoarece ciocnirea este oblică, interesează componenta normală la suprafața de ciocnire:

$$v_n = v\cos 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O și formula coeficientului e pentru componentele normale ale vitezelor în punctele ce se ciocnesc:

$$\frac{G}{4g}v_n\frac{2l}{3} = \frac{G}{4g}v_n'\frac{2l}{3} + J_0\omega'; \quad e = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2l}{3}\omega' - v_n'}{v_n}.$$

Momentul de inerție al plăcii în raport cu vîrful O este

$$J_0 = \frac{5Gl^2}{12g}.$$

Efectuînd înlocuirile și calculînd, rezultă viteza unghiulară a plăcii în urma ciocnirii:

$$\omega' = \frac{5}{19l}\sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice, știind că placa se oprește la înclinarea maximă ($E_2 = 0$);

$$-\frac{1}{2}\frac{5Gl^2}{12g}\omega'^2 = -G\frac{l\sqrt{3}}{3}(1 - \cos\alpha).$$

Efectuînd calculele rezultă:

$$h = 10l.$$

19.B.9. Două roţi de grosimi egale, omogene, din acelaşi material, avînd razele R_1 şi R_2 se rotesc independent în acelaşi sens cu vitezele unghiulare ω_1 şi ω_2 (fig. 19.B.9). La un moment dat se cuplează brusc cele două roţi cu o curea. Să se calculeze vitezele unghiulare ale celor două roţi după cuplare.

R e z o l v a r e. Între momentele de inerţie axiale ale celor două discuri se poate stabili relaţia:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{R_1^4}{R_2^4}.$$

Pentru studiul cuplării se aplică teorema lui Carnot

$$\frac{1}{2} J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2\omega_2^2 - \left(\frac{1}{2} J_1\omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2\omega_2'^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} J_1(\omega_1' - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2(\omega_2 - \omega_2')^2.$$

Între ω_1' şi ω_2' se poate scrie relaţia roţilor cuplate:

$$R_1\omega_1' = R_2\omega_2'.$$

Rezolvînd ecuaţiile de mai sus, se obţine:

$$\omega_1' = \frac{R_1^3\omega_1 + R_2^3\omega_2}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}; \qquad \omega_2' = \frac{R_1^3\omega_1 + R_2^3\omega_2}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

19.B.10. O minge de tenis cade pe sol sub un unghi α faţă de orizontală (fig. 19.B.10). Să se găsească unghiul sub care mingea sare de la sol, dacă înainte de ciocnire mingea are o mişcare de translaţie cu viteza v. Masa mingii este m, raza r, momentul de inerţie în raport cu centrul său este $J = \frac{2}{3} mr^2$, iar coeficientul de restituire este notat cu e.

R e z o l v a r e. Pentru studiul ciocnirii, se vor aplica teoremele de variaţie ale cantităţii de mişcare şi a momentului cinetic în raport cu sistemul de axe ales:

$$m(v_x' - v\cos\alpha) = -\mathfrak{P}_t; \quad mv_y' - (-v\sin\alpha) = \mathfrak{P}_n; \quad \frac{2}{3} mr^2(\omega' - 0) = \mathfrak{P}_t r.$$

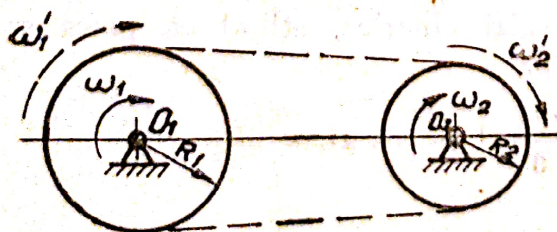


Fig. 19.B.9

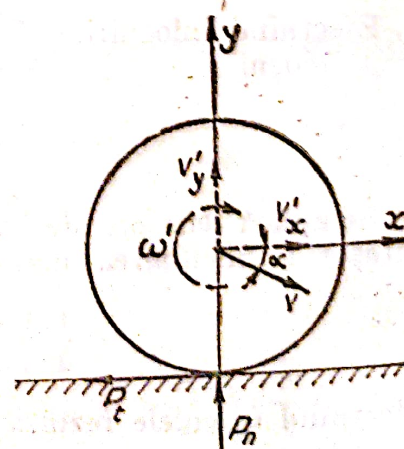


Fig. 19.B.10

Se aplică, de asemenea, formula lui e pentru componentele vitezelor normale la suprafaţa de ciocnire:

$$e = \frac{v'_y}{v \sin \alpha}.$$

Între cele două componente ale percuţiei se stabileşte relaţia

$$\mathfrak{P}_t = \mu \mathfrak{P}_n.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinute, rezultă:

$$v'_x = v[\cos \alpha - \mu \sin \alpha(1 + e)]; \qquad v'_y = ve \sin \alpha;$$

$$\omega' = \frac{3\mu v \sin \alpha(1 + e)}{2r}.$$

Observaţie

Pentru ca după ciocnirea cu solul mingea să sară pe verticală, trebuie ca $v'_x = 0$.
Deci:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{\mu(1 + e)}.$$

Dacă

$$\text{tg}\alpha > \frac{1}{\mu(1 + e)}$$

mingea va sări înapoi ($v'_x < 0$).

19.B.11. Să se determine poziţiile centrelor de percuţie A, pentru plăcile din figura 19.B.11, a, b, mobile în jurul axei xx'.

Rezolvare. Pentru a nu apărea percuţii în axă, trebuie îndeplinite condiţiile:

$$J_{zx} = 0; \qquad y_A = \frac{J_x}{My_c}; \qquad x_A = \frac{J_{xy}}{My_c}.$$

Toate aceste plăci fiind plane, $z = 0$, deci condiţia $J_{zx} = 0$ este îndeplinită.

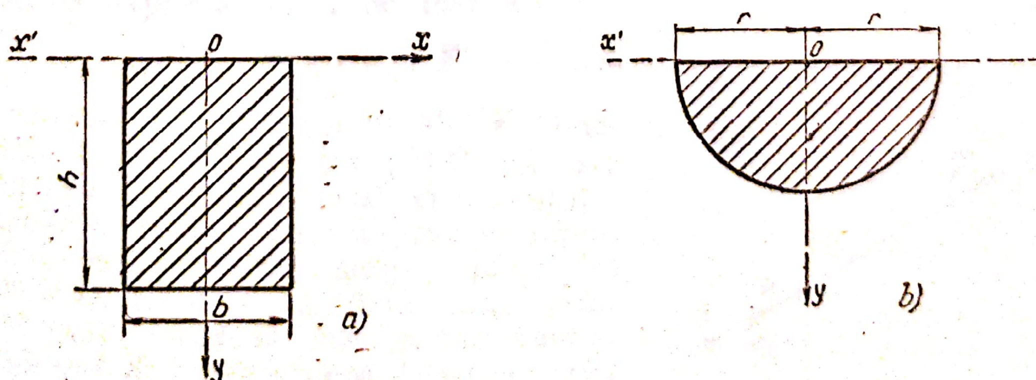


Fig. 19.B.11

Pentru placa din figura 19.B.11, *a*:

$$J_x = \frac{1}{3} M h^2; \qquad J_{xy} = 0; \qquad y_C = \frac{h}{2}$$

(axa Oy este axă de simetrie).

Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{1}{3} M h^2}{M \frac{h}{2}} = \frac{2}{3} h \text{ şi } x_A = 0.$$

Pentru placa din figura 19.B.11, *b*:

$$J_x = \frac{MR^2}{4}; \qquad J_{xy} = 0; \qquad y_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{MR^2}{4}}{M \frac{4R}{3\pi}} = \frac{3}{16} R \text{ şi } x_A = 0.$$

Capitolul 20

PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT. METODA CINETOSTATICĂ

20.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Metoda cinetostatică este utilizată pentru rezolvarea problemelor de dinamică cu mijloacele staticii. Cu această metodă se pot determina atît legile de mişcare, cît şi forţele de legătură dinamice; de asemenea, se poate studia cazul repausului relativ. Metoda cinetostatică se bazează pe principiul lui d'Alembert.

Pentru enunţarea principiului, trebuie scoasă în evidenţă noţiunea de forţă de inerţie (v. şi Cap. 1).

Considerînd un sistem izolat de puncte materiale M şi M', de mase m şi m' în interacţiune (fig. 20.A.1), dacă $\bar{F}$ şi $\bar{F}'$ sînt forţele de interacţiune, se poate exprima principiul III, prin ecuaţia :

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0 \tag{20.1}$$

Forţa $\bar{F}'$ este reacţiunea punctului material M faţă de acţiunea punctului M' care tinde să-i modifice starea mecanică inerţială, şi se numeşte forţă de inerţie. Forţa de inerţie acţionează asupra punctului M', numit agent extern, prin intermediul legăturii.

Mişcarea punctului material M sub acţiunea punctului M' reprezentată prin $\bar{F}$, se studiază cu ajutorul ecuaţiei fundamentale :

$$\bar{F} - m\bar{a} = 0. \tag{20.2}$$

Această ecuaţie se mai poate scrie sub forma :

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0. \tag{20.3}$$

Dar, ştiind că :

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0, \tag{20.4}$$

se obţine expresia forţei de inerţie :

$$\bar{F}' = - m\bar{a}. \tag{20.5}$$

Deoarece forţa $\bar{F}'$ nu se aplică punctului material M, ecuaţia (20.4) nu este o condiţie de echilibru real, ci o condiţie de echilibru fictiv, această ecuaţie reprezentînd sub o formă simplă principiul lui d'Alembert, al cărui enunţ este următorul : *„dacă la toate forţele date şi de legătură $\bar{F}$ aplicate unui punct material de masă m în mişcare, se adaugă şi forţa*

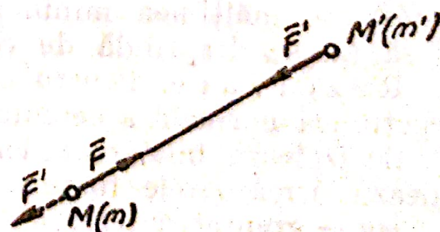


Fig. 20.A.1

de inerție $(-m\bar{a})$, se obține un sistem de forțe în echilibru fictiv sau dinamic".

Pentru un sistem de puncte materiale sau un solid rigid se definește torsorul forțelor de inerție în raport cu un punct fix sau cu centrul de masă, ținînd seama că $m_i\bar{a}_i = \frac{d}{dt}(m_i\bar{v}_i)$:

— forța de inerție rezultantă:

$$\bar{F}_{in} = \sum_{i=1}^{n}(-m_i\bar{a}_i) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = -\frac{d}{dt}m\bar{v}_c = -m\bar{a}_c = -\dot{\bar{H}}, \qquad (20.6)$$

unde m este masa totală a sistemului (solidului rigid);

— momentul rezultant în raport cu punctul fix O al forțelor de inerție, numit și cuplu de inerție:

$$\bar{M}_{0\,in} = \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times (-m_i\bar{a}_i) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i = -\dot{\bar{K}}_0. \qquad (20.7)$$

Condiția de echilibru fictiv se poate aplica și unui sistem material. „Dacă se consideră un sistem de solide rigide în mișcare și se izolează unul din aceste solide, torsorul într-un punct O al forțelor date și de legătură, care acționează asupra solidului, formează împreună cu torsorul forțelor de inerție un sistem în echilibru". Adică:

$$\bar{R} + \bar{R}_{leg} + \bar{F}_{in} = 0; \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_{0\,leg} + \bar{M}_{0\,in} = 0, \qquad (20.8)$$

unde $\bar{R}$ este rezultanta forțelor exterioare date, $\bar{R}_{leg}$ — rezultanta forțelor de legătură exterioare și interioare, $\bar{M}_0$ — momentul rezultant în raport cu punctul O al forțelor exterioare date, iar $\bar{M}_{0\,leg}$ — momentul rezultant în raport cu punctul O al forțelor de legătură exterioare și interioare.

În aplicații, ecuațiile vectoriale de echilibru dinamic (20.8) se proiectează pe un sistem de axe convenabil ales, rezultînd șase ecuații scalare în spațiu, respectiv trei ecuații scalare în plan.

Înlocuind (20.6) și (20.7) în (20.8) se obține:

$$\bar{R} + \bar{R}_{leg} - \dot{\bar{H}} = 0; \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_{0\,leg} - \dot{\bar{K}}_0 = 0. \qquad (20.9)$$

20.B. APLICAȚII LA PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT ȘI METODA CINETOSTATICĂ

20.B.1. O bilă de masă m, asimilată cu un punct material, este lăsată să coboare de la înălțimea h pe planul înclinat AB, după care se angajează în interiorul cercului de rază r. Viteza inițială este zero. Să se determine înălțimea minimă necesară, pentru ca bila ajunsă în punctul C să nu se desprindă de cerc. Frecarea se neglijează (fig. 20.B.1).

Rezolvare. Pentru ca bila să nu se desprindă de cerc, trebuie ca reacțiunea normală a cercului în punctul C să fie orientată spre centrul O.

Se izolează bila, considerînd că se află în punctul C. Asupra ei acționează următoarele forțe:

mg — greutatea bilei;

N — reacțiunea cercului, îndreptată spre centrul O.

Se adaugă forța de inerție $|\bar{F}_i| = m|\bar{a}_n|$, îndreptată în sens invers accelerației normale a_n.
Dar

$$a_n = \frac{v_c^2}{r}.$$

Viteza în punctul C se determină cu teorema de variație a energiei cinetice:

$$v_c = \sqrt{2g(h-2r)}.$$

Înlocuind în expresia forței de inerție, rezultă:

$$F_i = \frac{2g(h-2r)}{r}m.$$

Aplicînd principiul lui d'Alembert și proiectînd ecuația vectorială de echilibru dinamic $\bar{R} + \bar{R}_{leg} + \bar{F}_{in} = 0$ pe normală, rezultă:

$$N + mg - \frac{2g(h-2r)}{r}m = 0,$$

de unde:

$$N = mg\left(\frac{2h}{r} - 5\right).$$

Cum însă $N \geqslant 0$, rezultă $h \geqslant \frac{5r}{2}$.

20.B.2. Un punct material de greutate G se deplasează pe cercul de rază R. Știind că a pornit cu viteza inițială v_0 din poziția M_0, să se studieze mișcarea punctului pe cerc și să se determine expresia reacțiunii normale, funcție de parametrul θ (fig. 20.B.2).

R e z o l v a r e. Pe lîngă forța dată G și de legătură N, se introduce și forța de inerție F_i, care se descompune după tangenta și normala la cerc în M:

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}\begin{cases}|\bar{F}_{it}| = m|\bar{a}_t| = m\dfrac{dv}{dt}\\[2ex]|\bar{F}_{in}| = m|\bar{a}_n| = m\dfrac{v^2}{R}.\end{cases}$$

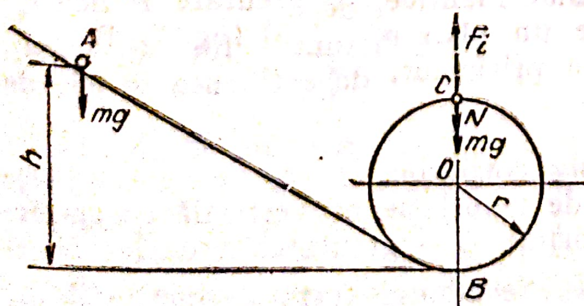


Fig. 20.B.1

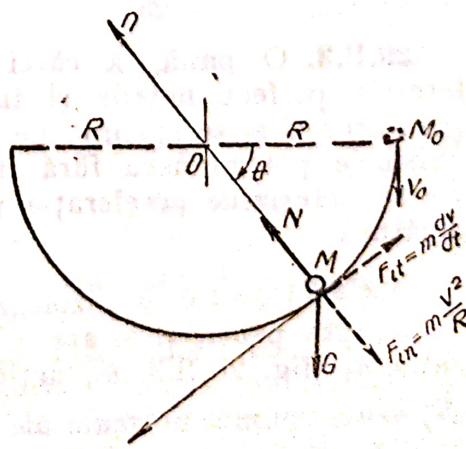


Fig. 20.B.2

Condiţia de echilibru dinamic $(\bar{R} + \bar{R}_{in} + \bar{F}_{in} = 0)$ proiectată pe tangentă şi normală conduce la:

$$G \cos \theta - m \frac{dv}{dt} = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$N - G \sin \theta - m \frac{v^2}{R} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Ecuaţia diferenţială (a) scrisă sub forma

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \theta$$

devine prin înmulţire cu $d\theta$:

$$dv \frac{d\theta}{dt} = g \cos \theta \, d\theta; \quad \text{dar} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R}.$$

Înlocuind şi separînd variabilele, se obţine:

$$\frac{v dv}{R} = g \cos \theta d\theta,$$

iar integrînd, rezultă:

$$\frac{v^2}{2R} = g \sin \theta + C.$$

Constanta C se determină punînd condiţiile iniţiale la $t = 0$:

$$\begin{matrix} \theta = 0 \\ v = v_0 \end{matrix} \rightarrow C = \frac{v_0^2}{2R}$$

Deci:

$$\frac{v^2}{R} = 2g \sin \theta + \frac{v_0^2}{R}, \quad \text{iar} \quad v = \sqrt{2gR \sin \theta + v_0^2}.$$

Introducînd în ecuaţia (b), se obţine:

$$N = G\left(\frac{v_0^2}{gR} + 3 \sin \theta\right).$$

20.B.3. O pană, a cărei secţiune este un triunghi isoscel cu feţele laterale perfect netede şi înclinate cu unghiul α faţă de verticală, are greutatea G şi se sprijină pe două prisme identice, de greutate P fiecare. Prismele pot aluneca fără frecare pe un plan orizontal (fig. 20.B.3, *a*). Să se determine acceleraţia penei şi a prismelor, de asemenea forţele de legătură.

Rezolvare. Se izolează succesiv corpurile.

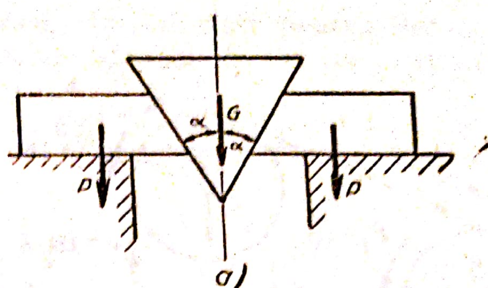
Asupra penei, care are o mişcare de translaţie pe verticală cu acceleraţia a_1 (fig. 20.B.3, *b*), acţionează forţele: G — greutatea proprie; N_1 şi N_1' — reacţiunile normale ale prismelor. Se adaugă forţa de inerţie $\frac{G}{g} a_1$, în sens invers acceleraţiei a_1.

Proiectînd ecuaţia vectorială de echilibru dinamic pe axe, se obţine:

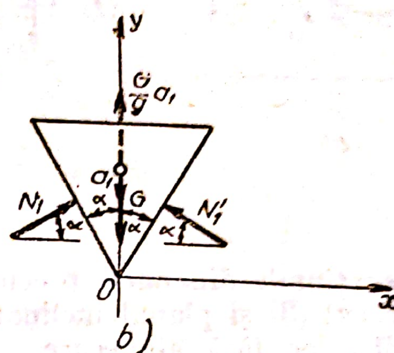
$(\Sigma X_i = 0)$; $N_1 \cos\alpha - N_1' \cos\alpha = 0$

$(\Sigma Y_i = 0)$;

$$\frac{G}{g} a_1 + N_1 \sin\alpha + N_1' \sin\alpha - G = 0.$$



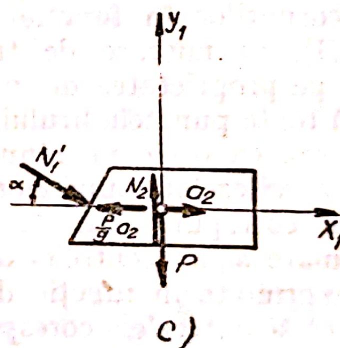
Asupra prismei, care are o mişcare de translaţie de-a lungul planului orizontal cu acceleraţia a_2 (fig. 20.B.3, *c*), acţionează forţele: P — greutatea prismei; N_1 — reacţiunea penei; N_2 — reacţiunea planului orizontal. Se adaugă forţa de inerţie $\frac{P}{g} a_2$, în sens invers acceleraţiei a_2.



Proiectînd condiţia vectorială de echilibru dinamic pe axe, rezultă:

$$(\Sigma X_i = 0);\quad N_1' \cos\alpha - \frac{P}{g} a_2 = 0,$$

$$(\Sigma Y_i = 0);\quad N_2 - P - N_1' \sin\alpha = 0.$$



Datorită simetriei, pentru prisma a doua se vor obţine aceleaşi ecuaţii dar cu semn schimbat.

Ţinînd seama de relaţia cinematică dintre deplasarea pe verticală x_1 a penei şi deplasarea pe orizontală x_2 a prismelor (fig. 20.B.3, *d*), $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\alpha$, şi derivînd de două ori această relaţie, se obţine $a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha$.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii obţinut şi ţinînd seama de relaţia între acceleraţii, rezultă:

$$a_1 = \frac{G}{G + 2P \operatorname{tg}^2\alpha} g;\quad a_2 = \frac{G \operatorname{ctg}\alpha}{2P + G \operatorname{ctg}^2\alpha} g;$$

$$N_1 = N_1' = \frac{PG}{(2P \operatorname{tg}\alpha + G \operatorname{ctg}\alpha)\cos\alpha};$$

$$N_2 = P\left(1 + \frac{G \operatorname{tg}\alpha}{2P \operatorname{tg}\alpha + G \operatorname{ctg}\alpha}\right).$$

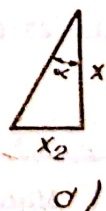


Fig. 20.B.3

20.B.4. Se dă sistemul de corpuri din figura 20.B.4, *a*, unde s-au specificat mărimile geometrice şi mecanice cunoscute: P — greutatea corpului (1), Q şi R — greutăţile şi, respectiv, razele discurilor (2) şi (3), α — unghiul dintre planul înclinat şi orizontală. Sistemul este iniţial în repaus. Să se determine acceleraţiile liniare a_{ci} ale centrelor de masă ale corpurilor, acceleraţiile unghiulare ε_i ale corpurilor, tensiunile în fire,

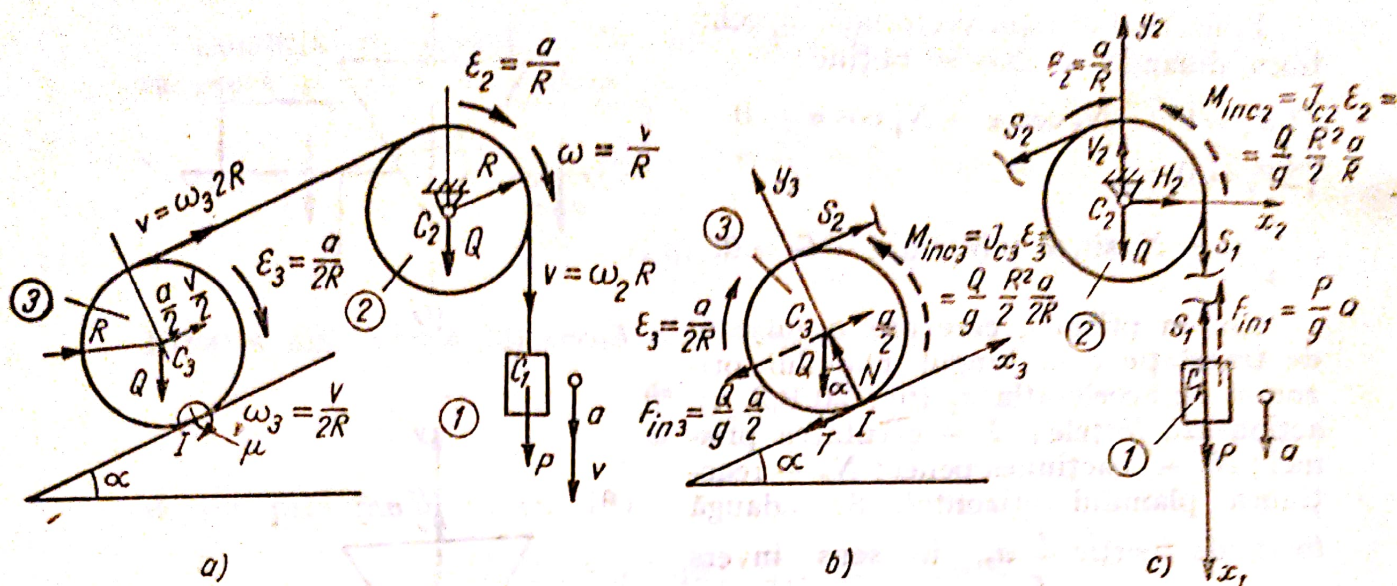


Fig. 20.B.4

reacţiunile dinamice, precum şi coeficientul μ de frecare la alunecare între discul (3) şi planul înclinat, necesar pentru ca rostogolirea discului (3) să aibă loc fără alunecare.

R e z o l v a r e. Se face analiza cinematică a sistemului de corpuri, exprimînd vitezele liniare v_{ci} ale centrelor de masă şi vitezele unghiulare ω_i ale corpurilor în funcţie de viteza $v_{c1} = v$ a centrului C_1 a corpului motor (1), în mişcare de translaţie (fig. 20.B.4, *a*). Această analiză se bazează pe proprietatea de inextensibilitate a firului, care conduce la concluzia că toate punctele firului au viteze egale în modul. Considerăm valabilă ipoteza că firele nu alunecă în raport cu discurile ceea ce conduce la egalitatea vitezelor punctelor situate pe periferia unui disc cu vitezele punctelor corespunzătoare ale firului care se reazemă pe acesta. Acceleraţiile liniare a_{ci} ale centrelor de masă ale corpurilor şi acceleraţiile unghiulare ε_i exprimate în funcţie de $a_{c1} = a$ se obţin prin derivarea în raport cu timpul a vitezelor corespunzătoare:

$$a_{ci} = \frac{dv_{ci}}{dt}; \quad \varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt}.$$

Pentru sistematizare, rezultatele analizei cinematice sînt prezentate în tabelul 20.1.

Tabelul 20.1

Nr. corp.	Mişcare	Viteze		Acceleraţii	
		v_{ci}	ω_i	a_{ci}	ε_i
1	**Translaţie**	v	0	a	0
2	**Rotaţie**	0	$\frac{v}{R}$	0	$\frac{a}{R}$
3	**Plan-paralelă**	$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{2R}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2R}$

Se izolează succesiv corpurile din sistem, introducînd pentru fiecare forțele date, de legătură, precum și torsorul forțelor de inerție calculat în raport cu centrul de masă C_i (fig. 20.B.4, *b*, *c*, *d*).

Se scriu, pentru fiecare corp, ecuațiile scalare de echilibru dinamic, obținute prin proiecția ecuațiilor vectoriale (20.4) pe axele alese (fig. 20.B.4, *b*, *c*, *d*).

Corpul (1): $(\Sigma X_i = 0)$; $P - S_1 - \frac{P}{g} a = 0.$

Corpul (2): $(\Sigma X_i = 0)$; $H_2 - S_2 \cos\alpha = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $V_2 - Q - S_1 - S_2 \sin\alpha = 0$;

$(\Sigma M_{c2} = 0)$; $S_2R - S_1R + \frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}\frac{a}{R} = 0.$

Corpul (3): $(\Sigma X_i = 0)$; $S_2 - Q\sin\alpha - T - \frac{Q}{g}\frac{a}{2} = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $N - Q\cos\alpha = 0$;

$(\Sigma M_{c3} = 0)$; $\frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}\frac{a}{2R} - S_2R - TR = 0.$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă pentru necunoscutele căutate:

$$a = \frac{4(2P - Q\sin\alpha)}{8P + 7Q} g \text{ și, respectiv,}$$

$$a_{c1} = a = \frac{4(2P - Q\sin\alpha)}{8P + 7Q} g; \quad \varepsilon_1 = 0;$$

$$a_{c2} = 0; \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{R} = \frac{4(2P - Q\sin\alpha)}{(8P + 7Q)R} g;$$

$$a_{c3} = \frac{a}{2} = \frac{2(2P - Q\sin\alpha)}{8P + 7Q} g; \quad \varepsilon_3 = \frac{a}{2R} = \frac{2(2P - Q\sin\alpha)}{(8P + 7Q)R} g;$$

$$S_1 = \frac{PQ(7 + 4\sin\alpha)}{8P + 7Q};$$

$$S_2 = \frac{Q(3P + 4P\sin\alpha + 2Q\sin\alpha)}{8P + 7Q};$$

$$V_2 = \frac{Q^2(7 + 2\sin^2\alpha) + PQ(15 + 7\sin\alpha + 4\sin^2\alpha)}{8P + 7Q};$$

$$H_2 = \frac{Q(3P + 4P\sin\alpha + 2Q\sin\alpha)\cos\alpha}{8P + 7Q};$$

$$N = Q\cos\alpha, \quad T = -\frac{Q(P + P\sin\alpha + 3Q\sin\alpha)}{8P + 7Q}.$$

Semnul minus al forței de frecare arată că sensul real al acesteia este invers decît cel presupus inițial în figura 20.B.4, *a*, discul avînd tendința de a aluneca în jos pe planul înclinat.

Pentru ca rostogolirea să se producă fără alunecare este necesar ca:

$$|\bar{T}| \leqslant \mu |\bar{N}|,$$

deci:

$$\frac{Q(P + P \sin\alpha + 3Q \sin\alpha)}{8P + 7Q} \leqslant \mu\, Q \cos\alpha,$$

de unde:

$$\mu \geqslant \frac{P(1 + \sin\alpha) + 3Q \sin\alpha}{(8P + 7Q)\cos\alpha}.$$

20.B.5. Un corp (1) de greutate P coboară pe verticală, antrenînd prin intermediul unui fir petrecut peste scripetele (3), de masă neglijabilă, un troliu (2), de greutate Q şi moment de inerţie J_c dat. Firul este înfăşurat la raza R a troliului care se reazemă la raza r pe o şină fixă (fig. 20.B.5, *a*). Sistemul este iniţial în repaus. Să se determine acceleraţia corpului (1), tensiunea în fir şi coeficientul de frecare la alunecare μ dintre şină şi troliu, necesar pentru ca rostogolirea să se producă fără alunecare.

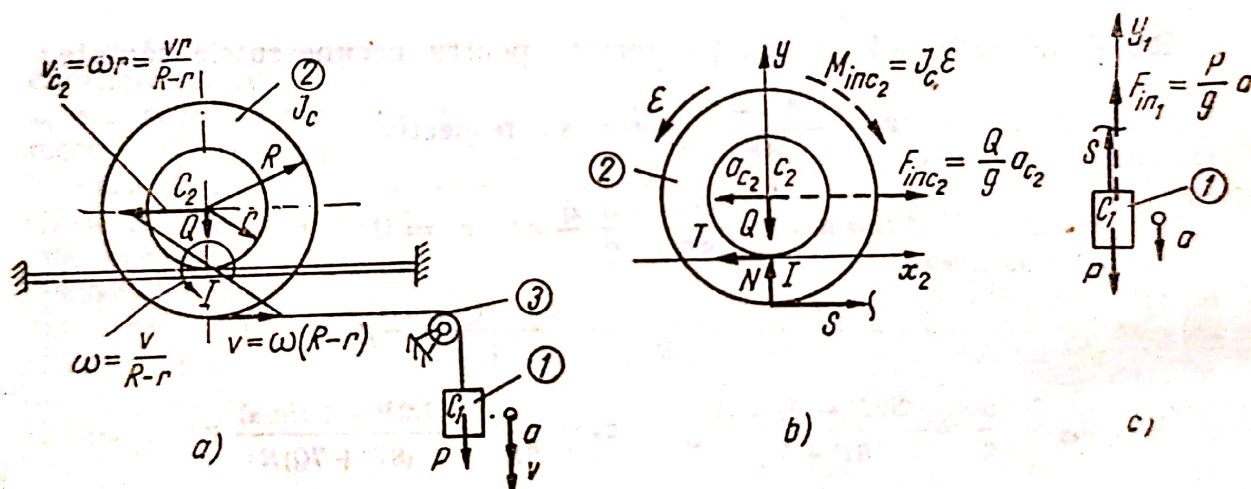


Fig. 20.B.5

R e z o l v a r e. Se face analiza cinematică a sistemului de corpuri, ştiind că troliul (2) are o mişcare plan-paralelă cu centrul instantaneu de rotaţie în punctul I (tabelul 20.2).

Tabelul 20.2

Nr. corp	Mişcare	Viteze		Acceleraţii	
		v_{ci}	ω_i	a_{ci}	ε_i
1	Translaţie	v	0	a	0
2	Plan-paralelă	$\frac{vr}{R-r}$	$\frac{v}{R-r}$	$\frac{ar}{R-r}$	$\frac{a}{R-r}$

Se izolează corpurile din sistem, introducînd forțele date, de legătură, forțele și cuplul de inerție (fig. 20.B.3, *b*, *c*).

Se scriu, pentru fiecare corp, ecuațiile scalare de echilibru dinamic:

Corpul (1): $(\Sigma Y_i = 0)$; $S + \frac{P}{g} a - P = 0.$

Corpul (2): $(\Sigma X_i = 0$; $S + \frac{Q}{g} \frac{ar}{R - r} - T = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0$; $N - Q = 0$;

$(\Sigma M_I = 0)$; $S(R - r) - \frac{Q}{g} \frac{ar}{R - r} r - J_c \frac{a}{R - r} = 0.$

Pentru ca troliul (2) să nu alunece, trebuie satisfăcută inegalitatea $|\bar{T}| < \mu |\bar{N}|$.

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă:

$$a = \frac{P(R^2 - r^2)g}{P(R - r)^2 + Qr^2 + J_c g}; \qquad S = \frac{P(Qr^2 + J_c g)}{P(R - r)^2 + Qr^2 + J_c g}; \; N = Q;$$

$$T = \frac{P(QRr + J_c g)}{P(R - r)^2 + Qr^2 + J_c g}; \qquad \mu > \frac{P}{Q} \frac{QRr + J_c g}{P(R - r)^2 + Qr^2 + J_c g}.$$

20.B.6. O bară *OA* de lungime *l* și greutate *G* articulată în *O* este menținută în poziție orizontală cu ajutorul firului *AA'* (fig. 20.B.6). Se cere să se calculeze legea de mișcare și reacțiunile din articulația *O* pentru momentul în care se taie firul ($t = 0$), precum și pentru momentul cînd bara trece prin poziția verticală.

Rezolvare. Se aplică principiul lui d'Alembert efectuînd reducerea forțelor de inerție în punctul fix *O*. În acest caz, torsorul forțelor de inerție este:

$$F_{in} \begin{cases} |\bar{F}|_{inv} = m a_{cv} = \dfrac{Gl}{2g} \omega^2; \\ |\bar{F}_{in\tau}| = m a_{c\tau} = \dfrac{Gl}{3g} \varepsilon. \end{cases}$$

$$M_{ino} = J_0 \varepsilon = \frac{Gl^2}{3g} \varepsilon.$$

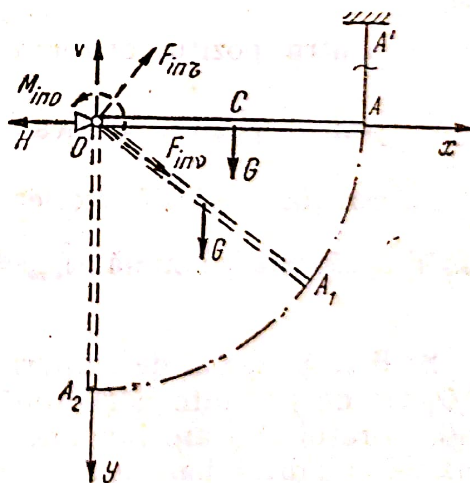


Fig. 20.B.6

Se face observația că reducerea forțelor de inerție se poate efectua și în raport cu centrul maselor *C*, caz în care se schimbă valoarea cuplului de inerție $M_{inc} = J_c \varepsilon = \frac{Gl^2}{12g} \varepsilon.$

Proiectînd pe axe ecuația de echilibru dinamic pentru o poziție oarecare a barei față de orizontală (θ), rezultă:

$(\Sigma X_i = 0)$; $\qquad - H + F_{inv} \cos \theta + F_{in\tau} \sin \theta = 0$;

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\qquad - V + F_{inv} \sin \theta - F_{in\tau} \cos \theta + G = 0$;

$(\Sigma M_0 = 0)$; $\qquad \frac{Gl^2}{3g} \varepsilon - G \frac{l}{2} \cos \theta = 0,$

de unde se deduce:

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta.$$

Înmulţind ambii membri cu $\dot{\theta}$ şi integrînd, se obţine:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{3g}{2l} \sin \theta + C.$$

Condiţiile iniţiale fiind $t = 0: \theta = 0;\ \dot{\theta} = 0$, rezultă $C = 0$, deci legea de mişcare este:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \theta.$$

Expresiile reacţiunilor, pentru o poziţie oarecare, sînt:

$$H = F_{inv} \cos \theta + F_{in\tau} \sin \theta = \frac{Gl}{2g} (\omega^2 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta) = \frac{9}{8} G \sin 2\theta;$$

$$V = G + F_{inv} \sin \theta - F_{in\tau} \cos \theta = G + \frac{Gl}{2g} (\omega^2 \sin \theta - \varepsilon \cos \theta) =$$

$$= G - \frac{3G}{4} (\cos 2\theta - \sin^2 \theta).$$

Din aceste expresii se obţin, prin particularizare, valorile reacţiunilor:

— pentru poziţia orizontală $(\theta = 0)$: $H = 0;\ V = \frac{G}{4}$;

— pentru poziţia verticală $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$: $H = 0;\ V = \frac{5G}{2}$.

În poziţia verticală acceleraţia unghiulară este $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, deci viteza unghiulară este maximă $\omega_{max} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

20.B.7. Sistemul de corpuri din figura 20.B.7, *a* este format din cadrul O_1O_2AB de greutate neglijabilă, care se poate roti în jurul axei verticale O_1O_2. Braţul AB are lungimea a. În punctul B este fixată printr-o articulaţie cilindrică bara BD de greutate G şi lungimea l, situată în acelaşi plan cu axa O_1O_2. La extremitatea D a barei este ataşat un punct material de greutate Q. Să se determine viteza unghiulară ω a cadrului, necesară pentru ca bara să facă în poziţia de echilibru relativ unghiul α dat cu verticala.

R e z o l v a r e. Se izolează bara introducînd forţele date şi de legătură (fig. 20.B.7, *b*). Se adaugă forţa de inerţie a barei şi forţa de inerţie a punctului material Q.

Forţa de inerţie a barei are expresia:

$$F_{in} = ma_c = \frac{G}{g} \omega^2 \left(a + \frac{l}{2} \sin \alpha\right).$$

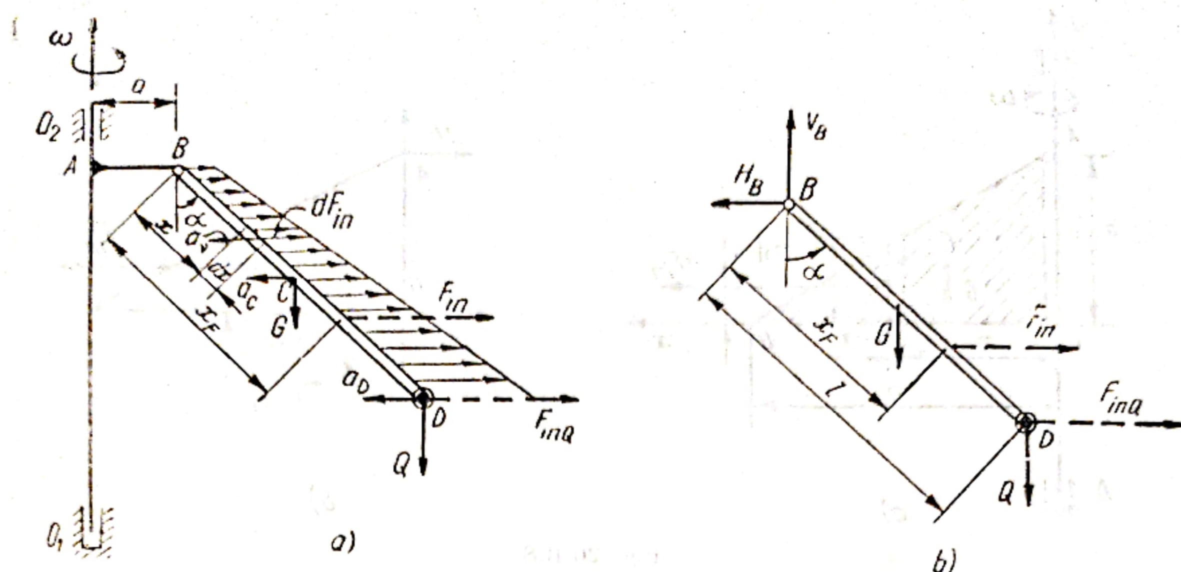


Fig. 20.B.7

Suportul forței de inerție a barei se determină aplicînd teorema momentelor (forțe paralele, care variază liniar):

$$x_F = \frac{\int_0^l x\,\mathrm{d}F_{in}}{\int_0^l \mathrm{d}F_{in}},$$

unde forța elementară de inerție are expresia:

$$\mathrm{d}F_{in} = \mathrm{d}m \cdot a_v = \frac{G}{lg}\,\mathrm{d}x\omega^2(a + x\sin\alpha).$$

Înlocuind și integrînd, rezultă:

$$x_F = \frac{(3a + 2l\sin\alpha)}{3(2a + l\sin\alpha)}.$$

Forța de inerție a punctului material Q este:

$$F_{inQ} = \frac{Q}{g}a_D = \frac{Q}{g}\omega^2(a + l\sin\alpha).$$

Se scrie ecuația de echilibru dinamic:

$$(\Sigma M_B = 0); \quad -G\frac{l}{2}\sin\alpha + F_{in}x_F\cos\alpha - Ql\sin\alpha + F_{inQ}\,l\cos\alpha = 0.$$

Înlocuind și făcînd calculele, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(G + 2Q)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3a(G + 2Q) + 2l(G + 3Q)\sin\alpha}}.$$

20.B.8. O placă omogenă, de greutate G, avînd forma unui triunghi dreptunghic OAB cu catetele b și h, este articulată în A și simplu rezemată în O, legături situate pe axa de rotație DE, în jurul căreia placa

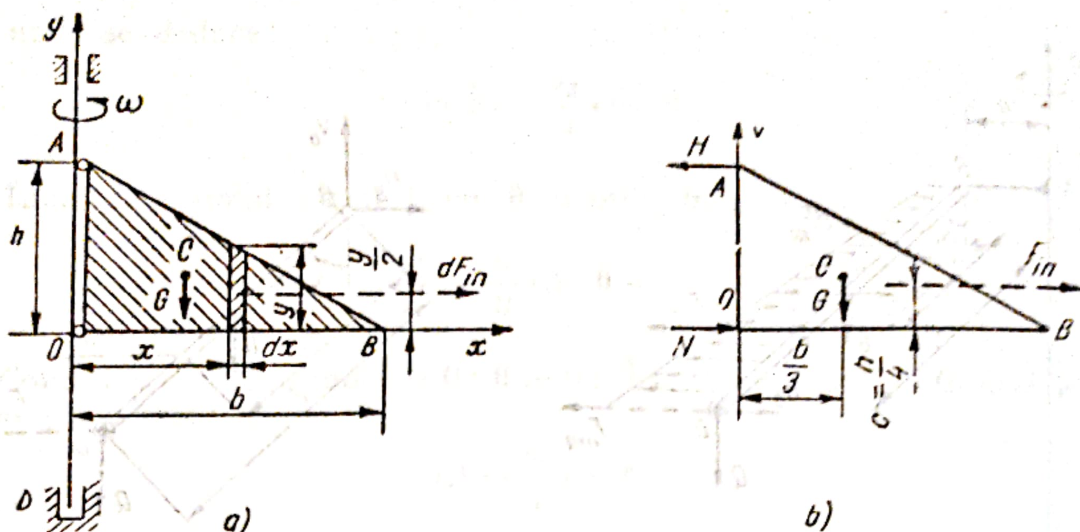


Fig. 20.B.8

se rotește cu $\omega =$ const. (fig. 20.B.8, *a*). Se cere să se calculeze reacțiunile și valoarea vitezei unghiulare ω pentru care încetează contactul în O.

R e z o l v a r e. Forța de inerție are expresia:

$$F_{in} = ma_e = mr_e\omega^2 = \frac{G}{g}\frac{b}{3}\omega^2. \tag{a}$$

Pentru determinarea suportului forței de inerție se aplică teorema momentelor în raport cu O (fig. 20.B.8, *b*):

$$cF_{in} = \int_{(D)} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}F_{in}, \tag{b}$$

unde forța de inerție elementară este:

$$\mathrm{d}F_{in} = x\omega^2\mathrm{d}m = x\omega^2\rho\mathrm{d}A = x\omega^2\frac{2G}{gbh}y\mathrm{d}x, \tag{c}$$

iar masa unității de suprafață este $\rho = \dfrac{m}{A} = \dfrac{G}{g}\cdot\dfrac{2}{bh}\cdot$

Ecuația dreptei AB este:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 = 0,$$

de unde:

$$y = \frac{h}{b}(b - x),$$

care introdus în relația (c) conduce la:

$$\mathrm{d}F_{in} = \frac{2G}{gb^2}\omega^2 x(h - x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrala din relația (b) devine:

$$\int_{(D)} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}F_{in} = \frac{Gh}{gb^3}\omega^2\int_0^b x(b - x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{G\omega^2 bh}{12g} \tag{d}$$

Din relaţiile (a), (b) şi (d) se deduce:

$$c = \frac{\int_0^h \frac{y}{2} \mathrm{d}F_{in}}{F_{in}} = \frac{h}{4}.$$

Izolînd placa (fig. 20.B.10, *b*) se scriu ecuaţiile de echilibru dinamic:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad F_{in} + N - H = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - G = 0;$$

$$(\Sigma M_0 = 0); \quad hN + \frac{3}{4} hF_{in} - \frac{b}{3} G = 0.$$

Rezultă expresiile reacţiunilor:

$$N = G\left(\frac{b}{3h} - \frac{b\omega^2}{4g}\right); \quad H = G\left(\frac{b}{3h} - \frac{b\omega^2}{12g}\right); \quad V = G.$$

Contactul din O încetează cînd $N = 0$, de unde se obţine viteza unghiulară corespunzătoare:

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3h}}.$$

Capitolul 21

PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

21.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Principiul deplasărilor virtuale sau al lucrului mecanic virtual se aplică sistemelor materiale în echilibru static sau dinamic cu legături ideale.

21.A.1. Legături şi deplasări

Un punct material poate avea pe o suprafaţă o legătură scleronomă, dacă suprafaţa este fixă. O astfel de legătură se exprimă prin:

$$f(x,\ y,\ z) = 0. \tag{21.1}$$

În cazul în care suprafaţa se deplasează sau se deformează în timp, legătura este reonomă şi se exprimă prin:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = 0. \tag{21.2}$$

La o legătură scleronomă o deplasare $d\bar{r}$ a punctului, compatibilă cu legătura, are loc numai în planul tangent. Una dintre aceste deplasări este cea reală, produsă de sistemul de forţe dat; oricare altă deplasare din planul tangent este o deplasare posibilă şi s-ar putea produce sub acţiunea unui alt sistem de forţe.

În cazul legăturii reonome deplasările reală şi cele posibile nu mai au loc în planul tangent, deoarece atît suprafaţa cît şi planul tangent ocupă o altă poziţie faţă de cea ocupată în momentul anterior.

Pot fi imaginate şi la aceste legături nişte deplasări compatibile cu legăturile, astfel încît să fie situate în planul tangent. Pentru aceasta, se consideră suprafaţa ca fiind fixă la un moment dat t. Astfel de deplasări nu sînt nici reale, nici posibile. Ele se numesc deplasări virtuale şi se notează $\delta\bar{r}(\delta x,\ \delta y,\ \delta z)$.

Pentru generalizare, se adoptă aceeaşi notaţie şi pentru legăturile scleronome. O deplasare posibilă, compatibilă cu legăturile, se exprimă la legătura scleronomă prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0, \tag{21.3}$$

iar la legătura reonomă prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = 0. \tag{21.4}$$

În cazul deplasării virtuale suprafeţele sînt considerate la un moment dat, deci pentru ambele tipuri de legături se poate scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0. \tag{21.5}$$

Simbolul δ nu operează asupra lui t.

21.A.2. Lucrul mecanic virtual

Deoarece deplasarea virtuală are loc în planul tangent la suprafaţă, se poate scrie:

$$\bar{N}\delta\bar{r} = 0. \tag{21.6}$$

Relaţia exprimă pe de altă parte faptul că lucrul mecanic elementar virtual al reacţiunii normale este nul.

Dacă punctul material este în echilibru sub acţiunea rezultantei forţelor active $\bar{F}$ şi a reacţiunii normale $\bar{N}$, adică:

$$\bar{F} + \bar{N} = 0,$$

înmulţind scalar cu $\delta\bar{r}$ şi ţinînd seama de (21.6), rezultă:

$$\bar{F} \cdot \delta\bar{r} = 0. \tag{21.7}$$

Extinzînd la un număr dat de puncte materiale, se obţine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta\bar{r}_i = 0. \tag{21.8}$$

Aceasta este expresia matematică a principiului deplasărilor virtuale sau al lucrului mecanic virtual.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale supus la legături ideale să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al forţelor efectiv aplicate să fie nul.

Pentru aplicaţiile practice, expresia (21.8) se poate utiliza sub formă analitică (21.9) sau geometrică (21.10):

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \tag{21.9}$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \tag{21.10}$$

Dacă punctul este în mişcare: $\bar{F} + \bar{N} = m\bar{a}$,
sau:

$$\bar{F} + \bar{N} - m\bar{a} = 0, \tag{21.11}$$

care reprezintă condiţia de echilibru dinamic.

Înmulţind scalar cu $\delta\bar{r}$, rezultă:

$$(\bar{F} - m\bar{a})\, \delta\bar{r} = 0. \tag{21.12}$$

Pentru un sistem de puncte materiale,

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i - m_i\bar{a}_i)\, \delta\bar{r}_i = 0. \tag{21.13}$$

Aceasta este expresia principiului lucrului mecanic virtual aplicat în dinamică.

Lucrul mecanic virtual produs de forţele active şi de inerţie ale unui sistem de forţe în echilibru dinamic, pentru deplasări compatibile cu legăturile, este nul.

Dacă sistemul material are un număr p de grade de libertate, el depinde de un număr p de parametri independenţi, denumiţi coordonate generalizate q_k.

O legătură scleronomă se exprimă prin:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_k); \quad k = 1, 2 \ldots p, \tag{21.14}$$

iar o legătură reonomă prin:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_k, t); \quad k = 1, 2 \ldots p. \tag{21.15}$$

Pentru ambele legături

$$\delta\bar{r}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{21.16}$$

Introducînd (21.16) în (21.8), rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = 0. \tag{21.17}$$

Relaţia (21.17) este identică cu (21.18):

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \tag{21.18}$$

Deoarece parametrii q_k sînt independenţi, expresia (21.18) trebuie să fie identic nulă, deci se obţin p ecuaţii de tipul:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0. \tag{21.19}$$

Expresia (21.19) poartă numele de forţă generalizată (notată Q_k) şi are dimensiunea unei forţe dacă coordonata corespunzătoare este o distanţă şi dimensiunea unui moment, dacă coordonata este un unghi. Deci, se poate scrie:

$$Q_k = 0. \tag{21.19'}$$

21.A.3. Principiul lui Toricelli

În cazul cînd sistemul în echilibru static este acţionat numai de greutăţile punctelor sau corpurilor care compun sistemul, se poate scrie:

$$\bar{F}_i = \bar{G}_i = -G_i\bar{k}.$$

Expresia (21.8) a principiului lucrului mecanic virtual se scrie

$$-\sum_{i=1}^{n} G_i \delta z_i = 0. \tag{21.20}$$

Aplicînd teorema momentelor statice,

$$\delta\left(z_G \sum_{k=1}^{n} G_i\right) = 0. \tag{21.21}$$

Rezultă, de aici:

$$\delta z_c = 0. \tag{21.22}$$

Aceasta înseamnă că un sistem de corpuri materiale este în echilibru dacă centrul său de greutate ocupă o poziţie de maxim, minim sau la cotă constantă. Cele trei poziţii corespund în ordine situaţiilor de echilibru stabil, instabil sau indiferent.

21.A.4. Viteze virtuale

Asociind deplasarea virtuală cu un timp arbitrar în care ea s-ar putea produce, se poate defini o aşa-numită viteză virtuală:

$$\bar{v} = \frac{\delta \bar{r}}{dt}.$$

Astfel, derivata expresiei (21.8) devine:

$$\delta P = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \bar{v}_i = 0. \tag{21.23}$$

Expresia (21.23) poartă numele de metoda vitezelor virtuale sau puterilor virtuale care este foarte potrivită pentru rezolvarea sistemelor de bare articulate în echilibru (grinzi cu zăbrele etc.).

21.B. APLICAŢII LA PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

21.B.1. Două inele P şi Q, legate între ele printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil de lungime l, pot aluneca fără frecare pe un cerc de sîrmă, situat într-un plan vertical. Cunoscînd raza r a cercului, să se determine valorile unghiurilor θ_1 şi θ_2 pentru poziţia de echilibru (fig. 21.B.1).

Rezolvare. Principiul deplasărilor virtuale:

$$\delta L = \Sigma \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0,$$

aplicat pe direcţia tangentei, pentru o deplasare δs, conduce la:

$$\delta L = P \sin \theta_1 \delta s - Q \sin \theta_2 \delta s = 0.$$

Cum $\delta s \neq 0$, rezultă că:

$$P \sin \theta_1 - Q \sin \theta_2 = 0.$$

Adăugînd relaţia geometrică $l = r\theta_1 + r\theta_2$,

se obţine

$$\operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{P + Q \cos\left(\frac{l}{r}\right)}{Q \sin\left(\frac{l}{r}\right)}; \quad \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{P \cos\left(\frac{l}{r}\right) + Q}{P \sin\left(\frac{l}{r}\right)}.$$

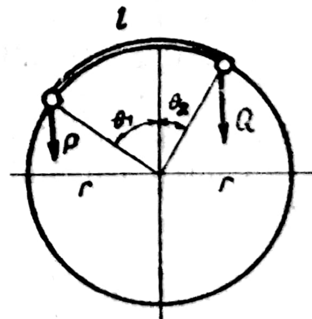


Fig. 21.B.1

21.B.2. Două greutăţi P şi Q sînt legate de capetele unui fir trecut peste scripetele fix O, astfel încît greutatea P cade după verticală, iar greu-

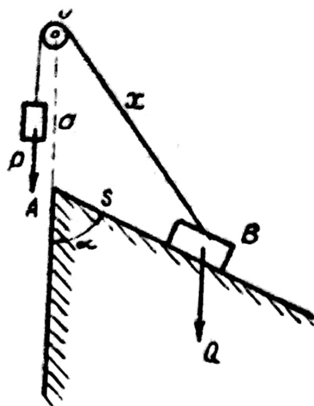


Fig. 21.B.2

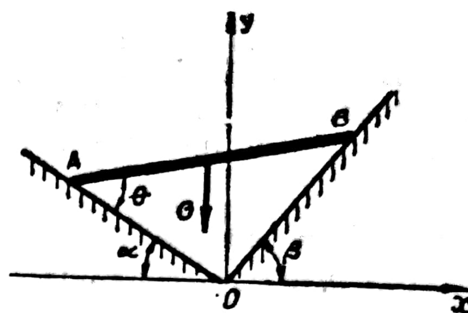


Fig. 21.B.3

tatea Q alunecă pe un plan înclinat (fără frecare). Cunoscînd distanța $OA = a$ și unghiul α, să se determine distanța $AB = s$ pentru poziția de echilibru (fig. 21.B.2).

Rezolvare. Principiul deplasărilor virtuale aplicat pe direcția mișcării conduce la relația:

$$Q \cos \alpha \cdot \delta s - P \delta x = 0.$$

Legătura între x și s se obține din triunghiul OAB:

$$x^2 = a^2 + s^2 + 2as \cos \alpha.$$

Se diferențiază:

$$2x\delta x = 2s\, \delta s + 2a \cos \alpha\, \delta s,$$

de unde:

$$\delta x = \frac{(s + a \cos \alpha)}{x} \delta s.$$

Deci:

$$P(s + a \cos \alpha) = Q \cos \alpha \cdot x,$$

adică:

$$P(s + a \cos \alpha) = Q \cos \alpha \sqrt{a^2 + s^2 + 2as \cos \alpha}.$$

Din rezolvarea în raport cu s, rezultă ecuația:

$$s^2 + 2a \cos \alpha \cdot s - \frac{(Q^2 - P^2)\, a^2 \cos^2 \alpha}{P^2 - Q^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

21.B.3. Să se găsească poziția de echilibru a barei de lungime l și greutate G, rezemată fără frecare pe două plane, înclinate cu unghiurile α și β (fig. 21.B.3).

Rezolvare. Se aplică principiul lui Toricelli sub forma $\delta y_c = 0$. Poziția de echilibru va fi dată de unghiul θ.

Pentru calculul lui y_c se găsește OB:

$$\frac{l}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{OB}{\sin \theta};$$

$$y_c = OB \sin \beta - \frac{l}{2} \sin(\theta - \alpha).$$

De aici:

$$\delta y_c = \frac{l \cos \theta \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \delta\theta - \frac{l}{2} \cos(\theta - \alpha) \delta\theta = 0.$$

Rezolvînd, se obține:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}.$$

21.B.4. Să se găsească poziția de echilibru pentru bara OA din figura 21.B.4. Se cunosc greutatea G a barei, greutatea P care acționează printr-un fir asupra capătului barei și lungimile $OA = OB = l$.

Rezolvare. Se alege unghiul θ pentru stabilirea poziției de echilibru. Se aplică principiul deplasărilor virtuale și se dă barei OA o deplasare infinitezimală $\delta\theta$.

Dacă se notează cu L lungimea firului, deplasarea greutății P este:

$$\delta s = L - 2l \sin \frac{\theta}{2} - \left[L - 2l \sin \frac{\theta + \delta\theta}{2}\right].$$

Dezvoltînd și considerînd $\delta\theta$ mic, rezultă:

$$\delta s = l\, \delta\theta \cos \frac{\theta}{2}.$$

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L = G \frac{l}{2} \delta\theta \sin \theta - Pl\, \delta\theta \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

Deoarece deplasarea virtuală este diferită de zero, rezultă:

$$G \sin \theta - 2P \cos \frac{\theta}{2} = 0,$$

cu soluțiile:

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0; \qquad \theta = \pi;$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{P}{G}; \qquad \theta = 2 \arcsin \frac{P}{G}.$$

21.B.5. Un hexagon $ABCDEF$ este format din bare articulate de lungime și greutate neglijabilă și are bara AB fixată. Sistemul se găsește în echilibru într-un plan vertical sub acțiunea forței P verticale, care acționează la jumătatea laturii DE și a tensiunii dezvoltate în arcul FC. Lungimea liberă a arcului este l, iar constanta sa elastică este k. Să se calculeze poziția de echilibru a hexagonului și forța dezvoltată în arc (fig. 21.B.5).

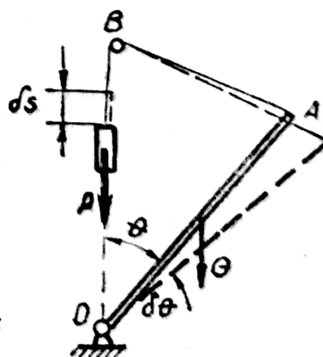


Fig. 21.B.4

Rezolvare. Poziția de echilibru este dată de unghiul θ. Pentru a pune în evidență forța din arc, se înlocuiește efectul arcului cu forțele S. Se aplică

principiul lucrului mecanic virtual pentru forțele active P și S:

$$\delta L = -P\delta y_H + S\delta x_F - S\delta x_C = 0.$$

$$y_H = 2l \sin\theta; \qquad \delta y_H = 2l\cos\theta\,\delta\theta;$$

$$x_F = -l\cos\theta; \qquad \delta x_F = l\sin\theta\,\delta\theta;$$

$$x_C = l(1+\cos\theta); \qquad \delta x_C = -l\sin\theta\delta\theta.$$

Înlocuind în ecuația lucrului mecanic virtual se obține:

$$-2Pl\cos\theta\delta\theta + 2Sl\sin\theta\delta\theta = 0.$$

Deoarece alungirea arcului este:

$$\Delta l = 2l\cos\theta,$$

rezultă:

$$S = 2kl\cos\theta.$$

Introducînd valoarea lui S, se obține:

— o soluție particulară corespunzătoare unei situații de echilibru nestabil:

$$\cos\theta = 0; \qquad \theta = \pi/2; \qquad S = 0;$$

— o soluție generală depinzînd de sistemul de forțe aplicat:

$$\sin\theta = \frac{P}{2kl}; \qquad S = \sqrt{4k^2l^2 - P^2}.$$

Pentru valabilitatea soluțiilor trebuie ca $P < 2kl$.

Dacă $P = 2kl$, se obține soluția particulară găsită anterior. Dacă $P > 2kl$, arcul va lucra ca un fir; poziția de echilibru depinde de lungimea firului. Forța din arc nu va mai fi o forță activă, ci o tensiune pasivă, a cărei valoare este funcție de poziția de echilibru a sistemului.

21.B.6. Să se găsească poziția de echilibru a sistemului celor două bare articulate din figura 21.B.6. Se dau $OA = l$, $AB = 2l$, greutățile barelor G, Q, iar P, forța orizontală din capătul B al barei AB.

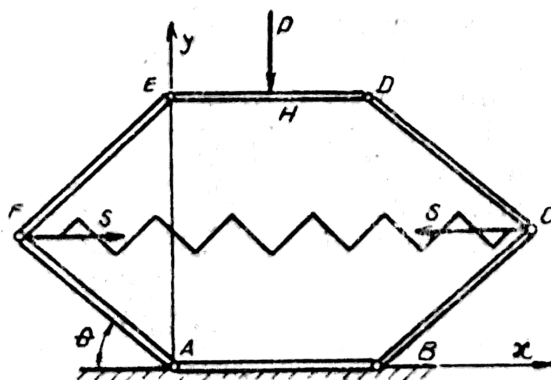


Fig. 21.B.5

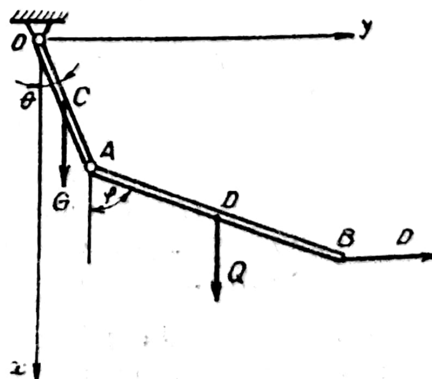


Fig. 21.B.6

R e z o l v a r e. Sistemul are două grade de libertate, reprezentate prin unghiurile θ și φ. Se aplică metoda lucrului mecanic virtual. Introducînd forțele active în expresia analitică, se obține:

$$\delta L = G\,\delta x_C + Q\delta x_D + P\delta y_B = 0;$$

$$x_C = \frac{l}{2}\cos\theta; \qquad \delta x_C = -\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta;$$

$$x_D = l\cos\theta + l\cos\varphi; \qquad \delta x_D = -l\sin\theta\delta\theta - l\sin\varphi\delta\varphi;$$

$$y_B = l\sin\theta + 2l\sin\varphi; \qquad \delta y_B = l\cos\theta\delta\theta + 2l\cos\varphi\delta\varphi.$$

Substituind în ecuație valorile găsite, se obține:

$$-G\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta - Ql(\sin\theta\delta\theta + 2\sin\varphi\delta\varphi) + Pl(\cos\theta\delta\theta + 2\cos\varphi\delta\varphi) = 0.$$

Anulînd forțele generalizate, se obține:

$$-G\frac{1}{2}\sin\theta - Q\sin\theta + P\cos\theta = 0;$$

$$-2Q\sin\varphi + 2P\cos\varphi = 0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2P}{G+2Q}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{Q}.$$

21.B.7. Să se calculeze reacțiunile din legăturile sistemului de bare din figura 21.B.7, *a*. Barele au greutăți neglijabile, iar forțele aplicate au mărimile cunoscute, indicate pe desen.

R e z o l v a r e. Se îndepărtează legătura în care se urmărește calculul unei reacțiuni, după care se dă sistemului o deplasare compatibilă cu legăturile rămase, astfel încît numai forța de legătură dorită să dea lucrul mecanic pentru deplasarea respectivă. Se pot da deplasări virtuale infinitezimale liniare sau unghiulare.

Se înlătură reazemul din D. Se dă o rotație lui CE în jurul lui C; bara AC rămîne nemișcată (fig. 21.B.7, *b*). Numai forțele de pe bara CE produc lucru mecanic virtual:

$$\delta L_1 = 3P\cdot 2a\,\delta\alpha_1 - N_D 6a\delta\alpha_1 + 2P7a\delta\alpha_1 = 0;$$

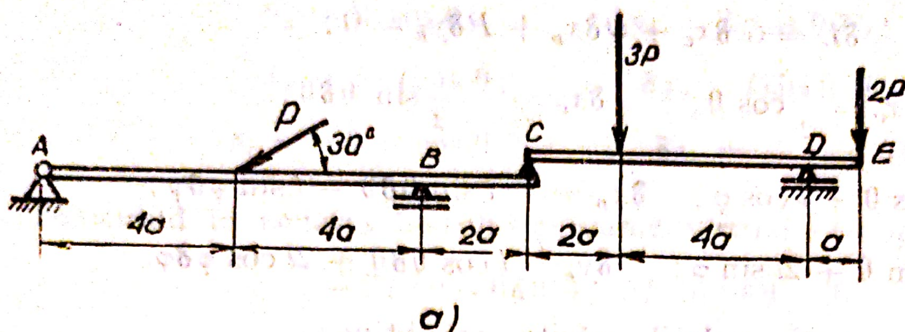
$$N_D = \frac{10}{3}P.$$

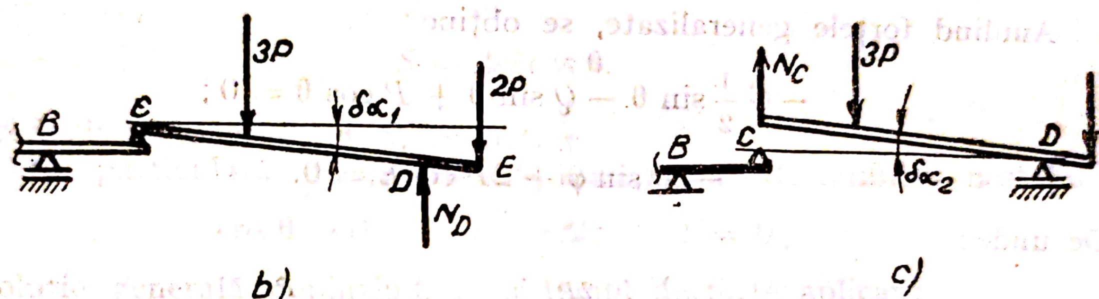
Se rotește bara CE în jurul lui D, bara AC rămînînd fixă (fig. 21.B.7, *c*):

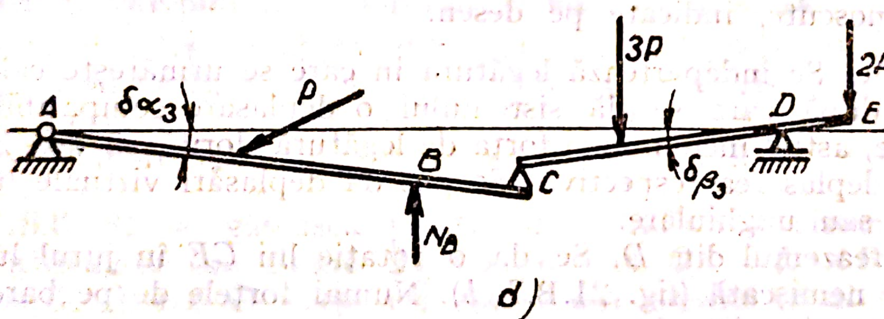
$$\delta L_2 = N_C 6a\delta\alpha_2 - 3P4a\delta\alpha_2 + 2Pa\delta\alpha_2 = 0$$

$$N_C = \frac{5}{3}P.$$

Se înlătură reazemul din B, fiind pusă în evidență reacțiunea normală din B. Se dă o rotație $\delta\alpha_3$ în jurul lui A, care atrage o rotație $\delta\beta_3$ în jurul lui D (fig. 21.B.7, *d*).


3P
2P
P
30°
A
B
C
D
E
4a
4a
2a
2a
4a
a
a)


3P
2P
B
E
δα₁
D
E
N_D
b)
N_C
3P
B
C
D
δα₂
c)


3P
2P
A
δα₃
P
D
E
B
C
δβ₃
N_B
d)

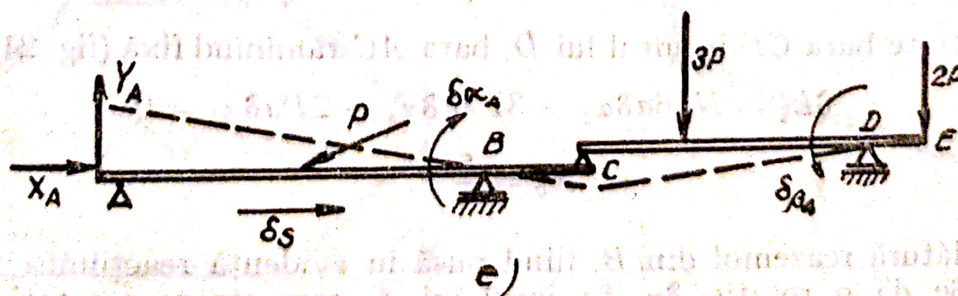

3P
2P
Y_A
δα_A
P
B
D
E
X_A
C
δβ_A
δs
e)

Fig. 21.B.7

Relația geometrică între deplasări este:

$$5\delta\alpha_3 = 3\delta\beta_3.$$

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L_3 = P \sin 30^\circ\, 4a\, \delta\alpha_3 - N_B 8a\, \delta\alpha_3 + 3P4a\, \delta\beta_3 - 2Pa\, \delta\beta_3 = 0.$$

Folosind relația între deplasări, rezultă:

$$N_B = \frac{7P}{3}.$$

Pentru punerea în evidență a reacțiunii din A, se înlătură articulația (fig. 21.B.7, *e*). Se dă o rotație $\delta\alpha_4$ în jurul lui B (rezultă o rotație $\delta\beta_4 = \frac{1}{3}\delta\alpha_4$ în jurul lui D) pentru calculul lui Y_A.

Rezultă:

$$Y_A = -\frac{P}{6}.$$

Pentru calculul lui X_A se dă o deplasare δs în lungul barei AC. Rezultă

$$X_A = \frac{P}{2}\sqrt{3}.$$

21.B.8. Să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 21.B.8, *a*. Se dau $AB = AC = a$, $CD = 2a$.

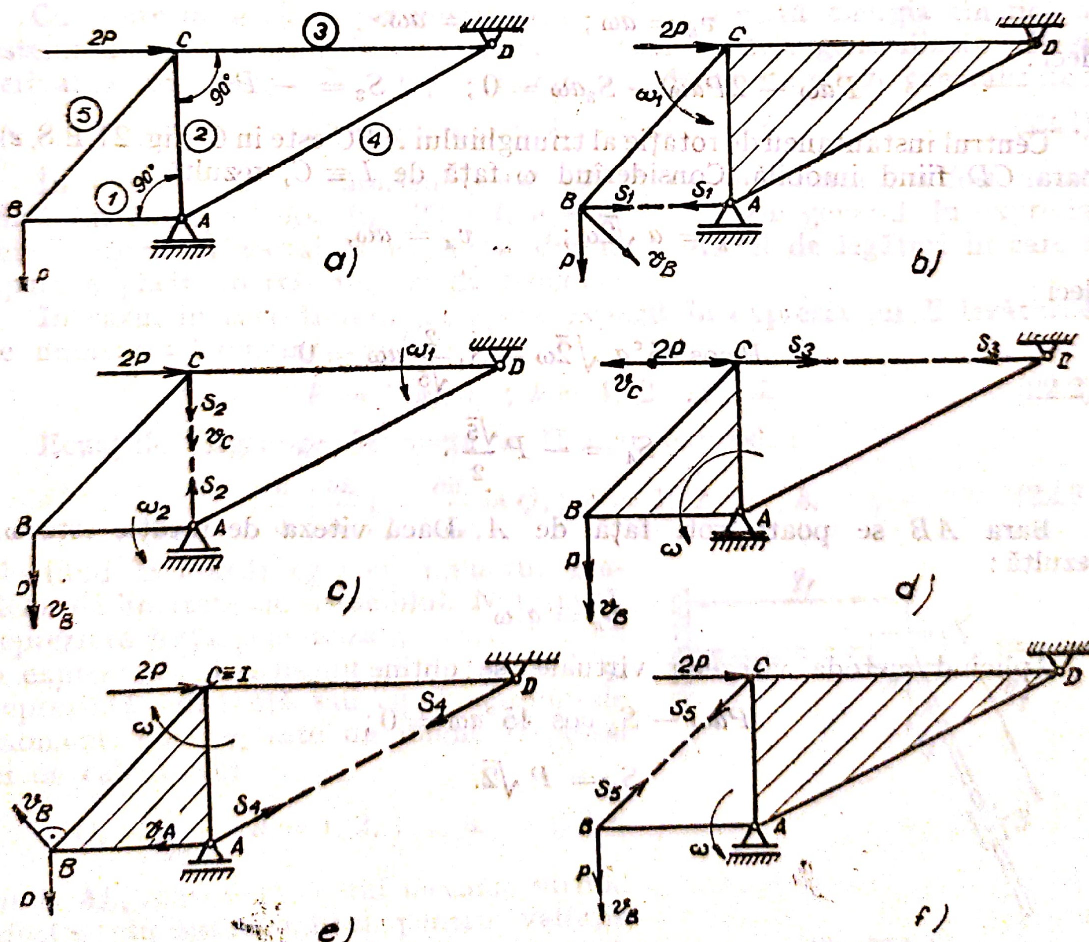


Fig. 21.B.8

R e z o l v a r e. Pentru aplicarea metodei vitezelor virtuale (puterilor virtuale), se îndepărtează bara în care se caută efortul şi se dă sistemului o mişcare compatibilă cu legăturile. Ecuaţia ia forma $P = 0$, unde P este puterea virtuală.

Se dă barei CB viteza ω_1 faţă de C (fig. 21.B.8, b). Rezultă:

$$v_B = \omega_1 a\sqrt{2}.$$

Deci:

$$\delta P = P\cos 45° \cdot \omega_1 a\sqrt{2} + S_1 \cos 45° \omega_1 a\sqrt{2} = 0.$$

$$S_1 = -P;$$

Barele BC şi AB au mişcare plan-paralelă. Bara BC are centrul instantaneu de rotaţie la infinit, punctele D şi A sînt fixe (fig. 21.B.8, c),

$$v_B = v_C,$$

deci:

$$Pv_B + S_2 v_C = 0; \qquad S_2 = -P.$$

Barele ABC se rotesc cu viteza unghiulară ω faţă de A (fig. 21.B.8, d). Rezultă:

$$v_B = a\omega; \qquad v_C = a\omega.$$

deci:

$$Pa\omega - 2Pa\omega - S_3 a\omega = 0; \qquad S_3 = -P.$$

Centrul instantaneu de rotaţie al triunghiului ABC este în C (fig. 21.B.8, e), bara CD fiind imobilă. Considerînd ω faţă de $I \equiv C$, rezultă:

$$v_B = a\sqrt{2}\omega; \qquad v_A = a\omega,$$

deci:

$$-P\cos 45° a\sqrt{2}\omega - S_4 \frac{2}{\sqrt{5}} a\omega = 0$$

$$S_4 = -P\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bara AB se poate roti faţă de A. Dacă viteza de rotaţie este ω, rezultă:

$$v_B = a.\omega$$

Aplicînd metoda vitezelor virtuale, se obţine:

$$Pa\omega - S_5 \cos 45° a\omega = 0;$$

$$S_5 = P\sqrt{2}.$$

Capitolul 22

ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

22.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a constituie metode generale ale mecanicii analitice, permițînd determinarea poziției unui sistem în fiecare moment în funcție de un număr de parametri geometrici independenți. Acești parametri pot să fie distanțe sau unghiuri și pot fi raportați la corpuri fixe sau la corpurile mobile ale sistemului. Astfel, în figura 22.A.1 parametrii q_1 și q_2 sînt distanțe, iar q_3 este un unghi. Pe de altă parte q_1 și q_3 sînt parametri absoluți (raportați la repere fixe), iar parametrul q_2 este relativ (raportat la punctul A care este mobil). Caracteristic acestor parametri independenți este faptul că numărul lor este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului, adică cu numărul posibilităților de mișcări independente ale corpurilor sistemului.

Cu ajutorul acestor parametri poate fi exprimată energia cinetică a sistemului, care conține în expresia ei atît coordonatele generalizate, cît și derivatele în funcție de timp ale acestora, denumite viteze generalizate:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k, t),\ k = 1,\ 2 \ldots h. \tag{22.1}$$

În expresia 22.1, numărul total de grade de libertate a fost notat cu h (în exemplul din fig. 22.A.1, $h = 3$). În cazul general, în expresia lui E apare ca variabilă explicită timpul t. Astfel de legături în care t apare explicit poartă numele de reonome.

În cazul în care timpul nu apare explicit în expresia lui E legăturile se numesc scleronome, deci:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k);\ k = 1,\ 2, \ldots, h. \tag{22.2}$$

Ecuațiile Lagrange de speța a II-a au expresia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k;\ k = 1,\ 2, \ldots, h, \tag{22.3}$$

ele fiind în număr egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului. Notația Q_k reprezintă forța generalizată, aceasta fiind o expresie cu dimensiuni de forță, dacă q_k reprezintă o distanță sau cu dimensiuni de moment, dacă q_k este un unghi. Expresia ei de calcul este

$$Q_k = \frac{\delta L_k}{\delta q_k};\ k = 1, 2, \ldots, h, \tag{22.4}$$

unde δL_k reprezintă lucrul mecanic virtual efectuat în sistem numai pentru variația parametrului q_k.

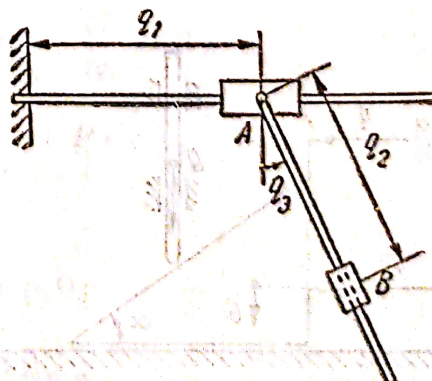


Fig. 22.A.1

În cazul în care forțele sistemului sînt conservative, există o funcție de forță $U = U(q_k, t)$ — pentru legăturile reonome, și $U = U(q_k)$ — pentru legăturile scleronome, din care se obțin toate forțele generalizate ale sistemului:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{22.5}$$

Există posibilitatea concentrării expresiei ecuațiilor (22.3), prin introducerea funcției lui Lagrange, denumită și „potențial-cinetic":

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = E + U; \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{22.6}$$

În acest mod, rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \quad Q_k + \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \tag{22.7}$$

deci ecuațiile lui Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{22.8}$$

Prin determinarea legilor de variație pentru toți parametrii:

$$q_k = q_k(t); \quad k = 1, 2, \ldots h, \tag{22.9}$$

poziția în spațiu a sistemului ar putea fi reprezentată grafic prin poziția unui punct P în spațiul cu h dimensiuni. Acest punct P exprimă starea sistemului la un moment dat, el purtînd numele de punct figurativ al sistemului. Un astfel de sistem de coordonate de stare poartă numele de spațiul configurațiilor, deplasarea punctului P în acest sistem marcînd evoluția în timp a stării mecanice a sistemului.

22.B. APLICAȚII LA ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

22.B.1. Prisma de greutate G, avînd unghiul planului înclinat α, se reazemă pe un plan orizontal. Pe planul înclinat al prismei se reazemă un tachet vertical de greutate Q (fig. 22.B.1).

Se aplică prismei o forță orizontală F pe direcția centrului său de greutate. Să se studieze mișcarea sistemului considerat inițial în repaus, neglijînd frecările, și să se scrie legea de mișcare a prismei.

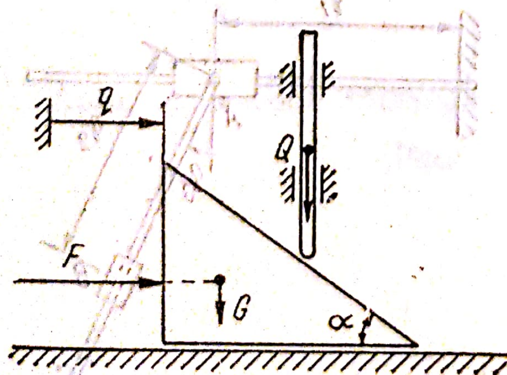


Fig. 22.B.1

R e z o l v a r e. Sistemul are un singur grad de libertate, care se alege sub forma coordonatei generalizate q.

Energia cinetică a celor două corpuri cu mișcări de translație este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}(\dot{q}\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2.$$

Forța generalizată se obține ca raport al lucrului mecanic virtual total corespun-

zător variației coordonatei generalizate q și diferențiala virtuală a acestei coordonate:

$$Q = \frac{\delta L}{\delta q} = \frac{F\delta q - (Q \operatorname{tg} \alpha)\,\delta q}{\delta q} = F - Q \operatorname{tg} \alpha.$$

Pentru scrierea unicei ecuații Lagrange în acest caz, se calculează:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{g}(G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha); \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\ddot{q}}{g}(G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Deci, se obține:

$$\frac{\ddot{q}}{g}(G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha) = F - Q \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\ddot{q} = \frac{F - Q \operatorname{tg} \alpha}{G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

Considerînd că sistemul pleacă din repaus, ecuația de mișcare a prismei este:

$$q = \frac{1}{2} g t^2 \frac{F - Q \operatorname{tg} \alpha}{G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

22.B.2. Se consideră sistemul (fig. 22.B.2) format din prisma de greutate G și unghi de înclinare α și particula materială de greutate P, aflată inițial în repaus pe planul înclinat al prismei. Sistemul este lăsat liber. Să se studieze mișcarea sistemului, considerînd că toate legăturile sînt ideale.

R e z o l v a r e. Sistemul are două grade de libertate, reprezentate de coordonatele generalizate q_1 și q_2. Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos \alpha),$$

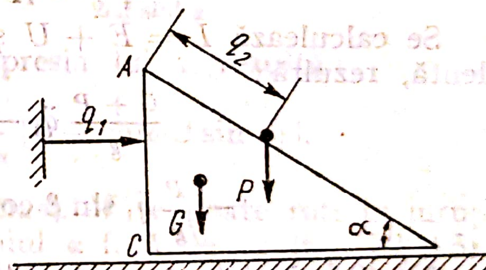


Fig. 22.B.2

iar funcția de forță:

$$U = -P(AC - q_2 \sin \alpha) + C.$$

Pentru scrierea celor două ecuații Lagrange se utilizează funcția $L = E + U$ și se calculează:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{G}{g}\dot{q}_1 + \frac{P}{g}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos \alpha); \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{P}{g}(\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos \alpha); \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = P \sin \alpha.$$

Cu aceste elemente, se obține:

$$\frac{P + G}{g}\ddot{q}_1 + \frac{P}{g}\ddot{q}_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\frac{P}{g}\ddot{q}_1 \cos \alpha + \frac{P}{g}\ddot{q}_2 = P \sin \alpha.$$

Rezolvînd sistemul, accelerațiile prismei, respectiv a punctului de greutate P pe prismă, sînt:

$$\ddot{q}_1 = -g\frac{P\sin 2\alpha}{2(G + P\sin^2\alpha)}; \quad \ddot{q}_2 = g\frac{(P+G)\sin\alpha}{G + P\sin^2\alpha}.$$

Se observă că ambele mișcări au accelerații constante, deci sînt uniform accelerate. Semnul negativ de la $\ddot{q}_1$ indică faptul că mișcarea prismei are loc în sens contrar celui presupus inițial sau, dacă inițial prisma are o viteză în sensul presupus, mișcarea ei va fi uniform încetinită.

22.B.3. Prisma din figura 22.B.3, de greutate G, are pe planul înclinat cu unghiul α un canal, înclinat cu unghiul β față de bază, în care se poate mișca un punct material de greutate P. În centrul de greutate al prismei se aplică forța orizontală F, paralelă cu fețele laterale ale prismei. La momentul inițial sistemul este în repaus, punctul material găsindu-se în poziția cea mai de sus a canalului.

Să se găsească legile de mișcare ale corpurilor sistemului, neglijînd frecările.

R e z o l v a r e. Cele două grade de libertate ale sistemului sînt reprezentate de coordonatele generalizate q_1 și q_2. Se calculează vitezele generalizate, pe baza cărora rezultă:

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin\beta\cos\alpha).$$

Funcția de forță este:

$$U = Fq_1 + Pq_2\sin\beta\sin\alpha + C.$$

Se calculează $L = E + U$ și, procedînd similar ca la problema precedentă, rezultă:

$$\frac{G+P}{g}\ddot{q}_1 - \frac{P}{g}\ddot{q}_2\sin\beta\cos\alpha = F;$$

$$-\frac{P}{g}\ddot{q}_1\sin\beta\cos\alpha + \frac{P}{g}\ddot{q}_2 = P\sin\beta\sin\alpha.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$\ddot{q}_1 = g\frac{2F + P\sin^2\beta\sin 2\alpha}{2[G + P(1 - \sin^2\beta\cos^2\alpha)]}; \quad \ddot{q}_2 = g\frac{\sin\beta[(G+P)\sin\alpha + F\cos\alpha]}{G + P(1 - \sin^2\beta\cos^2\alpha)}.$$

22.B.4. Bara AB din figura 22.B.4 se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul unui ax vertical, fiind înclinată față de verticală

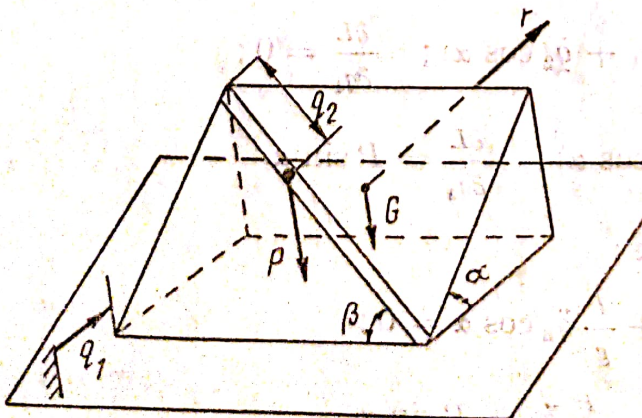


Fig. 22.B.3

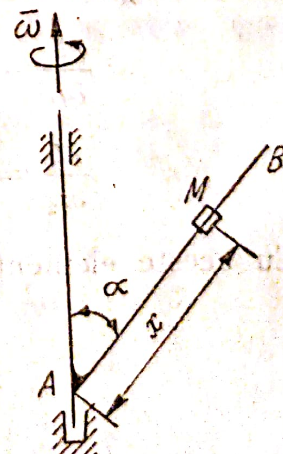


Fig. 22.B.4

cu unghiul α. Pe bara AB poate aluneca fără frecare un cursor M de masă m, asimilabil cu un punct material.

Să se studieze mişcarea cursorului în raport cu bara, dacă la $t = 0$ el este lansat din A cu viteza v_0 faţă de bară.

R e z o l v a r e. Deoarece bara are mişcare cunoscută, se alege un singur parametru x, pentru studiul mişcării punctului faţă de bară.

Energia sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2\omega_0^2 \sin^2 \alpha),$$

iar funcţia de forţă are expresia:

$$U = -mgx \cos \alpha + C_0.$$

Ecuaţia Lagrange este

$$\ddot{x} - x\omega_0^2 \sin^2 \alpha = -g \cos \alpha,$$

iar prin integrare conduce la:

$$x = C_1 e^{\omega_0 t \sin \alpha} + C_2 e^{-\omega_0 t \sin \alpha} + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Se aleg condiţiile iniţiale $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, pentru $t = 0$, cu ajutorul cărora se calculează constantele de integrare:

$$C_1 = \frac{v_0\omega_0 \sin \alpha - g \cos \alpha}{2\omega_0^2 \sin^2 \alpha}; \quad C_2 = -\frac{v_0\omega_0 \sin \alpha + g \cos \alpha}{2\omega_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Introducînd constantele şi ordonînd expresia lui x, rezultă:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0 \sin \alpha} \operatorname{sh}(\omega_0 t \sin \alpha) + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2 \sin^2 \alpha} [1 - \operatorname{ch}(\omega_0 t \sin \alpha)].$$

22.B.5. Un tub omogen de lungime l şi masă M se poate roti în jurul unui ax vertical. Tubul este înclinat cu unghiul α faţă de ax (fig. 22.B.5). În tub se mişcă liber un punct material de masă m. La momentul iniţial $x = c$, $\dot{x} = 0$, iar tubul se roteşte cu viteza unghiulară ω_0.

Neglijînd frecările, să se studieze legile de variaţie ale vitezelor tubului şi punctului faţă de tub.

R e z o l v a r e. Se aleg doi parametri pentru studiul mişcării: x care marchează mişcarea punctului în tub şi θ care stabileşte poziţia la un moment dat a tubului în rotaţie, faţă de un plan vertical fix.

Energia cinetică a sistemului şi funcţia de forţă sînt:

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ml^2 \sin^2 \alpha}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha);$$

$$U = mgx \cos \alpha + C_1.$$

Ecuaţia Lagrange referitoare la parametrul θ conduce la o integrală primă:

$$\frac{Ml^2 \sin^2 \alpha}{3} \dot{\theta} + mx^2\dot{\theta} \sin^2 \alpha = C_1.$$

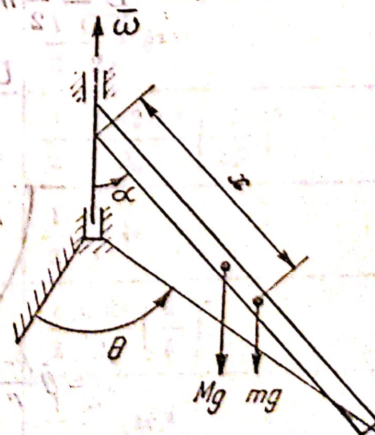


Fig. 22.B.5

Punînd condițiile inițiale $t = 0$, $x = c$, $\theta = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{\theta} = \omega_0$, se calculează constanta C_1, astfel că integrala particulară a ecuației diferențiale este:

$$\dot{\theta} = \frac{Ml^2 + 3mc^2}{Ml^2 + 3mx^2}\,\omega_0.$$

Cea de a doua ecuație, făcînd derivatele corespunzătoare, este

$$\ddot{x} - x\dot{\theta}^2 \sin^2\alpha = g\cos\alpha.$$

Înlocuind pe $\dot{\theta}^2$ și făcînd schimbarea de variabilă

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}(\dot{x}^2)}{\mathrm{d}x},$$

rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{x}^2)}{\mathrm{d}x} = 2x\sin^2\alpha\,\frac{(Ml^2 + 3mc^2)^2\,\omega_0^2}{(Ml^2 + 3mx^2)^2} + 2g\cos\alpha.$$

Se integrează și rezultă:

$$\dot{x}^2 = -\frac{(Ml^2 + 3mc^2)^2\,\omega_0^2 \sin^2\alpha}{3m(Ml^2 + 3mx^2)} + 2gx\cos\alpha + C_2.$$

Punînd condițiile inițiale prezentate mai înainte, se calculează C_2, astfel că expresia vitezei bilei față de tub este

$$\dot{x}^2 = 2g(x - c)\cos\alpha + \frac{\omega_0^2 \sin^2\alpha\,(Ml^2 + 3mc^2)(x^2 - c^2)}{Ml^2 + 3mx^2}.$$

Se observă că cele două viteze s-au calculat în funcție de parametrul x. Ecuațiile sînt valabile atîta timp cît punctul se mișcă în tub.

22.B.6. Un disc omogen de rază r și masă m (fig. 22.B.6) se rostogolește fără alunecare în interiorul unei suprafețe cilindrice de rază $R > r$, plecînd din repaus la $\theta = \alpha$.

Să se calculeze viteza centrului discului cînd acesta trece prin punctul cel mai de jos al traiectoriei sale.

R e z o l v a r e. Singurul grad de libertate este reprezentat de unghiul θ. Se scriu energia cinetică și funcția de forță ale discului:

$$E = \frac{1}{2}m(R - r)^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{2}\,\frac{(R - r)^2\,\dot{\theta}^2}{r^2};$$

$$U = mg(R - r)\sin\theta + C.$$

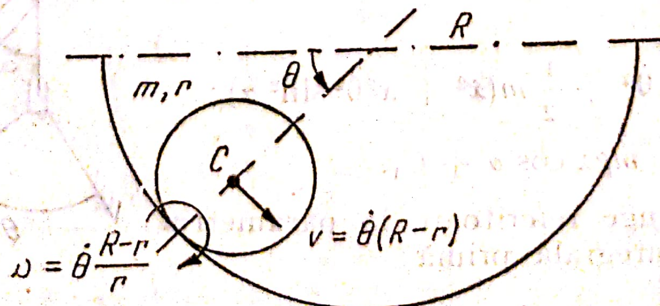


Fig. 22.B.6

Ecuația Lagrange este

$$\ddot{\theta} - \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\cos\theta = 0.$$

Integrînd, rezultă:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\theta = C.$$

Punînd condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = \alpha$, $\dot{\theta} = 0$, rezultă:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{R-r}(\sin\theta - \sin\alpha);$$

$$v_c = (R-r)\dot{\theta};$$

$$(v_c)_{max} = 2\sqrt{\frac{1}{3}g(R-r)(1-\sin\alpha)}.$$

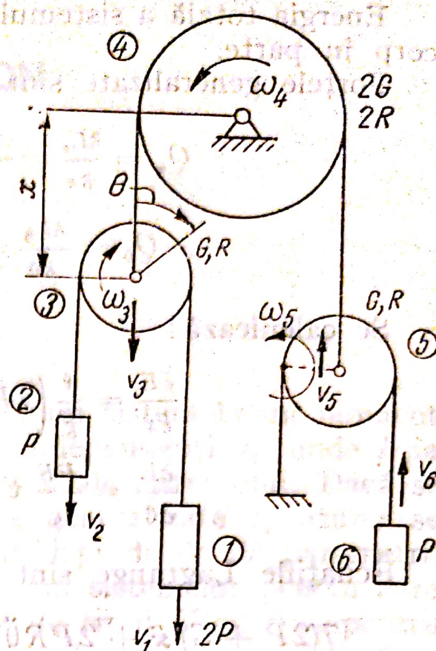


Fig. 22.B.7

22.B.7. Fiind dat sistemul de corpuri din figura 22.B.7, să se calculeze accelerațiile care determină mișcarea sistemului.

R e z o l v a r e. Situația cinematică a corpurilor sistemului, așa cum sînt notațiile pe figură, este reprezentată în tabelul următor. Tot în tabel sînt calculate și energiile cinetice ale corpurilor sistemului, ale cărui grade de libertate sînt x și θ.

Nr.	Mișcare	Viteza	Energia cinetică
1	Translație	$v_1 = \dot{x} + R\dot{\theta}$	$\frac{1}{2}\frac{2P}{g}(\dot{x} + R\dot{\theta})^2$
2	Translație	$v_2 = \dot{x} - R\dot{\theta}$	$\frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{x} - R\dot{\theta})^2$
3	Plan-paralelă	$v_3 = \dot{x}$	$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}^2$
		$\omega_3 = \dot{\theta}$	$\frac{1}{2}\frac{GR^2}{2g}\dot{\theta}^2$
4	Rotație	$\omega_4 = \dot{x}/2R$	$\frac{1}{2}\frac{2G(2R)^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2$
5	Plan-paralelă	$v_5 = \dot{x}$	$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}^2$
		$\omega_5 = \dot{x}/R$	$\frac{1}{2}\frac{GR^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$
6	Translație	$v_6 = 2\dot{x}$	$\frac{1}{2}\frac{P}{g}(2\dot{x})^2$

Energia totală a sistemului se obţine prin însumarea energiilor fiecărui corp în parte.

Forţele generalizate sînt:

$$Q_x = \frac{\delta L_x}{\delta x} = \frac{3P\delta x + G\delta x - G\delta x - P2\delta x}{\delta x} = P;$$

$$Q_\theta = \frac{\delta L_\theta}{\delta \theta} = \frac{2P \cdot R\delta\theta - P \cdot R\delta\theta}{\delta\theta} = PR.$$

Se calculează:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{g}\left(7P + \frac{7}{2}G\right) + \frac{R\dot{\theta}}{g}P; \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{PR}{g}\dot{x} + \frac{R^2\dot{\theta}}{g}\left(3P + \frac{G}{2}\right); \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0.$$

Ecuaţiile Lagrange sînt

$$7(2P + G)\ddot{x} + 2PR\ddot{\theta} = 2Pg; \quad 2P\ddot{x} + (6P + G)R\ddot{\theta} = 2Pg.$$

Rezolvîndu-le, rezultă:

$$\ddot{x} = g\frac{2P(4P + G)}{80P^2 + 56PG + 7G^2}; \quad \ddot{\theta} = g\frac{2P(12P + 7G)}{R(80P^2 + 56PG + 7G^2)}.$$

ECUAŢIILE CANONICE ALE LUI HAMILTON

23.A. PREZENTAREA TEORETICĂ

Aşa cum s-a prezentat la capitolul 22, poziţia unui sistem la un moment dat se poate defini cu ajutorul parametrilor independenţi q_k, unde k ia valori de la 1 la h pentru gradele de libertate ale sistemului. Dacă se consideră ca parametri independenţi şi vitezele generalizate $\dot{q}_k$, atunci se poate considera că sistemul material considerat depinde de $2h$ parametri. Pentru a utiliza efectiv aceşti parametri, în cazul sistemelor pentru care poate fi definită o funcţie generală de forţă de tipul $U(q_k, t)$ — pentru legături reonome sau $U(q_k)$ — pentru legături scleronome, se introduce noţiunea de impuls generalizat, definit prin relaţia:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = p_k; \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{23.1}$$

Impulsul generalizat are dimensiunile unui impuls, dacă corespunde unei coordonate generalizate cu dimensiuni de lungime, şi dimensiunile unui moment cinetic în cazul în care coordonata corespunzătoare are dimensiuni de unghi.

Pentru sistemele materiale cu legături olonome poate fi definită funcţia lui Hamilton, care reprezintă energia totală a sistemului, exprimată în funcţie de q_k şi p_k:

$$H = \sum_{k=1}^{h} p_k \dot{q}_k - L(q_k, p_k, t); \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{23.2}$$

Eliminarea vitezei generalizate $\dot{q}_k$ s-a făcut pe baza relaţiei (23.1).

Folosind relaţia de definiţie a lui H, se obţin ecuaţiile canonice ale lui Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k; \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k; \quad k = 1, 2, \ldots h. \tag{23.3}$$

Se obţine astfel un sistem de $2h$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, care înlocuiesc cele h ecuaţii de ordinul al doilea ale lui Lagrange.

Se arată că:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{23.4}$$

deci, în cazul în care legăturile sînt scleronome, energia totală a sistemului se conservă:

$$H = E + V = E - U = \text{const.} \tag{23.5}$$

Integrind ecuaţiile canonice ale lui Hamilton (23.3), se obţin funcţiile $q_k(t)$ şi $p_k(t)$ care definesc starea dinamică a sistemului material la un moment dat. Aceste funcţii pot fi privite ca un sistem de coordonate în spaţiul euclidian cu $2h$ dimensiuni — denumit spaţiul fazelor — în care punctul figurativ al sistemului $P(q_k, p_k)$ descrie traiectorii de fază, cu ajutorul cărora poate fi stabilită atît poziţia la un moment dat a punctelor sistemului, dar şi impulsurile generalizate corespunzătoare. Utilizarea spaţiului fazelor este interesantă mai ales pentru studiul calitativ al comportării sistemului material în timp, pentru aprecierea stabilităţii mişcării etc.

Din punct de vedere practic, ecuaţiile canonice sînt foarte potrivite pentru programare pe calculator, reprezentînd sisteme de ecuaţii de ordinul întîi, pentru care există metode destul de precise de integrare numerică.

Revenind la expresia (23.4), se remarcă obţinerea unei integrale prime a mişcării dacă H nu este funcţie explicită de t (vezi 23.5). Se mai pot obţine integrale prime dacă una sau mai multe coordonate generalizate q_k nu apar explicit în expresia lui H. Din expresiile (23.3) rezultă că impulsul generalizat corespunzător este constant în acest caz, coordonata respectivă purtînd denumirea de ciclică sau ascunsă.

23.B. APLICAŢII LA ECUAŢIILE CANONICE ALE LUI HAMILTON

23.B.1. Să se studieze mişcarea unei bare grele la suprafaţa Pămîntului, lansată într-un plan vertical. Se cunosc masa M a barei, momentul de inerţie J faţă de centrul maselor şi condiţiile iniţiale ale mişcării, viteza centrului maselor $\bar{v}_0$, unghiul α de înclinare a vitezei $\bar{v}_0$ faţă de orizontală, viteza unghiulară momentană ω_0 a barei. Se neglijează rezistenţa aerului.

R e z o l v a r e. Se alege sistemul de referinţă Oq_1q_2 din figura 23.B.1, poziţia barei fiind determinată în planul vertical de coordonatele q_1 şi q_2 ale centrului de greutate şi de unghiul q_3 făcut de axa barei cu orizontala Oq_1.

Energia cinetică a barei la un moment dat este:

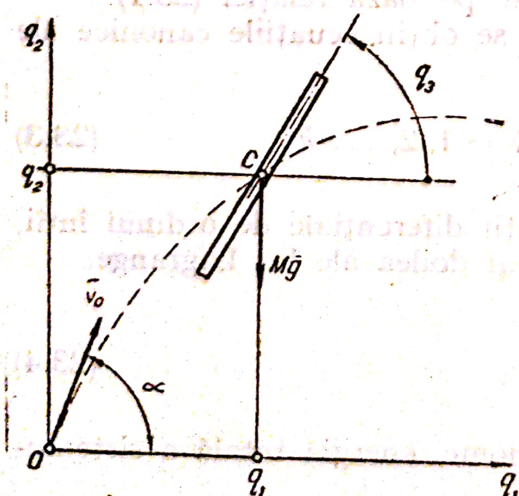


Fig. 23.B.1

$$E = \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2,$$

iar funcţia de forţă are expresia:

$$U = -Mgq_2 + C.$$

Utilizînd potenţialul cinetic $L = E + U$, rezultă impulsurile generalizate:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1;$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M\dot{q}_2;$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = J\dot{q}_3.$$

Funcția lui Hamilton dată de (23.2), are expresia:

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 - \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + Mgq_2 + C.$$

Eliminînd vitezele generalizate $\dot{q}_k$ pe baza relațiilor de definiție ale impulsurilor generalizate, rezultă forma $H(q_k, p_k)$ a funcției lui Hamilton:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} + \frac{p_3^2}{2J} + Mgq_2 + C.$$

Ecuațiile canonice ale lui Hamilton (23.3) se obțin foarte simplu:

$$\frac{p_1}{M} = \dot{q}_1; \quad \frac{p_2}{M} = \dot{q}_2; \quad \frac{p_3}{J} = \dot{q}_3;$$

$$0 = -\dot{p}_1; \quad Mg = -\dot{p}_2; \quad 0 = -\dot{p}_3.$$

Integrînd ecuațiile obținute, rezultă:

$$p_1 = C_1; \quad p_2 = -Mgt + C_2; \quad p_3 = C_3;$$

$$q_1 = \frac{C_1}{M}t + C_4; \quad q_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{C_2}{M}t + C_5; \quad q_3 = \frac{C_3}{J}t + C_6.$$

Condițiile inițiale pentru coordonatele utilizate, sînt:

$$t = 0; \quad q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = q_{30};$$

$$p_1 = M\dot{q}_1 = Mv_0 \cos\alpha; \quad p_2 = M\dot{q}_2 = Mv_0 \sin\alpha; \quad p_3 = J\dot{q}_3 = J\omega_0.$$

Utilizînd aceste condiții se determină constantele de integrare, astfel se obține:

$$q_1 = v_0 t \cos\alpha; \quad q_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha; \quad q_3 = \omega_0 t + q_{30};$$

$$p_1 = Mv_0 \cos\alpha; \quad p_2 = M(-gt + v_0 \sin\alpha); \quad p_3 = J\omega_0.$$

Traiectoria centrului maselor se obține prin eliminarea lui t între coordonatele generalizate:

$$q_3 = \frac{gq_1^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + q_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

În timpul mișcării bara se rotește uniform cu viteza unghiulară ω_0 în jurul centrului de greutate.

23.B.2. Să se studieze mișcarea unui punct material de masă m sub acțiunea unei forțe elastice de constantă elastică k.

R e z o l v a r e. Se alege un sistem triortogonal fix, față de care coordonatele punctului sînt x, y și z. Se scriu în ordine expresiile lui E, U și H:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

$$U = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C;$$

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C.$$

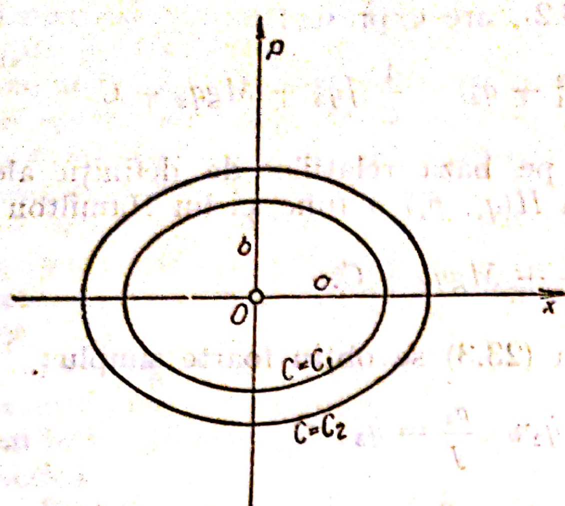


Fig. 23.B.2

De remarcat că $H = \text{const}$, deoarece legăturile punctului sînt scleronome (nu depind explicit de timp).

Ecuaţiile canonice sînt:

$$\frac{p_1}{m} = \dot{x}; \quad \frac{p_2}{m} = \dot{y}; \quad \frac{p_3}{m} = \dot{z};$$

$$kx = -\dot{p}_1; \quad ky = -\dot{p}_2; \quad kz = -\dot{p}_3.$$

Integrînd sistemul astfel obţinut, se obţin integralele generale corespunzătoare:

$$x = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1);$$

$$y = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2);$$

$$z = A_3 \cos(\omega t - \varphi_3);$$

$$p_1 = -m\omega A_1 \sin(\omega t - \varphi_1); \quad p_2 = -m\omega A_2 \sin(\omega t - \varphi_2);$$

$$p_3 = -m\omega A_3 \sin(\omega t - \varphi_3),$$

în care $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Pentru determinarea constantelor de integrare A_1, A_2, A_3, φ_1, φ_2, φ_3 se utilizează condiţiile iniţiale ale mişcării.

În cazul oscilatorului liniar $y = z = 0$, deci apar numai coordonata x şi impulsul generalizat $p_1 = p$. Deoarece legăturile sînt scleronome, conform (23.5) $H = \text{const}$, deci:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

Expresia respectivă reprezintă în spaţiul fazelor (care în cazul de faţă are două dimensiuni) ecuaţia unei elipse, dată în continuare sub forma:

$$\frac{p^2}{2mC} + \frac{x^2}{\frac{2C}{k}} = 1.$$

Traiectoriile de fază (curbele descrise de punctul figurativ al sistemului în planul fazelor) vor fi curbe închise descrise de acesta în sensul acelor de ceas (fig. 23.B.2), deoarece pentru o viteză (respectiv, impuls) pozitivă punctul material se mişcă în sensul pozitiv al axei Ox şi invers pentru viteză negativă. De asemenea, se poate trage concluzia că mişcarea punctului este stabilă, el rămînînd în vecinătatea originii sistemului Oxp, care reprezintă poziţia de echilibru static a punctului material m sub acţiunea forţei elastice.

Capitolul 24

VIBRAŢII MECANICE

24.A. PREZENTAREA TEORETICĂ

Un sistem mecanic efectuează o *vibraţie* sau o *oscilaţie* dacă parametrii geometrici şi cinematici caracteristici la un moment dat variază alternativ în timp faţă de valorile avute în starea de referinţă. Vibraţia este *periodică* dacă toate elementele mişcării (poziţia, viteza $\bar{v}$, acceleraţia $\bar{a}$) se repetă după acelaşi timp T, numit *perioadă*.

Cea mai simplă vibraţie periodică este *vibraţia armonică*, ce se poate exprima sub una din formele:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 \sin \omega t \quad \text{sau} \quad x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ x = x_0 \cos \omega t \quad \text{sau} \quad x = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{array}\right\} . \tag{24.1}$$

Vibraţia armonică poate fi exemplificată cu ajutorul oscilatorului liniar (fig. 24.A.1).

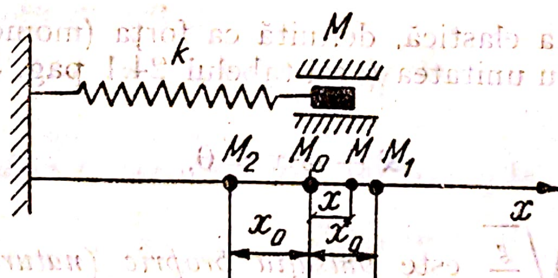


Fig. 24.A.1

Elementele caracteristice ale unei vibraţii armonice sînt:

— *Elongaţia* x — distanţa de la poziţia de repaus la oscilator;

— *Amplitudinea* x_0 — elongaţia maximă;

— *Perioada* T — timpul cel mai scurt după care mişcarea se repetă identic;

— *Pulsaţia* ω — numărul de vibraţii complete efectuate în 2π secunde, fapt pentru care este numită şi frecvenţă circulară. Relaţia dintre perioadă şi pulsaţie este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \tag{24.2}$$

— *Frecvenţa* f — inversul perioadei — reprezintă numărul de vibraţii complete efectuate într-o secundă:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} . \tag{24.3}$$

Frecvenţa se măsoară în Hertz (Hz).

Cinematica vibrațiilor studiază în special compunerea vibrațiilor armonice. Dacă se însumează două vibrații armonice paralele de aceeași pulsație, se obține tot o vibrație armonică de aceeași pulsație:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = \\ = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{24.4}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{C_2}{C_1} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned}\right\} \tag{24.5}$$

Cînd se însumează două pulsații paralele de pulsații diferite se obține o vibrație nearmonică. Dacă se însumează vibrații pe direcții ortogonale se obțin figurile lui Lissojous, care sînt curbe închise cînd raportul pulsațiilor este un număr rațional.

Dinamica vibrațiilor liniare cu un grad de libertate studiază în principal următoarele tipuri de vibrații:

1. *Vibrații libere neamortizate.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.1. Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{24.6}$$

unde k este constanta elastică, definită ca forța (momentul) care produce o deformație egală cu unitatea (vezi tabelul 24.1 pag. 325). Ecuația (24.6) se mai scrie:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{24.7}$$

unde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$ este *pulsația proprie (naturală).*

Cu condițiile inițiale $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, legea de mișcare este:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{v_0}\right). \tag{24.8}$$

2. *Vibrații libere cu amortizare vîscoasă.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.2. Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{24.9}$$

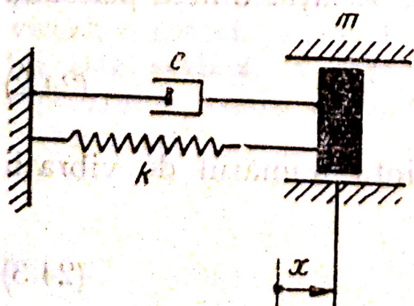


Fig. 24.A.2

sau, notînd $\frac{c}{m} = 2\alpha$ — factorul de amortizare și $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ — pulsația proprie,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{24.10}$$

Pentru cazul $\alpha = \omega$, coeficientul de amortizare se numește critic ($c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$).

Soluțiile ecuației diferențiale (24.10) depind de rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}. \qquad (24.11)$$

Dacă

a) $\alpha^2 - \omega^2 < 0$; $c < c_{cr}$ — frecări mici;
b) $\alpha^2 - \omega^2 > 0$; $c > c_{cr}$ — frecări mari și foarte mari;
c) $\alpha^2 - \omega^2 = 0$; $c = c_{cr}$ — frecări mari.

În cazul (a) se notează *pseudopulsația*:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}. \qquad (24.12)$$

Legea de mișcare este:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) = Ae^{-\alpha t} \sin (\beta t + \varphi). \qquad (24.13)$$

deci mișcarea se amortizează periodic.

Cu condițiile inițiale $t = 0: x = x_0,\ \dot{x} = v_0$, rezultă:

$$C_1 = x_0;\quad C_2 = \frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta};\quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (24.14)$$

În acest caz pseudoperioada este:

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \qquad (24.15)$$

Diagrama mișcării este dată în figura 24.A.3.

În cazul (b), notînd rădăcinile ecuației caracteristice $r_1 = -\lambda_1$; $r_2 = -\lambda_2$, legea de mișcare este:

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \qquad (24.16)$$

deci mișcarea se amortizează aperiodic.

În cazul (c), rădăcina ecuației caracteristice este $r_{12} = -\alpha$, iar legea de mișcare este:

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\alpha t}, \qquad (24.17)$$

deci mișcarea se amortizează aperiodic.

3. *Vibrații forțate și neamortizate întreținute de o forță sinusoidală.* Modelul mecanic este dat în figura 24.A.4. Ecuația de mișcare este:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= F_0 \sin pt, \\ \text{sau} \qquad \ddot{x} + \omega^2 x &= q \sin pt, \end{aligned}\right\} \qquad (24.18)$$

unde s-a notat $\frac{k}{m} = \omega^2$; $\frac{F_0}{m} = q$.

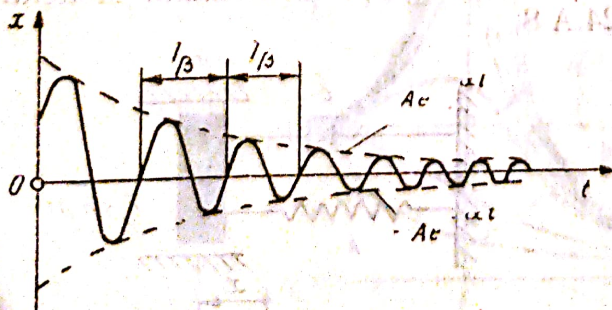


Fig. 24.A.3

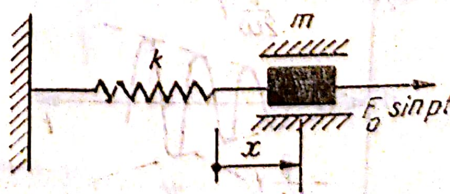


Fig. 24.A.4

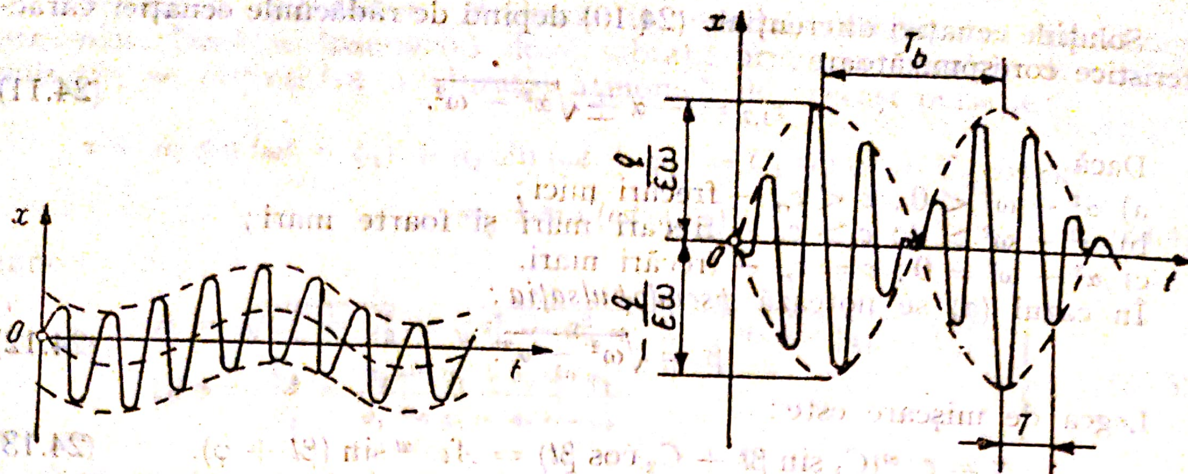


Fig. 24.A.5

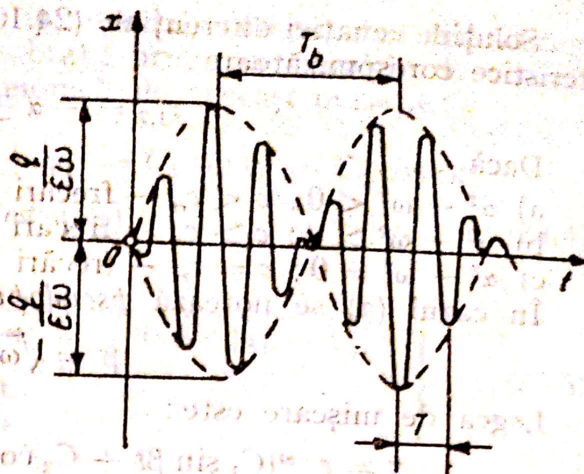


Fig. 24.A.6

În cazul $\omega \neq p$, cu condiţiile iniţiale $t = 0 : x = 0, \quad \dot{x} = 0$ (pentru a evidenţia că vibraţia se datoreşte forţei perturbatoare), legea de mişcare este rezultatul suprapunerii vibraţiei proprii şi a celei forţate, deci o mişcare nearmonică:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{q}{\omega^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{\omega}\sin \omega t\right). \tag{24.19}$$

Diagrama mişcării este dată în figura 24.A.5.

În cazul $\omega \approx p$ apare *fenomenul de bătăi*, şi considerînd $\omega - p = \varepsilon$; $\frac{p}{\omega} \approx 1$; $\omega + p \approx 2\omega$, ecuaţia (24.19) devine:

$$x = -\frac{q}{\omega\varepsilon}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos \omega t. \tag{24.20}$$

Perioadele mişcării şi, respectiv, a bătăilor sînt:

$$T = \frac{2}{\frac{\omega + p}{2}}; \quad T_b = \frac{2\pi}{\omega - p}. \tag{24.21}$$

Diagrama mişcării este prezentată în figura 24.A.6.

În cazul $\omega = p$ apare *fenomenul de rezonanţă*. Cu aceleaşi condiţii iniţiale, legea de mişcare este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{q}{2\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t - t\cos \omega t\right), \tag{24.22}$$

ceea ce dovedeşte că amplitudinea creşte la infinit, datorită vibraţiei forţate x_2, care este prezentată în figura 24.A.7.

4. *Vibraţii forţate şi amortizate întreţinute de o forţă sinusoidală.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.8.

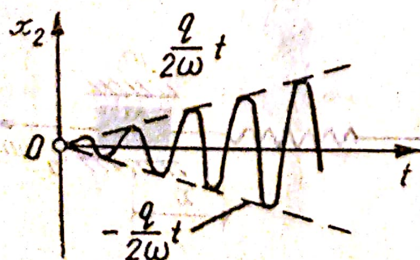


Fig. 24.A.7

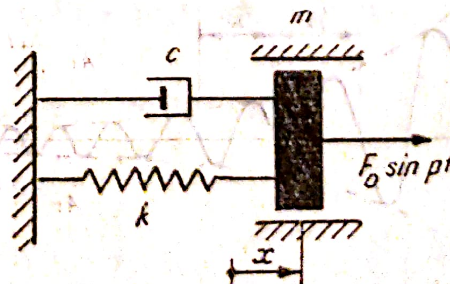


Fig. 24.A.8



Ecuaţia mişcării, utilizînd notaţiile precedente, este:

$$\text{sau}\quad \left.\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F_0 \sin pt,\\ \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x &= q \sin pt, \end{aligned}\right\} \quad (24.23)$$

Legea de mişcare (pentru $c < c_{cr}$) se obţine din suprapunerea vibraţiei proprii şi a celei forţate:

Fig. 24.A.9

$$x = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + A \sin(pt - \Phi). \qquad (24.24)$$

Diagrama mişcării este dată în figura 24.A.9.

După ce vibraţia proprie se amortizează, adică în regimul permanent, mişcarea este o vibraţie armonică, de amplitudine:

$$A = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p)^2 + 4\alpha^2 p^2}} = x_{st} A_1, \qquad (24.25)$$

unde $x_{st} = \frac{F_0}{k}$ — deformaţia statică şi A_1 — factorul de amplificare dat de:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}. \qquad (24.26)$$

Diagrama factorului de amplificare este dată în figura 24.A.10 sub forma unui fascicul de curbe în funcţie de parametrul c/c_{cr}.

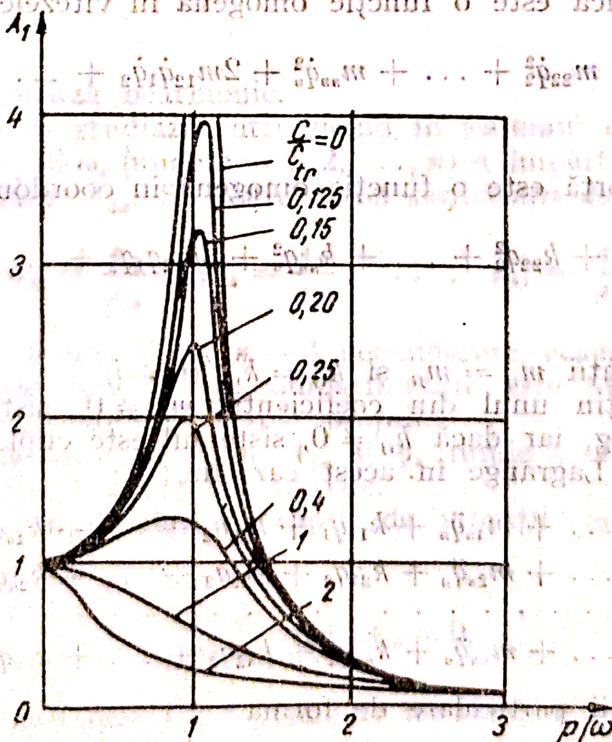


Fig. 24.A.10

5. *Vibrații forțate și amortizate întreținute de o forță oarecare.* Considerînd că t_1 reprezintă durata de acțiune a forței perturbatoare $F(t)$, legea de mișcare este:

$$x = e^{-\alpha t_1}(C_1 \sin \beta t_1 + C_2 \cos \beta t_1) + \\ + \frac{1}{m\beta}\int_0^{t_1} F(t) e^{-\alpha(t_1-t)} \sin [\beta(t_1 - t)]\, dt, \qquad (24.27)$$

unde intervine integrala lui Duhamel.

6. *Vibrații autoîntreținute.*

Ecuația mișcării este:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} - c\dot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24.28)$$

sau

Legea de mișcare este (fig. 24.A.11):

$$x = Ae^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi).$$

Fig. 24.A.11

In cazul vibrațiilor libere ale sistemelor liniare cu n grade de libertate, considerînd legăturile olonome și forțele conservative, se utilizează ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}. \qquad (24.29)$$

Energia cinetică este o funcție omogenă în vitezele $\dot{q}_k$:

$$E = \frac{1}{2}(m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + m_{nn}\dot{q}_n^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + 2m_{nn-1}\dot{q}_n\dot{q}_{n-1}). \qquad (24.30)$$

Funcția de forță este o funcție omogenă în coordonatele q_k:

$$U = -\frac{1}{2}(k_{11}q_1^2 + k_{22}q_2^2 + \ldots + k_{nn}q_n^2 + 2k_{12}q_1q_2 + \ldots + 2k_{nn-1}q_nq_{n-1}). \qquad (24.31)$$

În aceste relații $m_{ij} = m_{ji}$ și $k_{ij} = k_{ji}$, $(i \neq j)$.

Dacă cel puțin unul din coeficienții $m_{ij} \neq 0$, sistemul este cuplat dinamic și analog, iar dacă $k_{ij} \neq 0$, sistemul este cuplat static.

Ecuațiile lui Lagrange în acest caz sînt:

$$\left.\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + m_{1n}\ddot{q}_n + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \ldots + k_{1n}q_n &= 0 \\ m_{21}\ddot{q}_2 + m_{22}q_2 + \ldots + m_{2n}\ddot{q}_n + k_{21}q_2 + k_{22}q_2 + \ldots + k_{2n}q_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n1}\ddot{q}_1 + m_{n2}\ddot{q}_2 + \ldots + m_{nn}\ddot{q}_n + k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \ldots + k_{nn}q_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24.32)$$

Se aleg soluții particulare de forma:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi);\quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi);\quad \ldots;\quad q_n = A_n \sin(\omega t + \varphi). \qquad (24.33)$$

Introducînd aceste soluţii în (24.33) rezultă sistemul de n ecuaţii algebrice, omogen, în $A_1, A_2 \ldots A_n$:

$$\left.\begin{aligned}(k_{11}-m_{11}\omega^2)A_1+(k_{12}-m_{12}\omega^2)A_2+\ldots+(k_{1n}-m_{1n}\omega^2)A_n=0\\(k_{21}-m_{21}\omega^2)A_1+(k_{22}-m_{22}\omega^2)A_2+\ldots+(k_{2n}-m_{2n}\omega^2)A_n=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(k_{n1}-m_{n1}\omega^2)A_1+(k_{n2}-m_{n2}\omega^2)A_2+\ldots+(k_{nn}-m_{nn}\omega^2)A_n=0.\end{aligned}\right\}\quad(24.34)$$

Pentru a obţine soluţii nebanale se pune condiţia ca determinantul sistemului să se anuleze:

$$\Delta=\begin{vmatrix}(k_{11}-m_{11}\omega^2) & (k_{12}-m_{12}\omega^2) & \ldots & (k_{1n}-m_{1n}\omega^2)\\(k_{21}-m_{21}\omega^2) & (k_{22}-m_{22}\omega^2) & \ldots & (k_{2n}-m_{2n}\omega^2)\\\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\(k_{n1}-m_{n1}\omega^2) & (k_{n2}-m_{n2}\omega^2) & \ldots & (k_{nn}-m_{nn}\omega^2)\end{vmatrix}=0\quad(24.35)$$

pe care dezvoltîndu-l se obţine *ecuaţia pulsaţiilor proprii.* Rezolvînd această ecuaţie şi reţinînd numai soluţiile pozitive, se obţin cele n *pulsaţii proprii (naturale)* ale sistemului.

Introducînd pulsaţiile proprii în soluţiile particulare (24.33), se deduc *modurile proprii de vibraţii*, cînd toate punctele sistemului vibrează armonic.

Soluţia generală se obţine aplicînd principiul superpoziţiei:

$$\left.\begin{aligned}q_1=A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2)+\ldots+A_{1n}\sin(\omega_nt+\varphi_n)\\q_2=A_{21}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+A_{22}\sin(\omega_2t+\varphi_2)+\ldots+A_{2n}\sin(\omega_nt+\varphi_n)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\q_n=A_{n1}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+A_{n2}\sin(\omega_2t+\varphi_2)+\ldots+A_{nn}\sin(\omega_nt+\varphi_n)\end{aligned}\right\}\quad(24.36)$$

deci punctele vibrează nearmonic.

Amplitudinile se studiază introducînd în sistemul omogen (24.34) pe rînd pulsaţiile proprii ω_k (unde $k=1, 2, \ldots, n$) şi împărţind fiecare ecuaţie cu A_1, care devine A_{1k}. Se obţin astfel *coeficienţii de distribuţie:*

$$\mu_{2k}=\frac{A_{2k}}{A_{1k}};\quad \mu_{3k}=\frac{A_{3k}}{A_{1k}};\quad \ldots;\quad \mu_{nk}=\frac{A_{nk}}{A_{1k}}\quad(24.37)$$

şi un sistem de n ecuaţii cu $n-1$ necunoscute, *ecuaţia coeficienţilor de distribuţie*, a cărei condiţie şi compatibilitate este satisfăcută, conform relaţiei (24.35), de toate pulsaţiile proprii.

Constantele de integrare sînt A_{1k} şi φ_k (unde $k=1, 2, \ldots, n$), care se determină prin 2 n condiţii iniţiale.

O proprietate a modurilor proprii de vibraţii este ortogonalitatea acestora

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}A_{j1}A_{i2}=0,\quad(24.38)$$

care în cazul sistemelor cu 2 grade de libertate devine:

$$m_{11}A_{11}A_{12}+m_{12}A_{11}A_{22}+m_{21}A_{21}A_{12}+m_{22}A_{21}A_{22}=0.\quad(24.39)$$

24.B. APLICAȚII LA VIBRAȚII MECANICE

24.B.1. Să se stabilească ecuația de mișcare a unui mobil care efectuează o oscilație armonică cu centrul în origine, cunoscînd că în momentul inițial mobilul trece prin origine cu viteza de 6,28 m/s, iar perioada mișcării este 4 s.

R e z o l v a r e. Ecuația mișcării este de forma:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Deoarece la $t = 0$ se dă $x = 0$, rezultă:

$$0 = A \sin \varphi,$$

de unde $\sin \varphi = 0$, deci $\varphi = 0$.
Cunoscînd perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \text{ s},$$

rezultă pulsația $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$.
Deci, legea de mișcare este:

$$x = A \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Viteza este:

$$v = \dot{x} = \frac{\pi}{2} A \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Deoarece la $t = 0$; $v = 6{,}28$, se obține:

$$6{,}28 = \frac{\pi}{2} A \cos 0,$$

deci amplitudinea mișcării este $A = 4$ m și legea este:

$$x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

24.B.2. Să se compună două vibrații armonice paralele ale căror ecuații de mișcare sînt: $x_1 = \sin 4t$; $x_2 = \sqrt{3} \cos 4t$.

R e z o l v a r e. Mișcarea rezultantă este:

$$x = x_1 + x_2 = \sin 4t + \sqrt{3} \cos 4t \equiv A \sin(\omega t + \varphi).$$

Amplitudinea mișcării rezultante este:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Defazajul este dat de:

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{3},$$

de unde rezultă $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Deci, mişcarea rezultantă este:

$$x = 2 \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right).$$

24.B.3. Să se compună două vibraţii ortogonale date de ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \sin 2t; \\ y &= 5 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}\right\}$$

R e z o l v a r e. Se scriu ecuaţiile sub forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \sin 2t; \\ y &= 5 \sin 2t \cos \frac{\pi}{3} + 5 \cos 2t \sin \frac{\pi}{3}, \end{aligned}\right\}$$

de unde:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2t &= \frac{x}{3}; \\ \cos 2t &= \frac{3y - 5x \cos \frac{\pi}{3}}{15 \sin \frac{\pi}{3}}. \end{aligned}\right\}$$

Eliminînd pe $2t$ între aceste expresii, rezultă:

$$\frac{x^2}{9 \sin^2 \frac{\pi}{3}} + \frac{y^2}{25 \sin^2 \frac{\pi}{3}} - \frac{2xy \cos \frac{\pi}{3}}{15 \sin^2 \frac{\pi}{3}} = 1$$

sau:

$$\frac{x^2}{\frac{27}{4}} + \frac{y^2}{\frac{75}{4}} - \frac{xy}{\frac{45}{4}} = 1;$$

adică ecuaţia unei elipse cu centrul în origine şi axele rotite.

24.B.4. Să se stabilească ecuaţia traiectoriei unui punct material care efectuează silmultan două vibraţii armonice pe direcţii ortogonale după ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} x &= 6 \cos 5t; \\ y &= 3 \cos 10t. \end{aligned}\right\}$$

R e z o l v a r e. Din prima ecuaţie se obţine:

$$\cos 5t = \frac{x}{6},$$

şi ţinînd seama de relaţia $\cos 2\omega t = 2 \cos^2 \omega t - 1$, se deduce:

$$y = 3(2 \cos^2 5t - 1).$$

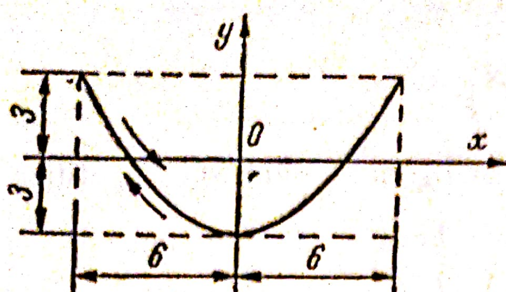


Fig. 24.B.4

sau:

$$y = \frac{x^2}{6} - 3.$$

adică o parabolă. Dar, $\cos x \in [-1, 1]$ şi în consecinţă $x \in [-6, 6]$ şi $y \in [-3, 3]$, deci punctul evoluează pe arcul de parabolă delimitat în acest domeniu (fig. 24.B.4).

24.B.5. Să se determine constanta elastică echivalentă şi pulsaţia proprie pentru sistemul elastic din figura 24.B.5, *a*, unde pentru arcurile elicoidale s-au dat: *n* — numărul de spire, *d* — diametrul sîrmei; *R* — — raza de înfăşurare, precum şi modulul de elasticitate transversal *G*.

Rezolvare. Constanta elastică a barei încastrate este (tabelul 24.1):

$$k_0 = \frac{3EI}{l^3}.$$

Constanta elastică a unui arc elicoidal este (tabelul 24.1):

$$k_i = \frac{Gd_i^4}{64R_i^3 n_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

şi sistemul elastic se prezintă ca în figura 24.B.5, *b*.

Se însumează arcurile de constante k_2 şi k_3 montate în paralel, obţinîndu-se pentru acestea constanta echivalentă:

$$k_{23} = k_2 + k_3$$

şi sistemul elastic se prezintă ca în figura 24.B.5, *c*.

Se însumează arcurile montate în serie din figura 24.B.5, *c*:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{23}} = \frac{k_0 k_{23} + k_1 k_{23} + k_0 k_1}{k_0 k_1 k_{23}},$$

obţinîndu-se constanta elastică echivalentă a sistemului:

$$k_e = \frac{k_0 k_1 k_{23}}{k_0 k_1 + k_0 k_{23} + k_1 k_{23}}.$$

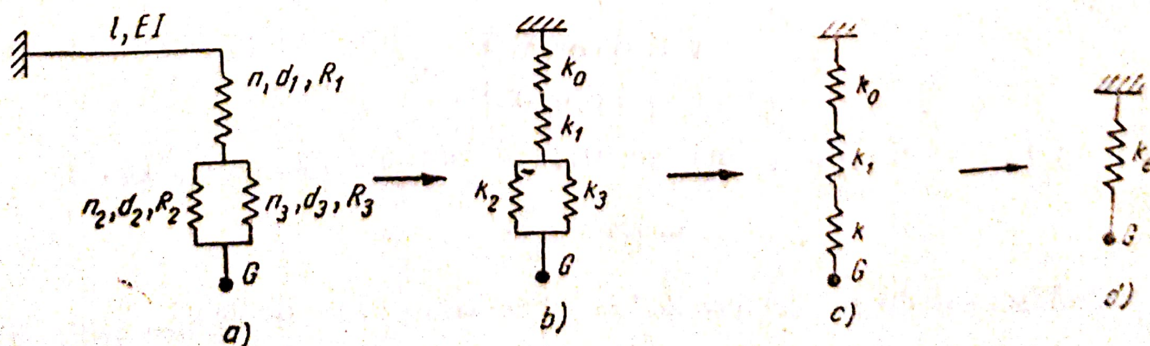


Fig. 24.B.5

Tabelul 24.1

Constante elastice pentru sisteme de masă neglijabilă

Sistemul	Deformația statică f_{st}	Constanta elastică k
	$\frac{64PR^3n}{Gd^4}$ n — numărul de spire d — diametrul sîrmei R — raza de înfășurare G — modulul de elasticitate transversal	$\frac{Gd^4}{64R^3n}$
	$\frac{Pa^2b^2}{3(a+b)EI}$ E — modulul de elasticitate longitudinal I — momentul de inerție geometric al secțiunii transversale	$\frac{3(a+b)EI}{a^2b^2}$
	$\frac{P(a+b)b^2}{3EI}$	$\frac{3EI}{(a+b)b^3}$
	$\frac{Pl^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{l^3}$
	$\frac{Pa^3b^3}{3(a+b)^3EI}$	$\frac{3EI(a+b)^3}{a^3b^3}$
	$\frac{32M_tl}{G\pi d^4}$	$\frac{\pi Gd^4}{32l}$
	$\frac{P}{k}$	$\frac{1}{k}=\sum_1^n \frac{1}{k_i}$
	$\frac{P}{k}$	$k=\sum_1^n k_i$

Pulsaţia proprie a sistemului dat este:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{gk_e}{G}} = \sqrt{\frac{gk_0k_1k_{23}}{G(k_0k_1 + k_0k_{23} + k_1k_{23})}}.$$

24.B.6. Să se stabilească frecvenţa proprie pentru micile oscilaţii ale coloanei de mercur dintr-un tub manometric cu ambele capete deschise. Lungimea coloanei de mercur este l, diametrul interior al tubului d şi greutatea specifică a mercurului γ (fig. 24.B.6). Se neglijează frecările.

Rezolvare. Coloana de mercur efectuează o mişcare de translaţie. Se scrie ecuaţia diferenţială a mişcării cînd denivelarea este x în ambele sensuri faţă de poziţia de repaus. Masa de mercur care oscilează este:

$$m = \frac{\gamma}{g} l \frac{\pi d^2}{4}.$$

Forţa care produce oscilaţia este:

$$F = \gamma 2x \frac{\pi d^2}{4}.$$

Deci, ecuaţia mişcării este:

$$\frac{\gamma}{g} l \frac{\pi d^2}{4} \ddot{x} = -\gamma 2x \frac{\pi d^2}{4}.$$

sau:

$$\ddot{x} + 2\frac{g}{l} x = 0.$$

Notînd pătratul pulsaţiei proprii $\omega^2 = \frac{2g}{l}$, frecvenţa proprie este:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

24.B.7. Se dă sistemul din figură 24.B.7, *a*, format din bara $OA = l$ de greutate G şi bila de greutate Q. Arcurile au constantele elastice k

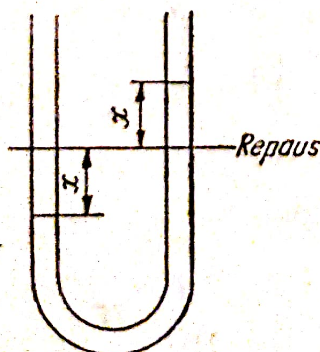
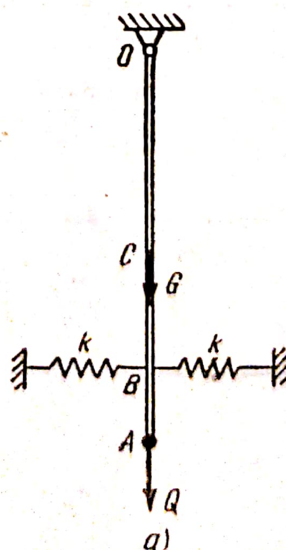


Fig. 24.B.6



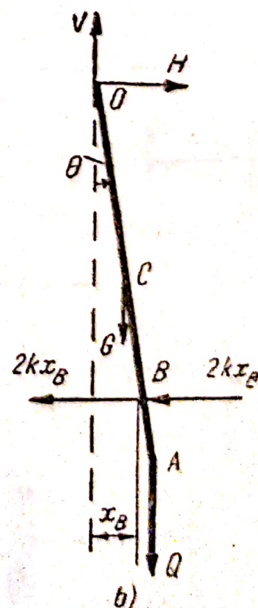


Fig. 24.B.7

şi sînt fixate la distanţa $OB = b$. Se cere să se calculeze perioada micilor oscilaţii faţă de poziţia de echilibru stabil.

R e z o l v a r e. Poziţia de echilibru este verticală.

Pentru studiul mişcării se utilizează ecuaţia de mişcare a rigidului cu o axă fixă, considerînd unghiul θ crescător (fig. 24.B.7, *b*):

$$J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0,$$

unde $J_0 = J_{o\,bară} + J_{o\,bilă} = \frac{Gl^2}{3g} + \frac{Ql^2}{g} = \left(\frac{G}{3} + Q\right)\frac{l^2}{g}$;

$$\Sigma M_0 = -G\frac{l}{2}\sin\theta - Ql\sin\theta - 2kx_B b\cos\theta.$$

Pentru micile oscilaţii $\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1$. Rezultă:

$$x_B = b\sin\theta \approx b\theta;$$

$$\Sigma M_0 = -G\frac{l}{2}\theta - Ql\theta - 2kb^2\theta.$$

Deci, ecuaţia de mişcare se scrie:

$$\ddot{\theta}\left(\frac{G}{3} + Q\right)\frac{l^2}{g} = -\left(2kb^2 + G\frac{l}{2} + Ql\right)\theta.$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{g\left(2kb^2 + G\frac{l}{2} + Ql\right)}{\left(\frac{G}{3} + Q\right)l^2}\theta = 0.$$

Notînd pătratul pulsaţiei proprii:

$$\omega^2 = \frac{g\left(2kb^2 + G\frac{l}{2} + Ql\right)}{\left(\frac{G}{3} + Q\right)l^2},$$

ecuaţia de mişcare capătă forma:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

de unde se deduce perioada micilor oscilaţii:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2(G + 3Q)l^2}{3g(4kb^2 + Gl + 2Ql)}}.$$

24.B.8. Se dă sistemul din figura 24.B.8, *a*, care are aceleaşi caracteristici mecanice cu cele ale sistemului de la problema 24.B.7, numai că bara OA este orizontală. Se cere să se calculeze perioada micilor oscilaţii.

R e z o l v a r e. Studiul echilibrului (fig. 24.B.8, *b*) se efectuează cu ecuaţia $\Sigma M_0 = 0$, adică:

$$G\frac{l}{2}\cos\theta_{st} + Ql\cos\theta_{st} - 2kx_{Bst}\,b\cos\theta_{st} = 0.$$

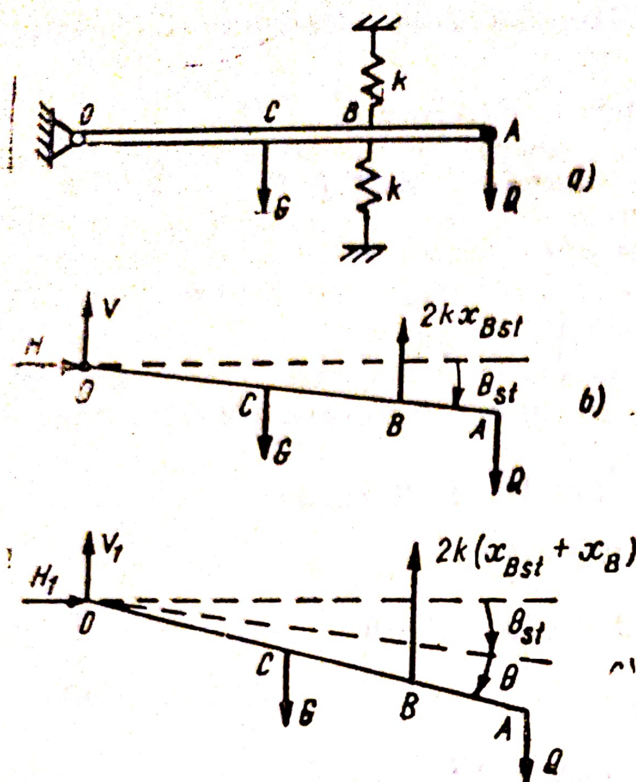


Fig. 24.B.8

Se aproximează $\cos\theta_{st} \approx 1$ și $\sin\theta_{st} \approx \theta_{st}$, de unde $x_{Bst} = b\sin\theta_{st} \approx b\theta_{st}$. Deci:

$$G\frac{l}{2} + Ql - 2kb^2\theta_{st} = 0. \quad \text{(a)}$$

Studiul mișcării se face cu ecuația

$$J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0,$$

(fig. 24.B.8, c), unde:

$$J_0 = \left(\frac{G}{3} + Q\right)\frac{l^2}{g};$$

$$\Sigma M_0 = G\frac{l}{2}\cos(\theta_{st} + \theta) + Ql\cos(\theta_{st} + \theta) - 2k(x_{Bst} + x_B)b\cos(\theta_{st} + \theta).$$

Se aproximează $\cos(\theta_{st}+\theta) \approx 1$ și $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, de unde:

$$x_{Bst} + x_B = b\sin(\theta_{st} + \theta) \approx b(\theta_{st} + \theta).$$

Urmează că:

$$\Sigma M_0 = G\frac{l}{2} + Ql - 2kb^2(\theta_{st} + \theta) = -2kb^2\theta,$$

unde s-a ținut seama de relația (a). Deci, ecuația diferențială a mișcării este:

$$\left(\frac{G}{3} + Q\right)\frac{l^2}{g}\ddot{\theta} = -2kb^2\theta,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{6kb^2g}{(G + 3Q)\,l^2}\theta = 0.$$

Comparînd această ecuație cu (24.7), se obține pătratul pulsației proprii:

$$\omega^2 = \frac{6kb^2g}{(G + 3Q)\,l^2},$$

de unde se deduce perioada micilor oscilații:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(G + 3Q)\,l^2}{6kb^2g}}.$$

24.B.9. Se dă sistemul din figura 24.B.9, *a* format dintr-o bară OA de lungime $6l$ și greutate G, articulată în O, pe care este fixată în D o greutate Q asimilată cu un punct material. Sistemul este suspendat cu

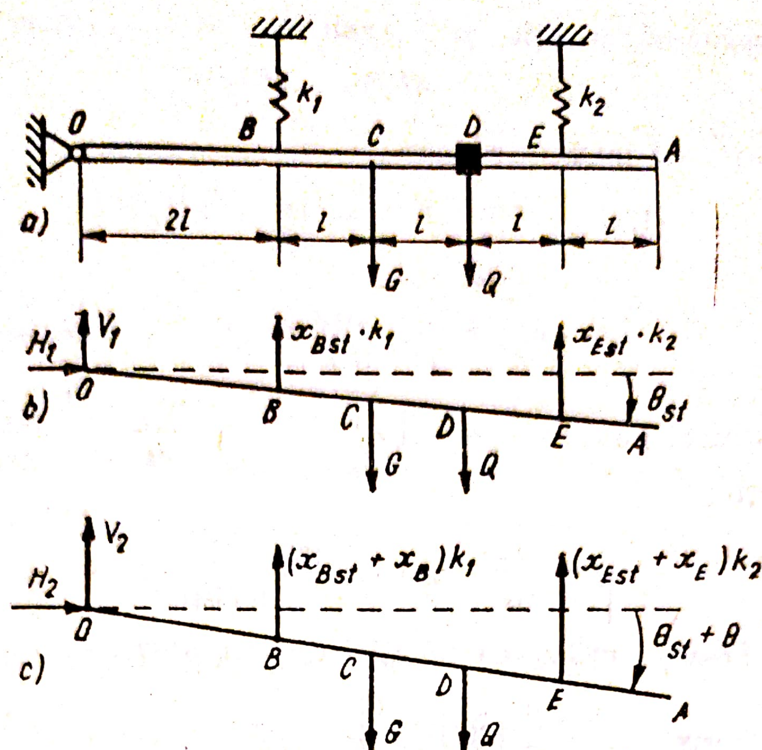


Fig. 24.B.9

două arcuri de constante elastice k_1 și k_2. Se cere să se calculeze perioada micilor oscilații.

R e z o l v a r e. *Metoda I.* Studiul echilibrului se face cu ecuația $\Sigma M_0 = 0$ (fig. 24.B.9, *b*).

În cazul micilor oscilații se aproximează $\cos\theta_{st} \approx 1$ și $\sin\theta_{st} \approx \theta_{st}$. În consecință,

$$x_{Bst} = 2l \sin\theta_{st} \approx 2l\theta_{st};$$

$$x_{Est} = 5l \sin\theta_{st} \approx 5l\theta_{st}.$$

Ținînd seama de aceste aproximații, ecuația de echilibru este:

$$3lG + 4lQ - 2lk_1x_{Bst} - 5lk_2x_{Est} = 0,$$

sau:

$$3lG + 4lQ - 4l^2k_1\theta_{st} - 25l^2k_2\theta_{st} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Mișcarea se studiază cu ecuația rigidului cu o axă fixă $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$ (fig. 24.B.9, *c*). În cazul micilor oscilații se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$; $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$. În consecință;

$$x_{Bst} + x_B = 2l \sin(\theta_{st} + \theta) \approx 2l(\theta_{st} + \theta);$$

$$x_{Est} + x_E = 5l \sin(\theta_{st} + \theta) \approx 5l(\theta_{st} + \theta).$$

Deci, în acest caz:

$$J_0 = J_{0\,bară} + J_{0\,punct} = \frac{G(6l)^2}{3g} + \frac{Q}{g}(4l)^2 = (12G + 16Q)\frac{l^2}{g};$$

$$\Sigma M_0 = 3lG + 4lQ - 2lk_1(x_{Bst} + x_B) - 5lk_2(x_{Est} + x_E) =$$

$$= 3lG + 4lQ - 4l^2k_1(\theta_{st} + \theta) - 25l^2k_2(\theta_{st} + \theta).$$

Ţinînd seama de relaţia (a), rezultă:

$$\Sigma M_0 = -4k_1 l^2\theta - 25k_2 l^2\theta.$$

Deci, ecuaţia de mişcare se scrie:

$$(12G + 16Q)\frac{l^2}{g}\ddot{\theta} = -(4k_1 + 25k_2)l^2\theta, \qquad \text{(b)}$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{g(4k_1 + 25k_2)}{12G + 16Q}\theta = 0.$$

Notînd pătratul pulsaţiei proprii $\omega^2 = \dfrac{g(4k_1 + 25k_2)}{12G + 16Q}$ se obţine perioada micilor oscilaţii:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{12G + 16Q}{g(4k_1 + 25k_2)}}.$$

Metoda a II-a — utilizarea ecuaţiei lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Energia cinetică a sistemului format din bară şi punct este:

$$E = \frac{1}{2}J_{0\,bară}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}(4l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\frac{(12G + 16Q)\,l^2}{g}\dot{\theta}^2,$$

de unde $\dfrac{\partial E}{\partial \theta} = 0$; $\dfrac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = J_0\dot{\theta}$; $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_0\ddot{\theta} = \dfrac{(12G + 16Q)\,l^2}{g}\ddot{\theta}.$

Funcţia de forţă U se scrie numai pentru forţele specifice fenomenului vibrator, adică pentru forţele elastice corespunzătoare deplasărilor în timpul vibraţiei (nu şi deplasărilor statice). Astfel:

$$U = -\frac{1}{2}k_1 x_B^2 - \frac{1}{2}k_2 x_E^2 = -\frac{1}{2}k_1(2l\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2(5l\theta)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}(4k_1 + 25k_2)l^2\theta^2,$$

de unde $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -(4k_1 + 25k_2)\,l^2\theta.$

Ecuaţia lui Lagrange, în cazul de faţă, este:

$$(12G + 16Q)\frac{l^2}{g}\ddot{\theta} + (4k_1 + 25k_2)\,l^2\theta = 0,$$

deci aceeaşi cu ecuaţia (b) stabilită anterior.

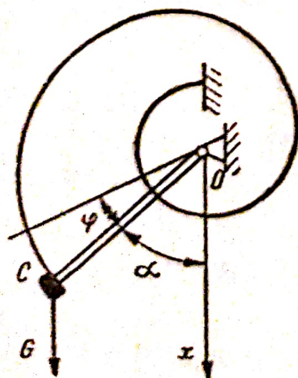


Fig. 24.B.10

24.B.10. Acul indicator al unui aparat de măsură situat într-un plan vertical poate fi modelat ca în figura 24.B.10. Cunoscîndu-se greutatea G, momentul de inerţie mecanic J_0 faţă de axa O, constanta elastică k a arcului, distanţa $OC = l$, precum şi unghiul α_0 cînd arcul nu este tensionat, unghiul α pentru

poziţia de repaus, se cere să se calculeze pulsaţia proprie pentru micile oscilaţii.

R e z o l v a r e. Se utilizează ecuaţiile lui Lagrange, alegînd ca parametru unghiul φ (crescător) faţă de poziţia de repaus.

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2.$$

Energia potenţială datorită greutăţii este:

$$V_1 = Gl[\cos\alpha - \cos(\alpha + \varphi)] = Gl[(1 - \cos\varphi)\cos\alpha + \sin\alpha\sin\varphi].$$

Pentru micile oscilaţii se fac aproximaţiile $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. În aceste condiţii rezultă:

$$V_1 = Gl\left(\frac{1}{2}\varphi^2\cos\alpha + \varphi\sin\alpha\right).$$

Energia potenţială datorită deformaţiei arcului este:

$$V_2 = \frac{1}{2}k(\alpha_0 - \alpha - \varphi)^2 = \frac{1}{2}k(\alpha_0 - \alpha)^2 - k(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{1}{2}k\varphi^2.$$

Deci, energia potenţială a sistemului este:

$$V = V_1 + V_2 = Gl\left(\frac{1}{2}\varphi^2\cos\alpha + \varphi\sin\alpha\right) - k(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{1}{2}k\varphi^2 + C,$$

unde $C = \frac{1}{2}k(\alpha_0 - \alpha)^2$ este o mărime constantă.

Condiţia de echilibru conduce la:

$$Gl\sin\alpha = k(\alpha_0 - \alpha),$$

încît, expresia finală a energiei potenţiale este:

$$V = \frac{1}{2}(Gl\cos\alpha + k)\varphi^2 = -U,$$

unde U este funcţia de forţă.

Ecuaţia lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

în cazul de faţă se scrie:

$$J\ddot{\varphi} + (Gl\cos\alpha + k)\varphi = 0,$$

sau:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gl\cos\alpha + k}{J}\varphi = 0;$$

comparînd această ecuaţie cu (24.7), rezultă pulsaţia proprie

$$\omega = \sqrt{\frac{Gl\cos\alpha + k}{J}}.$$

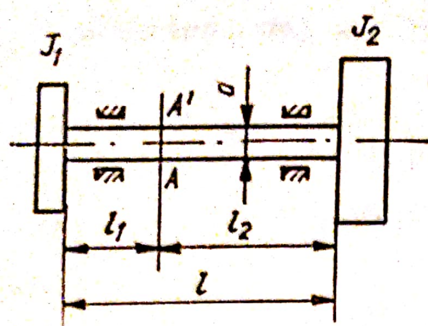


Fig. 24.B.11

24.B.11. Un electromotor al cărui rotor are momentul de inerţie mecanic axial J_1, antrenează un ventilator coaxial, care are momentul de inerţie mecanic axial J_2. Legătura este realizată printr-un arbore elastic cu diametrul d, lungimea l, masa neglijabilă şi modulul de elasticitate transversală G (fig. 24.B.11). Se cere să se calculeze pulsaţia proprie a sistemului pentru vibraţiile de răsucire, neglijînd frecările.

R e z o l v a r e. Vibraţiile de răsucire se efectuează după ce cele două rotoare au fost acţionate de cîte un moment (motor şi rezistent) de sens opus, care încetează simultan. În aceste condiţii momentul cinetic faţă de axa sistemului se conservă. Deoarece sistemul în momentul iniţial se află în repaus, cele două rotoare se rotesc în sensuri opuse, efectuînd o vibraţie de răsucire de aceeaşi pulsaţie, iar în arbore există o secţiune neutră AA', care rămîne fixă.

Ecuaţia diferenţială a vibraţiilor libere de răsucire este:

$$J\ddot{\theta} + k\theta = 0,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

unde s-a notat: $k = \frac{\pi d^4 G}{32l}$ — constanta elastică (conform tabelului 24.1);

$\omega^2 = \frac{k}{J}$ — pătratul pulsaţiei proprii.

Efectuînd calculele pentru cele două rotoare, rezultă pulsaţia proprie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{J_2}}, \tag{a}$$

de unde se obţine:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{J_1}{J_2}.$$

Dar $l_1 + l_2 = l$ şi, în consecinţă, rezultă:

$$l_1 = \frac{lJ_2}{J_1 + J_2}; \quad l_2 = \frac{lJ_1}{J_1 + J_2}.$$

Introducînd aceste rezultate în relaţia (a), se deduce expresia pulsaţiei proprii la vibraţii de răsucire:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G}{32 l_1 J_1}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G(J_1 + J_2)}{32 l J_1 J_2}}.$$

24.B.12. Se dă sistemul din figura 24.B.12, *a*, format dintr-un corp care poate oscila în jurul articulaţiei O, legat printr-un fir inextensibil de greutatea P. Corpul articulat în O este format dintr-un disc de rază R şi greutatea G, de care este fixată o bară AB de lungime $3R$ şi greutate

$3Q$, iar pe aceasta este montată o greutate Q asimilată cu un punct material. Sistemul este suspendat în D pe două arcuri de constante elastice k şi $2k$ montate în serie. Se cere să se calculeze pulsaţia proprie pentru micile oscilaţii ale acestui sistem de corpuri.

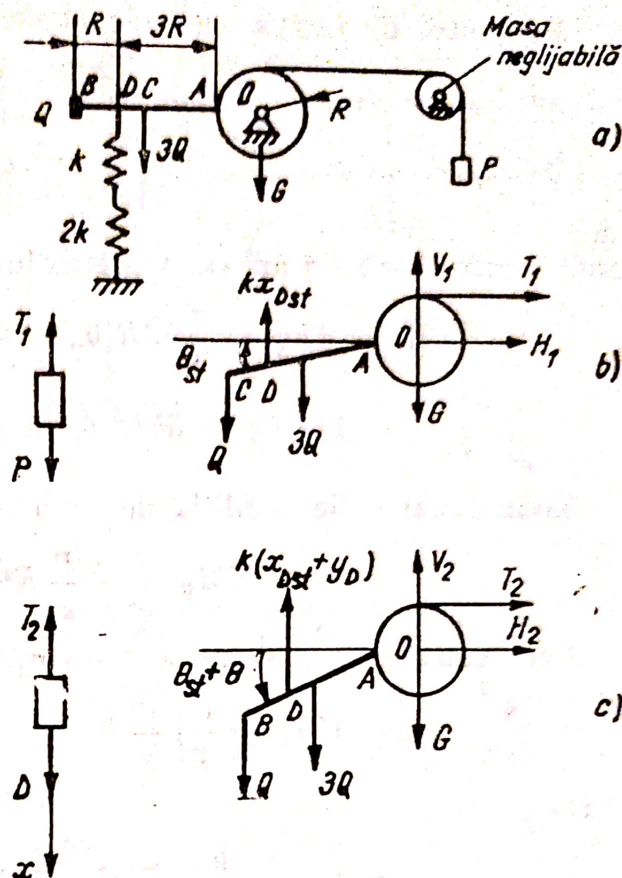


Fig. 24.B.12

R e z o l v a r e. Constanta elastică echivalentă a arcurilor este:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} = \frac{3}{2k},$$

de unde $k_e = \frac{2}{3}k$.

Metoda I. Studiul echilibrului se efectuează cu metoda izolării corpurilor (fig. 24.B.12, *b*). Pentru micile oscilaţii se aproximează

$$\cos\theta_{st} \approx 1; \quad \sin\theta_{st} \approx \theta_{st}, \quad \text{deci}$$

$$x_{Dst} = 3R\sin\theta_{st} \approx 3R\theta_{st}.$$

Ecuaţia de echilibru pentru corpul P conduce la $T_1 = P$.
Ecuaţia de echilibru pentru corpul articulat conduce la:

$$4RQ - \frac{2}{3}k3R\theta_{st}\,3R + 7{,}5QR - PR = 0,$$

de unde rezultă condiţia de echilibru:

$$11{,}5RQ - RP - 6kR^2\theta_{st} = 0. \tag{a}$$

Studiul mişcării se face separat pentru fiecare corp (fig. 24.B.12, *c*).
Ecuaţia de mişcare pentru corpul P, ţinînd seama că $a = \ddot{x} = R\ddot{\theta}$, este:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = T_2 - P,$$

de unde rezultă tensiunea dinamică din fir:

$$T_2 = P + \frac{P}{g}R\ddot{\theta}.$$

Ecuaţia de mişcare pentru corpul articulat este $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$.
Pentru micile oscilaţii se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$, $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, de unde $x_{Dst} + x_D = 3R\sin(\theta_{st} + \theta) \approx 3R(\theta_{st} + \theta)$.

Momentul de inerție mecanic al corpului față de axa O este

$$J_0 = J_{0\,disc} + J_{0\,bară} + J_{0\,punct} = \frac{GR^2}{2g} + \left[\frac{3Q(3R)^2}{12g} + \frac{3Q}{g}(2{,}5R)^2\right] + \frac{Q}{g}(4R)^2 =$$

$$= \left(37Q + \frac{G}{2}\right)\frac{R^2}{g},$$

unde pentru bară s-a aplicat teorema lui Steiner.

$$\Sigma M_0 = 4RQ - \frac{2}{3}k3R(\theta_{st} + \theta)3R + 7{,}5RQ - T_2R =$$

$$= 11{,}5RQ - 6kR^2(\theta_{st} + \theta) - \left(P + \frac{P}{g}R\ddot{\theta}\right)R.$$

Ținînd seama de condiția de echilibru (a), se obține:

$$\Sigma M_0 = -\frac{P}{g}R^2\ddot{\theta} - 6kR^2\theta.$$

Deci, ecuația de mișcare pentru corpul articulat se scrie:

$$\left(37Q + \frac{G}{2}\right)\frac{R^2}{g}\ddot{\theta} = -\frac{P}{g}R^2\ddot{\theta} - 6kR^2\theta,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{12gk}{74Q + G + 2P}\theta = 0. \qquad \text{(b)}$$

Comparînd această ecuație cu (24.7), rezultă pulsația proprie:

$$\omega = \sqrt{\frac{12gk}{74Q + G + 2P}}.$$

Metoda a II-a. Utilizarea ecuațiilor lui Lagrange, alegînd ca parametru variabil unghiul θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}. \qquad \text{(c)}$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\left(37Q + \frac{G}{2} + P\right)\frac{R^2\dot{\theta}^2}{g}.$$

Funcția de forță este:

$$U = -\frac{1}{2}k_e x_D^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}k(3R\theta)^2 = -3kR^2\theta^2.$$

Introducînd aceste mărimi în ecuația lui Lagrange (c), se obține ecuația de mișcare:

$$\left(37Q + \frac{G}{2} + P\right)\frac{R^2}{g}\ddot{\theta} + 6kR^2\theta = 0,$$

care după calcule simple se poate aduce la forma (b).

24.B.13. O bară OA de lungime l şi masă neglijabilă are fixat în A un corp asimilat cu un punct material de greutate G şi este legată în B cu un arc a cărui constantă elastică este k, iar în C cu un amortizor a cărui constantă de amortizare vîscoasă este c (fig. 24.B.13, *a*). Se cere să se calculeze, pentru micile oscilaţii, pseudopulsaţia şi pseudoperioada.

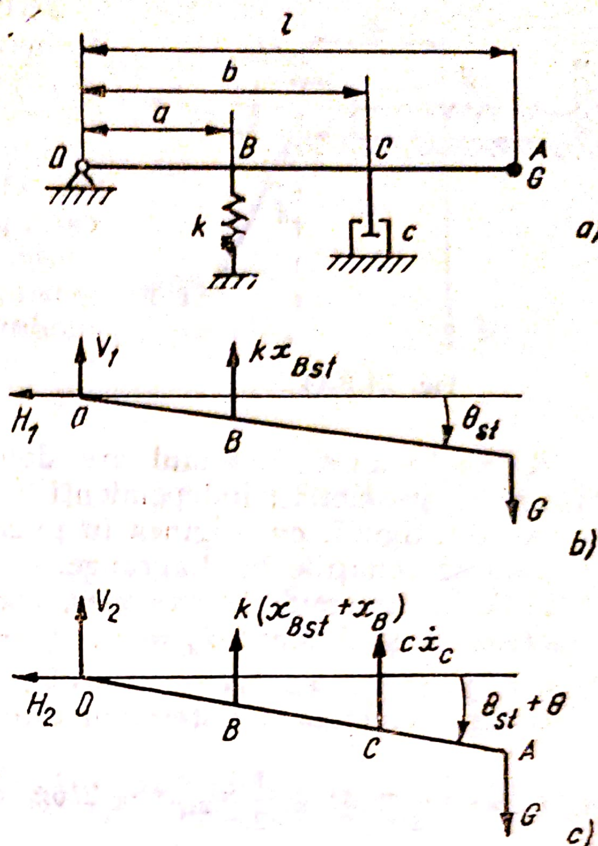


Fig. 24.B.13

R e z o l v a r e. Studiul echilibrului se face cu ecuaţia $\Sigma M_0 = 0$ (fig. 24.B.13, *b*). Se aproximează $\cos\theta_{st} \approx 1$ şi $\sin\theta_{st} \approx \theta_{st}$, deci $x_{Bst} \approx a\theta_{st}$. Condiţia de echilibru este:

$$lG - ka^2\theta_{st} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Ecuaţia de mişcare este $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$ (fig. 24.B.13, *c*). Se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$ şi $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, deci $x_{Bst} + x_B = a(\theta_{st} + \theta)$. Forţa elastică din B este $F_e = k(x_{Bst} + x_B) = ka(\theta_{st} + \theta)$. Forţa rezistentă din C este $F_r = c\dot{x}_c = cb\dot{\theta}$. Momentul de inerţie mecanic este $J_0 = \frac{G}{g} l^2$. Deci, ecuaţia de mişcare se scrie:

$$\frac{G}{g} l^2\ddot{\theta} = -ka^2(\theta_{st} + \theta) - cb^2\dot{\theta} + Gl.$$

Ţinînd seama de condiţia de echilibru (a), rezultă:

$$\frac{G}{g} l^2\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{cgb^2}{Gl^2}\dot{\theta} + \frac{gka^2}{Gl^2}\theta = 0.$$

Comparînd această ecuaţie cu (24.10) rezultă:

$$2\alpha = \frac{cgb^2}{Gl^2}; \quad \omega^2 = \frac{gka^2}{Gl^2}.$$

Deci, pseudopulsaţia, conform relaţiei (24.12), este:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{gka^2}{Gl^2} - \frac{c^2g^2b^4}{4G^2l^4}} = \frac{1}{2Gl^2}\sqrt{4gka^2l^2G - c^2g^2b^4}$$

iar pseudoperioada, conform relaţiei (24.17):

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \frac{2Gl^2}{\sqrt{4gka^2l^2G - c^2g^2b^4}}.$$

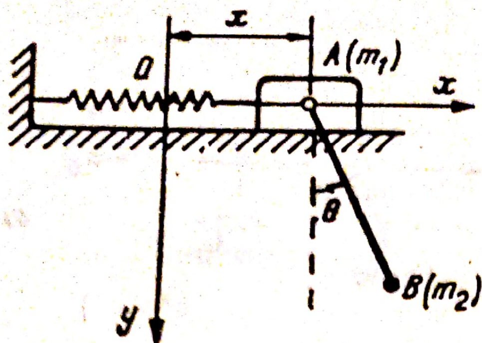


Fig. 24.B.14

24.B.14. Se dă sistemul din figura 24.B.14, format din punctul material A de masă m_1, prins cu un arc a cărui constantă elastică este k. În A este prins un pendul matematic AB de lungime l şi masă m_2. Se cere să se stabilească ecuaţiile de mişcare, pulsaţiile proprii, coeficienţii de distribuţie, modurile proprii de vibraţii, soluţia generală şi să se verifice ortogonalitatea modurilor proprii de vibraţii. Aplicaţie numerică: $m_1 = 2\,000$ kg; $m_2 = 1\,000$ kg; $l = 1$ m; $k = 1\,000$ N/m; $g \approx 10$ m/s^{-2}.

R e z o l v a r e. Sistemul are două grade de libertate şi se aleg ca parametri geometrici independenţi x şi θ, utilizînd în acest scop sistemul de axe din figură, cu originea în punctul A cînd acesta se află în repaus. Se folosesc ecuaţiile lui Lagrange.

Faţă de sistemul de axe ales, coordonatele şi componentele vitezelor punctelor A şi B sînt: $x_A = x$; $y_A = 0$; $x_B = x + l \sin\theta$; $y_B = l\cos\theta$; $\dot{x}_A = \dot{x}$, $\dot{y}_A = 0$; $\dot{x}_B = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$; $\dot{y}_B = -l\dot{\theta}\sin\theta$.

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2[\dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)] =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\theta}^2 + m_2 l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta.$$

Energia potenţială a sistemului este:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + m_2 gl(1 - \cos\theta).$$

În cazul micilor oscilaţii se aproximează pentru energia cinetică $\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1$, iar pentru energia potenţială $\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Deci:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2\dot{\theta}^2 + m_2 l\dot{\theta}\dot{x};$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + m_2 gl\frac{\theta^2}{2} = -U.$$

Se aplică ecuaţiile lui Lagrange sub forma (24.29), rezultînd:

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta} + kx = 0; \\ &m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2 gl\theta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Comparînd cu (24.32), se constată că $m_{11} = m_1 + m_2$; $m_{22} = m_2 l^2$; $m_{12} = m_{21} = m_2 l$; $k_{11} = k$; $k_{22} = m_2 gl$; $k_{12} = k_{21} = 0$. Deci sistemul este cuplat dinamic.

Soluţiile particulare sînt:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi); \qquad \theta = A_2 \sin(\omega t + \varphi). \qquad \text{(b)}$$

Introducînd (b) în (a), rezultă sistemul algebric:

$$\left.\begin{aligned}[k-(m_1+m_2)\omega^2]A_1-m_2l\omega^2A_2=0;\\ -\omega^2A_1+(g-l\omega^2)A_2=0.\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

Condiția ca să se obțină soluții nebanale este (24.35):

$$\Delta=\begin{vmatrix}k-(m_1+m_2)\,\omega^2 & -m_2l\omega^2\\ -\omega^2 & g-l\omega^2\end{vmatrix}=0.$$

Dezvoltînd determinantul, se deduce ecuația pulsațiilor proprii:

$$m_1l\omega^4-[g(m_1+m_2)+kl]\,\omega+gk=0,$$

de unde:

$$\omega_{12}^2=\frac{g(m_1+m_2)+kl\mp\sqrt{[g(m_1+m_2)+kl]^2-4m_1klg}}{2m_1l}. \qquad (d)$$

Din sistemul (c), cu rezultatele din (d), se obțin coeficienții de distribuție:

$$\mu_i=\frac{A_{2i}}{A_{1i}}=\frac{k-(m_1+m_2)\omega_i^2}{m_2l\omega_i^2}=\frac{\omega_i^2}{g-l\omega_i^2}\quad (i=1,\ 2). \qquad (e)$$

Rezultă amplitudinile $A_{21}=\mu_1A_{11}$ și $A_{22}=\mu_2A_{12}$.

În cazul aplicației numerice se deduc $\omega_1^2=0{,}32\,959$ și $\omega_2^2=15{,}17\,041$, deci pulsațiile proprii sînt:

$$\omega_1=0{,}57\,410\ \mathrm{s}^{-1};\qquad \omega_2=3{,}89\ 492\ \mathrm{s}^{-1}. \qquad (f)$$

Coeficienții de distribuție sînt:

$$\mu_1=0{,}03\,408;\qquad \mu_2=-2{,}93\,408. \qquad (g)$$

Ținînd seama de (24.38), precum și de (b), (f) și (g), modurile proprii de vibrații sînt:

(I) $$x_1=A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1);\ \theta_1=\mu_1A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1)=$$
$$=0{,}03\,408\ A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1);$$

(II) $$x_2=A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2);\ \theta_2=\mu_2A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2)=$$
$$=-2{,}93\,408\ A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2).$$

Soluția generală este:

$$\left.\begin{aligned}x=A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2);\\ \theta=\mu_1A_{11}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+\mu_2A_{12}\sin(\omega_2t+\varphi_2).\end{aligned}\right\}$$

Constantele de integrare A_{11}, A_{12}, φ_1 și φ_2 se determină cu condițiile inițiale.

Verificarea ortogonalității modurilor proprii, conform (24.39):

$$m_{11}A_{11}A_{12}+m_{22}A_{21}A_{22}+m_{12}A_{11}A_{22}+m_{21}A_{21}A_{12}=$$
$$=(m_1+m_2)A_{11}A_{12}+m_2l^2\mu_1A_{11}\mu_2A_{12}+m_2lA_{11}\mu_2A_{12}+m_2l\mu_1A_{11}A_{12}.$$

Făcînd înlocuirile numerice se obține $A_{11}A_{12}\cdot 6{,}6\cdot 10^{-3}\approx 0$, deci se consideră relația verificată, eroarea fiind foarte mică.

Capitolul 25

DINAMICA PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

25.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Se consideră un punct material a cărui masă este variabilă în timp după o lege cunoscută $m = m(t)$ şi asupra căruia acţionează forţa $\bar{F}$. El are la momentul t masa m şi viteza absolută $\bar{v}$, iar la un moment infinit apropiat $t + dt$, masa $m + dm$ şi viteza absolută $\bar{v} + d\bar{v}$. Cantitatea dm este pozitivă cînd masa punctului material creşte, deci cînd la punct se alipesc particule materiale de masă dm, şi negativă cînd masa punctului material descreşte, deci cînd din punct se desprind particule materiale de masă dm.

Se presupune că $dm > 0$ şi că particula care se alipeşte la punctul material are, înainte de alipire, viteza absolută $\bar{u}$ (fig. 25.A.1). Alipirea se va face astfel cu viteza relativă:

$$\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}.$$

Aplicînd teorema variaţiei cantităţii de mişcare sistemului format din cele două puncte materiale avînd masele m şi dm se obţine, dacă se neglijează infinitul mic de ordin superior $(dm \cdot d\bar{v})$:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{v}_r; \quad \left(\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}\right). \tag{25.1}$$

Ecuaţia (25.1) este cunoscută sub denumirea de *ecuaţia lui I.V. Mescerski*. Termenul $\frac{dm}{dt}\bar{v}_r$ se numeşte forţă reactivă. Ea are direcţia vitezei relative $\bar{v}_r$ şi sensul lui $\bar{v}_r$ sau opus lui $\bar{v}_r$, după cum masa m a punctului material creşte sau descreşte.

Dacă în acelaşi timp la punctul material de masă m se alipesc şi se desprind particule şi dacă se notează cu m_0 masa punctului la momentul iniţial, cu m_1 şi m_2 masele particulelor desprinse, respectiv alipite pînă la momentul t, iar cu $\bar{v}_{r1}$, $\bar{v}_{r2}$ vitezele lor relative, masa punctului material la momentul t va fi: $m = m_0 - m_1 + m_2$, iar ecuaţia (25.1) devine:

$$m\bar{a} = \bar{F} - \frac{dm_1}{dt}\bar{v}_{r1} + \frac{dm_2}{dt}\bar{v}_{r2}, \tag{25.2, a}$$

sau:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F} - \frac{dm_1}{dt}\bar{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\bar{u}_2. \tag{25.2, b}$$

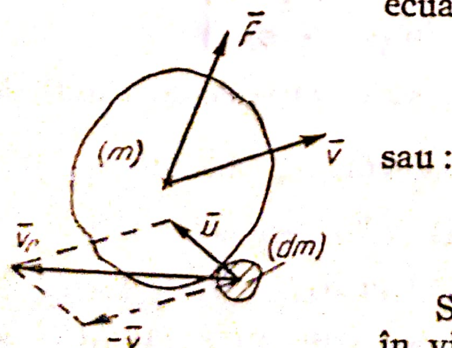


Fig. 25.A.1

Se presupune acum o rachetă care se mişcă în vid şi care este acţionată exclusiv de forţa reactivă. Ea are, la momentul iniţial $t = 0$, masa

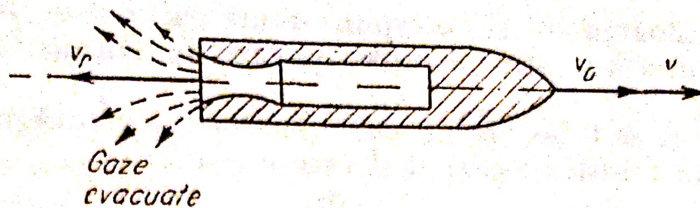


Fig. 25.A.2

m_0 şi viteza v_0, iar viteza de ieşire a gazelor de ardere din motorul rachetei este $v_r =$ constant şi are aceeaşi direcţie cu v_0 şi sens opus lui v_0 (fig. 25.A.2).

Aplicînd ecuaţia (25.1) proiectată pe direcţia mişcării şi integrînd apoi ecuaţia obţinută, între momentele $t = 0$ şi t, rezultă:

$$v = v_0 + v_r \cdot ln \frac{m_0}{m} . \qquad (25.3)$$

Formula (25.3) este cunoscută sub denumirea de *formula lui C.E. Ţiolkovski*. Raportul $z = \frac{m_0}{m_f}$, în care m_f este masa finală a rachetei, se numeşte *numărul lui Ţiolkovski*.

25.B. APLICAŢII LA DINAMICA PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

25.B.1. Un corp A de masă M este legat la unul din capetele unui lanţ omogen avînd lungimea l şi densitatea liniară ρ. O parte a lanţului, de lungime x_0, situată la capătul legat de corpul A, atîrnă vertical, iar restul, de lungime $l - x_0$, este încolăcit pe sol (fig. 25.B.1). Corpul A este lansat din această poziţie pe verticală, în sus, cu viteza v_0.

Se cere să se determine viteza v a corpului A în funcţie de distanţa sa de la sol, notată cu x, şi înălţimea maximă h la care el se ridică. Se neglijează rezistenţa aerului, iar acceleraţia gravitaţională g este considerată constantă.

Rezolvare. Aplicînd sistemului format din corpul A şi lanţ teorema variaţiei cantităţii de mişcare proiectată pe direcţia mişcării, rezultă:

$$\frac{d}{dt}[(M + \rho x) v] = -(M + \rho x) g.$$

Se amplifică ecuaţia obţinută cu $(M + \rho x)v dt$, se integrează şi se pun apoi condiţiile iniţiale $t = 0$; $v = v_0$; $x = x_0$ pentru a determina constanta de integrare. Se obţine:

$$v^2 = \frac{(M+\rho x_0)^2 v_0^2 - 2g[M^2(x-x_0) + M\rho(x^2-x_0^2) + \frac{1}{3}\rho^2(x^3-x_0^3)]}{(M+\rho x)^2} . \qquad (a)$$

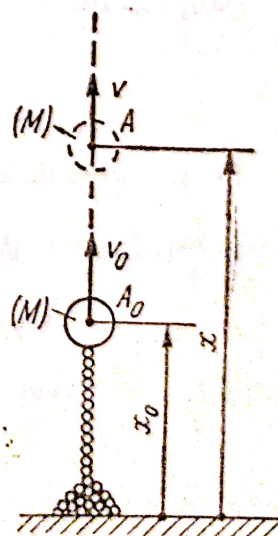


Fig. 25.B.1

Relaţia (a) este valabilă pentru $x \leq l$. Pentru $x > l$ viteza este dată de relaţia: $v^2 = v_1^2 - 2g(x - l)$,

în care v_1 este valoarea lui v corespunzătoare lui $x = l$, adică momentului în care lanțul este întins complet și care se obține făcînd $x = l$ în relația (a).

Dacă se face $v_1 = 0$ se obține valoarea lui v_0, notată v_0', pentru care înălțimea maximă atinsă de corpul A este $h = l$:

$$v_0'^2 = 2g \frac{M^2(l - x_0) + M\rho(l^2 - x_0^2) + \dfrac{1}{3}\rho^2(l^3 - x_0^3)}{(M + \rho x_0)^2}.$$

Pentru $v_0 < v_0'$ înălțimea maximă atinsă de corpul A se obține făcînd în relația (a) $v = 0$ și $x = h$. Rezultă, după unele transformări:

$$h = \frac{M}{\rho}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{M + \rho x_0}{M}\right)^2\left(\frac{3\rho}{2M}\cdot\frac{v_0^2}{g} + \frac{\rho x_0}{M} + 1\right)} - 1\right].$$

Pentru $v_0 > v_0'$ vom avea: $h = l + \dfrac{v_1^2}{2g}$.

25.B.2. Două corpuri A și B avînd masele M_1 și M_2 sînt legate la cele două capete ale unui lanț omogen de lungime l și densitate liniară ρ. Întregul sistem format din cele două corpuri și lanț este așezat pe un plan orizontal. Coeficienții de frecare de alunecare ai celor două corpuri cu planul orizontal sînt respectiv μ_1 și μ_2, iar al lanțului μ'. O parte a lanțului, de lungime x_0, aflată la capătul legat de corpul A, este întinsă pe planul orizontal, iar cealaltă parte, de lungime $l - x_0$, este încolăcită în fața corpului B. Din această poziție corpul A este lansat pe planul orizontal cu viteza v_0 (fig. 25.B.2). Se cer viteza v_1 a corpului A în funcție de distanța $BA = x$ dintre cele două corpuri, viteza v' care se imprimă întregului sistem în momentul desfășurării complete a lanțului, precum și distanța D parcursă de sistem din acest moment pînă la oprire.

R e z o l v a r e. Se aplică sistemului teorema variației cantității de mișcare proiectată pe direcția mișcării:

$$\frac{d}{dt}[(M_1 + \rho x)v_1] = -g(\mu_1 M_1 + \mu'\rho x).$$

Amplificînd această ecuație cu $(M_1 + \rho x)v_1 \cdot dt$, rezultă:

$$[(M_1 + \rho x)v_1]\cdot d[(M_1 + \rho x)v_1] =$$
$$= -g[\mu_1 M_1^2 + (\mu_1 + \mu')M_1\rho x + \mu'\rho^2 x^2]\,dx.$$

Se integrează ecuația obținută:

$$\frac{1}{2}(M_1 + \rho x)^2 v_1^2 = -g\left[\mu_1 M_1^2 x + (\mu_1 + \mu')M_1\rho\frac{x^2}{2} + \mu'\rho^2\frac{x^3}{3}\right] + C.$$

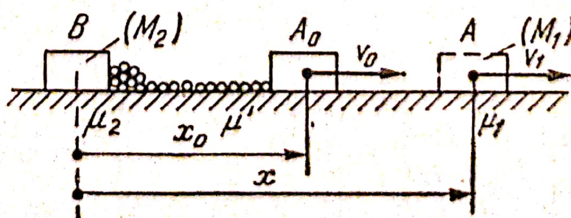


Fig. 25.B.2

Punînd condiţiile iniţiale: $t = 0$; $v_1 = v_0$; $x = x_0$ în relaţia precedentă rezultă valoarea constantei de integrare C şi apoi viteza v_1:

$$v_1^2 = \frac{(M_1 + \rho x_0)^2 v_0^2 - 2g\left[\mu_1 M_1^2(x - x_0) + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu')M_1\rho(x^2 - x_0^2) + \frac{1}{3}\mu'\rho^2(x^3 - x_0^3)\right]}{(M_1 + \rho x)^2}.$$

Făcînd în relaţia de sus $x = l$, rezultă $v_1 = v'_1$, ceea ce reprezintă valoarea vitezei corpului A în momentul întinderii întregului lanţ, dar înainte de a fi pus în mişcare corpul B. În momentul punerii în mişcare a corpului B, moment care este echivalent cu o ciocnire plastică, cantitatea de mişcare a întregului sistem se conservă. Rezultă:

$$(M_1 + \rho l)v_1' = (M_1 + M_2 + \rho l)v', \text{ de unde: } v' = \frac{M_1 + \rho l}{M_1 + M_2 + \rho l}v_1'.$$

Aplicînd apoi, după întinderea completă a lanţului şi punerea în mişcare a corpului B, teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic, întregului sistem, între momentul punerii în mişcare a corpului B şi momentul opririi sistemului, se obţine:

$$D = \frac{M_1 + M_2 + \rho l}{2g(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \mu'\rho l)}v'^2.$$

Din relaţia care dă pe v_1 se poate obţine, făcînd $x = l$ şi $v_1 = 0$, valoarea vitezei iniţiale, notată v_0', pentru care corpul A se opreşte chiar în momentul desfăşurării întregului lanţ:

$$v_0'^2 = 2g\frac{\mu_1 M_1^2(l - x_0) + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu')M_1\rho(l^2 - x_0^2) + \frac{1}{3}\mu'\rho^2(l^3 - x_0^3)}{(M_1 + \rho x_0)^2}.$$

Dacă $v_0 < v'_0$ corpul A se opreşte înainte de desfăşurarea întregului lanţ.

Se menţionează că pentru ca partea din lanţ care este întinsă la un moment dat să rămînă tot timpul sub tensiune (întinsă), trebuie ca $\mu_1 < \mu' < \mu_2$.

Observaţie.

Dacă în problema (25.B.2) se face $M_2 = 0$ şi $\mu_1 = \mu' = 0$, rezultă una din problemele lui Cayley. În acest caz se va obţine:

$$v_1 = \frac{M_1 + \rho x_0}{M_1 + \rho x}v_0.$$

Înlocuind în această relaţie $v_1 = \frac{dx}{dt}$ şi integrînd, se obţine ecuaţia:

$$\rho(x^2 - x_0^2) + 2M_1(x - x_0) = 2(M_1 + \rho x_0)v_0 t,$$

din care se poate obţine abscisa x la fiecare moment t, precum şi timpul t_1 necesar pentru desfăşurarea completă a lanţului ($t = t_1$ pentru $x = l$).

25.B.3. Cum trebuie să varieze masa unei rachete pentru ca racheta să se mişte vertical, în sus, cu viteză constantă v_0, dacă viteza relativă de scurgere a gazelor din motorul rachetei este constantă şi egală cu v

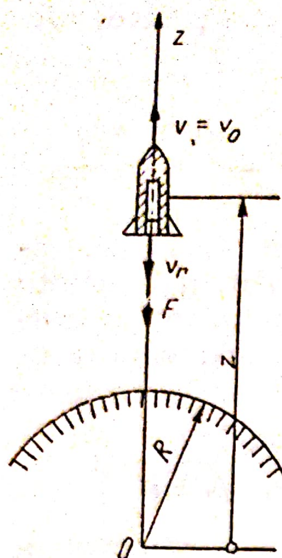


Fig. 25.B.3

și dacă se ține seama de variația forței de atracție a Pămîntului cu altitudinea. Se dă raza Pămîntului R, accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului g_p, masa inițială a rachetei m_0 și înălțimea inițială h_0. Rezistența aerului se neglijează.

R e z o l v a r e. Se consideră axa de coordonate Oz cu originea în centrul Pămîntului (fig. 25.B.3).

Forța de atracție a Pămîntului este $F = k\frac{M \cdot m}{z^2}$, în care k este constanta atracției universale, M — masa Pămîntului, m — masa rachetei, z — distanța de la centrul Pămîntului la rachetă.

Aplicînd această formulă la suprafața Pămîntului rezultă:

$$k\frac{M \cdot m}{R^2} = mg_p, \text{ de unde } kM = g_pR^2, \text{ deci } F = \frac{g_pR^2m}{z^2}.$$

Se aplică ecuația (25.1) proiectată pe direcția Oz și se ține seama că $\frac{dv}{dt} = 0$. Se obține:

$$0 = -\frac{g_pR^2m}{z^2} - v_r\frac{dm}{dt} \quad \text{sau} \quad \frac{dm}{m} = -\frac{g_pR^2}{v_rz^2}\,dt.$$

Se amplifică ecuația obținută cu v_0, se înlocuiește $v_0dt = dz$ și se integrează ținînd seama de condițiile inițiale: $t = 0$, $m = m_0$, $z = R+h_0$. Rezultă legea de variație a masei rachetei în raport cu înălțimea sau în raport cu timpul, dacă se ține seama că $z = R + h_0 + v_0t$:

$$m = m_0e^{\frac{g_pR^2}{v_0v_r}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R+h_0}\right)} = m_0e^{-\frac{g_pR^2t}{v_r(R+h_0)(R+h_0+v_0t)}}.$$

25.B.4. O navă cosmică de masă m_0 se mișcă în spațiu cu viteza v_0. Ea întîlnește un nor de praf cosmic de lungime l și densitate ρ, care se află în repaus și pe care îl traversează. Considerînd că aria suprafeței frontale a navei cosmice este S și că praful cosmic care lovește nava se lipește de suprafața ei frontală, mărindu-i masa inițială, se cere să se determine viteza v_1 a navei după traversarea norului de praf cosmic și timpul t_1 de traversare. Se consideră că asupra navei cosmice nu acționează nici o forță exterioară.

R e z o l v a r e. Masa m_2 de praf cosmic atașată la un moment dat t la masa inițială m_0 a navei cosmice este $m_2 = \rho Sx$, în care x este distanța parcursă de navă în interiorul norului de praf cosmic (fig. 25.B.4), iar masa navei cosmice la același moment va fi: $m = m_0 + m_2 = m_0 + \rho Sx$.

Se aplică apoi ecuația (25.2, a) proiectată pe direcția mișcării, în care se introduc: $\bar{F} = 0$, $m_1 = 0$, $\bar{v}_{r2} = -\bar{v}$, $dm = dm_2 = \rho S \cdot dx$. Rezultă:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}v, \text{ adică: } \frac{dv}{v} = -\frac{dm}{m}.$$

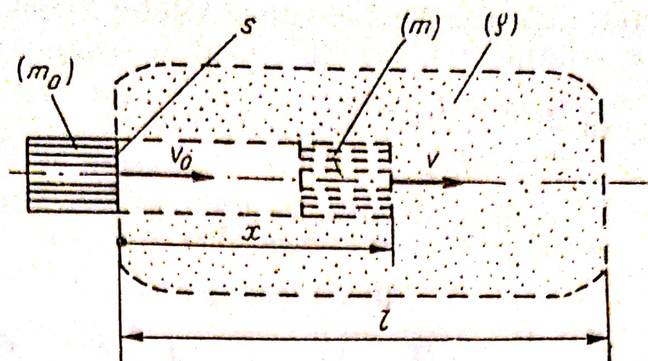


Fig. 25.B.4

Integrînd ultima ecuaţie şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale: $t = 0$, $v = v_0$, $m = m_0$, se obţine:

$$v = v_0 \frac{m_0}{m} = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \rho S x}; \tag{a}$$

$$v_1 \doteq v_0 \frac{m_0}{m_0 + \rho S l}.$$

Integrînd, în raport cu timpul, ecuaţia notată cu (a) şi ţinînd seama că la $t = 0$ avem $x = 0$, se obţine ecuaţia de mişcare:

$$\rho S x^2 + 2 m_0 x = 2 m_0 v_0 t.$$

De aici se obţine: $t_1 = \dfrac{\rho S l + 2m_0}{2 m_0 v_0} l.$

25.B.5. Să se găsească legea de mişcare $x = x(t)$ şi legea de variaţie a masei unei rachete care este lansată pe verticală, în sus, de la înălţimea x_0, cu viteza v_0 şi care se mişcă cu acceleraţia a = constant. Se cere, de asemenea, înălţimea totală h_1 la care se ridică racheta avînd în vedere şi urcarea rachetei după terminarea arderii combustibilului. Se cunosc masa iniţială m_0 şi masa finală m_f ale rachetei, precum şi viteza v_r de ieşire a gazelor de ardere din motorul rachetei, care este constantă.

Se neglijează rezistenţa aerului şi variaţia acceleraţiei gravitaţionale g cu altitudinea.

R e z o l v a r e. Viteza rachetei şi înălţimea ei (notată cu x) la un moment dat sînt:

$$v = v_0 + at; \tag{a}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{b}$$

Se proiectează apoi ecuaţia (25.1) pe direcţia mişcării şi se obţine:

$$ma = -mg - \frac{dm}{dt} v_r, \text{ de unde } \frac{dm}{m} = -\frac{a+g}{v_r} dt.$$

Integrînd şi ţinînd seama că la $t = 0$ avem $m = m_0$, se obţine legea de variaţie a masei rachetei:

$$m = m_0 e^{-\frac{a+g}{v_r} t}. \tag{c}$$

În momentul terminării arderii combustibilului avem $t = t_f$ şi $m = m_f$ şi, ca urmare, din relaţiile (c), (a), (b) rezultă, respectiv:

$$t_f = \frac{v_r}{a+g} \cdot \ln \frac{m_0}{m_f} = \frac{v_r}{a+g} \cdot \ln z; \quad v_f = v_0 + \frac{a}{a+g} v_r \cdot \ln z;$$

$$x_f = x_0 + \frac{v_0 v_r}{a+g} \cdot \ln z + \frac{1}{2} \frac{a}{(a+g)^2} v_r^2 \cdot \ln^2 z, \quad \text{unde } z = \frac{m_0}{m_f}.$$

Înălţimea totală la care se ridică racheta este:

$$h_1 = x_f + \frac{v_f^2}{2g} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0 v_r}{g} \cdot \ln z + \frac{a}{a+g} \cdot \frac{v_r^2}{2g} \cdot \ln^2 z.$$

25.B.6. Pentru cercetarea straturilor superioare ale atmosferei se foloseşte o rachetă cu trei trepte care este lansată de la sol vertical, în sus, fără viteză iniţială ($v_0 = 0$). Raportul între încărcătura utilă a fiecărei trepte şi restul masei rachetei fără combustibilul acelei trepte este $\varepsilon = 1/2$, iar vitezele relative de scurgere a gazelor din motoarele celor trei trepte sînt respectiv: $v_{r1} = 2\,200$ m/s, $v_{r2} = 2\,400$ m/s, $v_{r3} = 2\,800$ m/s. Cunoscînd timpul de ardere a combustibilului pentru fiecare treaptă: $\tau_1 = 30$ s, $\tau_2 = 40$ s, $\tau_3 = 50$ s; viteza atinsă de fiecare treaptă a rachetei după arderea integrală a combustibilului acelei trepte: $v_1 = 2\,500$ m/s, $v_2 = 5\,000$ m/s, $v_3 = 8\,000$ m/s şi masa aparaturii de cercetare care trebuie lansată în atmosferă $m_S = 100$ kg, se cere să se afle masa iniţială a rachetei şi cantitatea de combustibil necesară fiecărei trepte. Se va neglija rezistenţa aerului, variaţia acceleraţiei gravitaţionale g cu altitudinea şi efectul rotaţiei Pămîntului.

(Prin încărcătură utilă a unei trepte date se înţelege masa iniţială a tuturor treptelor următoare, iar pentru ultima treaptă masa satelitului propriu-zis sau masa aparaturii lansată pentru cercetare).

R e z o l v a r e. Se introduc următoarele notaţii (fig. 25.B.6):

m_S = masa aparaturii sau satelitului = încărcătura utilă a treptei a treia;

m_3 = masa rachetei fără prima şi a doua treaptă şi fără combustibilul treptei a treia;

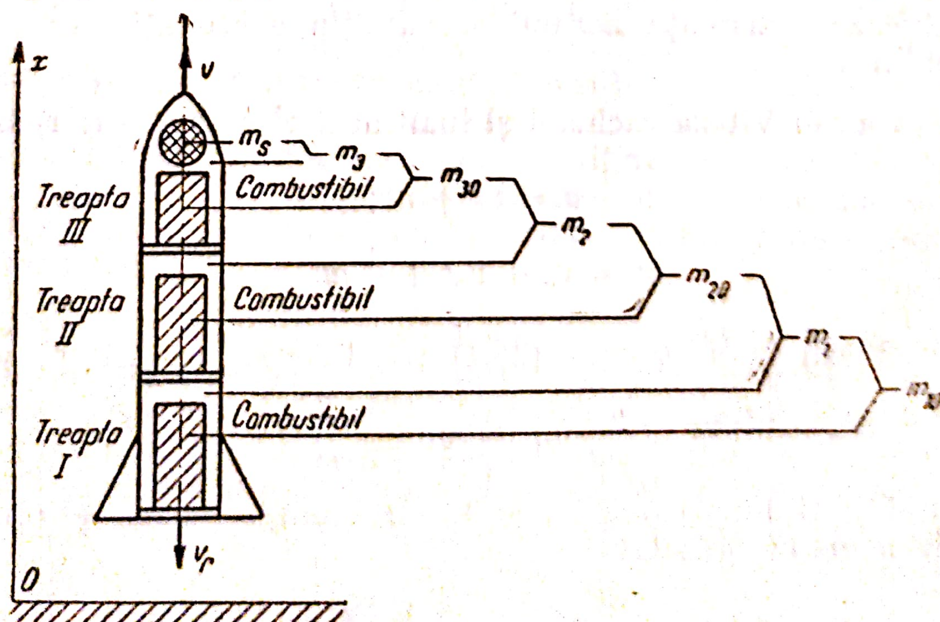


Fig. 25.B.6

m_{30} = masa inițială a treptei a treia (cu aparatura sau satelitul) = încărcătura utilă a treptei a doua;
m_2 = masa rachetei fără prima treaptă și fără combustibilul treptei a doua;
m_{20} = suma maselor inițiale ale treptelor a doua și a treia (cu aparatura sau satelitul) = încărcătura utilă a treptei întîi;
m_1 = masa rachetei fără combustibilul treptei întîi;
m_{10} = masa inițială a rachetei.

Proiectînd relația (25.1) pe direcția mișcării, adică pe verticală, se obține, pentru o treaptă oarecare a rachetei:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}v_r, \quad \text{sau:} \quad dv = -gdt - v_r\frac{dm}{m},$$

Integrînd și ținînd seama că la $t = 0$, $v = v_0$ și $m = m_0$, rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r \cdot \ln\frac{m_0}{m}. \tag{a}$$

Dacă se ține seama de notațiile introduse și de faptul că viteza finală a unei trepte este viteză inițială pentru treapta următoare; la sfîrșitul perioadei de ardere a combustibilului fiecărei trepte se obține conform relației (a):

$$v_1 = -g\tau_1 + v_{r1} \cdot \ln\frac{m_{10}}{m_1}; \quad v_2 = v_1 - g\tau_2 + v_{r2} \cdot \ln\frac{m_{20}}{m_2};$$

$$v_3 = v_2 - g\tau_3 + v_{r3} \cdot \ln\frac{m_{30}}{m_3}. \tag{b}$$

Din relațiile (b) se obțin numerele lui Țiolkovski:

$$z_1 = \frac{m_{10}}{m_1} = e^{\frac{v_1 + g\tau_1}{v_{r1}}}; \quad z_2 = \frac{m_{20}}{m_2} = e^{\frac{v_2 - v_1 + g\tau_2}{v_{r2}}};$$

$$z_3 = \frac{m_{30}}{m_3} = e^{\frac{v_3 - v_2 + g\tau_3}{v_{r3}}},$$

iar apoi, avînd în vedere că:

$$\varepsilon_1 = \frac{m_{20}}{m_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{m_{30}}{m_2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{m_S}{m_3}, \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon), \tag{c}$$

se obține succesiv:

$$m_3 = \frac{m_S}{\varepsilon_3}; \qquad m_{30} = m_3 z_3 = m_S\frac{z_3}{\varepsilon_3};$$

$$m_2 = \frac{m_{30}}{\varepsilon_2} = m_S\frac{z_3}{\varepsilon_2\varepsilon_3}; \qquad m_{20} = m_2 z_2 = m_S\frac{z_2 z_3}{\varepsilon_2\varepsilon_3};$$

$$m_1 = \frac{m_{20}}{\varepsilon_1} = m_S\frac{z_2 z_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}; \qquad m_{10} = m_1 z_1 = m_S\frac{z_1 z_2 z_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}.$$

Rezultă apoi masa de combustibil necesară pentru fiecare din cele trei trepte ale rachetei:

$$m_{c1} = m_{10} - m_1 = m_S \frac{z_2 z_3((z_1 - 1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}; \quad m_{c2} = m_{20} - m_2 = m_S \frac{z_3(z_2 - 1)}{\varepsilon_2 \varepsilon_3};$$

$$m_{c3} = m_{30} - m_3 = m_S \frac{z_3 - 1}{\varepsilon_3}.$$

Introducînd datele numerice se obţine:

$$z_1 = 3{,}561; \quad z_2 = 3{,}337; \quad z_3 = 3{,}478;$$

$$m_{10} = 33\,063 \text{ kg}; \quad m_{c1} = 23\,778 \text{ kg}; \quad m_{c2} = 3\,251 \text{ kg}; \quad m_{c3} = 496 \text{ kg}.$$

25.B.7. O rachetă este lansată pe verticală, în sus, de la înălţimea x_0, cu viteza v_0 (fig. 25.B.7). Viteza v_r de ieşire a gazelor de ardere din motorul rachetei este constantă. Masa iniţială a rachetei este m_0, iar masa finală este m_f.

Se cere să se determine viteza v a rachetei în funcţie de masa m a acesteia la un moment dat şi de timpul t. Presupunînd apoi că masa rachetei variază după legile: 1) $m = m_0(1 - \alpha t)$ şi 2) $m = m_0 e^{-\alpha t}$, în care α este o constantă dată care caracterizează legea de ardere a combustibilului, se cere să se găsească: legea de mişcare a rachetei, viteza v_f şi înălţimea h_f atinse de rachetă în momentul terminării arderii combustibilului, forţa de reacţie F_r şi acceleraţia rachetei a, precum şi înălţimea totală h_1 atinsă de rachetă (inclusiv înălţimea cîştigată din energia cinetică pe care o are racheta în momentul terminării arderii combustibilului).

Să se determine apoi legea de variaţie a masei rachetei (legea de ardere a combustibilului) pentru care, cu cantitatea de combustibil $(m_0 - m_f)$ dată, înălţimea totală h_1 atinsă de rachetă este maximă.

Se va neglija rezistenţa aerului şi variaţia acceleraţiei gravitaţionale g cu altitudinea.

Rezolvare. Se aplică ecuaţia (25.1) proiectată pe direcţia mişcării:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} v_r, \quad \text{sau:} \quad dv = -g dt - \frac{dm}{m} v_r.$$

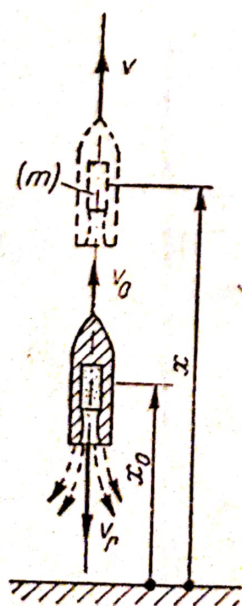


Fig. 25.B.7

Integrînd ecuaţia obţinută şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale: $t = 0$, $v = v_0$, $m = m_0$, rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m}. \tag{a}$$

La sfîrşitul perioadei de ardere a combustibilului cînd $t = t_f$ şi $m = m_f$, viteza rachetei va fi:

$$v_f = v_0 - gt_f + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m_f} = v_0 - gt_f + v_r \cdot \ln z, \tag{b}$$

unde $z = \dfrac{m_0}{m_f}$ este numărul lui Ţiolkovski.

Integrînd din nou ecuaţia (a) în raport cu timpul şi ţinînd seama că la $t = 0$, $x = x_0$, se obţine:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + v_r \int_0^t \left(\ln \frac{m_0}{m}\right) dt. \tag{c}$$

Pentru a putea găsi legea de mişcare a rachetei $x = x(t)$ este necesar să se cunoască modul de scurgere a jetului de gaze din motorul rachetei, adică variaţia masei rachetei în raport cu timpul.

1) Dacă $m = m_0(1 - \alpha t)$, ceea ce înseamnă că debitul masic de gaze evacuate din motorul rachetei este $Q_m = |dm/dt| = m_0\alpha$ = constant, din relaţiile (a) şi (c) se obţine:

$$v = v_0 - gt - v_r \cdot \ln(1 - \alpha t);$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_r}{\alpha}[\alpha t + (1 - \alpha t) \cdot \ln(1 - \alpha t)].$$

La sfîrşitul perioadei de ardere a combustibilului:

$$t_f = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right) = \frac{z-1}{\alpha z}; \quad v_f = v_0 - g\frac{z-1}{\alpha z} + v_r \cdot \ln z;$$

$$h_f = x_0 + v_0\frac{z-1}{\alpha z} - \frac{1}{2}g\left(\frac{z-1}{\alpha z}\right)^2 + v_r\frac{z - 1 - \ln z}{\alpha z}.$$

În cazul variaţiei liniare a masei rachetei în raport cu timpul, forţa reactivă este constantă, iar acceleraţia rachetei creşte cu timpul:

$$F_r = -\frac{dm}{dt}v_r = m_0\alpha v_r = \text{const.}; \quad a = \frac{dv}{dt} = v_r\frac{\alpha}{1 - \alpha t} - g.$$

2) Dacă $m = m_0 e^{-\alpha t}$, din relaţiile (a) şi (c) rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r\alpha t;$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}v_r\alpha t^2,$$

iar la sfîrşitul perioadei de ardere:

$$t_f = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln z; \quad v_f = v_0 + \frac{v_r\alpha - g}{\alpha} \cdot \ln z;$$

$$h_f = x_0 + \frac{v_0}{\alpha} \cdot \ln z + \frac{v_r\alpha - g}{2\alpha^2} \cdot \ln^2 z.$$

În cazul variaţiei exponenţiale a masei rachetei în raport cu timpul, forţa reactivă scade exponenţial cu timpul, iar acceleraţia rachetei este constantă:

$$F_r = -\frac{dm}{dt}v_r = v_r m_0 \alpha e^{-\alpha t}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v_r\alpha - g = \text{const.}$$

În ambele cazuri (1 şi 2), înălţimea totală atinsă de rachetă este:

$$h_1 = h_f + \frac{v_f^2}{2g}. \tag{d}$$

Pentru a determina legea de variaţie a masei rachetei pentru care h_1 este maxim, se presupune că această lege are forma $m = m_0 \cdot f(\alpha, t)$ în care $f(\alpha, t)$ este o funcţie oarecare de parametrul α (care caracterizează modul în care se face arderea combustibilului) şi de timpul t. În acest caz h_1 este dat de relaţia (d), în care v_f se obţine din relaţia (a) în care

se face $t = t_f$ și $m = m_f$, iar h_f din relația (c) în care se face $t = t_f$ și $m = m_0 \cdot f(\alpha, t)$. Se obține:

$$h_1 = x_0 + v_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 - v_r \int_0^{t_f} [\ln f(\alpha, t)]\,dt + \frac{1}{2g}(v_0 - g t_f + v_r \ln z)^2 \qquad (e)$$

În relația obținută $z = \frac{m_0}{m_f}$ este constant, iar t_f depinde de α. Valoarea parametrului α pentru care h_1 devine maxim se obține făcînd $\frac{\partial h_1}{\partial \alpha} = 0$. Derivînd în raport cu α expresia lui h_1 dată de (e) și ținînd seama la derivarea integralei* că limita ei superioară t_f depinde de α, se obține:

$$v_0 \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} - g t_f \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} - v_r \left[\int_0^{t_f} \frac{\frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha}}{f(\alpha, t)} \cdot dt + \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} \ln f(\alpha, t_f) \right] - (v_0 - g t_f + v_r \ln z) \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} = 0,$$

iar apoi ținînd seama că $f(\alpha, t_f) = \frac{1}{z}$ și reducînd termenii asemenea:

$$\int_0^{t_f} \frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} \cdot \frac{dt}{f(\alpha, t)} = 0.$$

Această ultimă integrală nu poate fi nulă decît dacă intervalul de integrare este nul, adică dacă $t_f = 0$, deoarece $\frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{f(\alpha, t)} \neq 0$.

Rezultă că, pentru o cantitate de combustibil dată, înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă este maximă dacă arderea combustibilului este instantanee, adică sub formă de explozie.

Dacă arderea combustibilului rachetei are loc instantaneu, rezultă că $\frac{dm}{dt} = -\infty$, ceea ce corespunde unei accelerații infinite a rachetei:

$$a = \frac{F_r - mg}{m} = \frac{F_r}{m} - g = -\frac{dm}{dt} \cdot \frac{v_r}{m} - g = \infty - g = \infty.$$

Accelerațiile pe care le poate suporta racheta sînt însă limitate la o valoare maximă. Dacă se respectă această restricție și se dorește ca înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă să fie maximă, racheta trebuie să se miște, în timpul arderii combustibilului, cu accelerație constantă și egală cu cea maximă admisă. După cum s-a văzut la punctul 2 al problemei, în acest caz masa rachetei variază exponențial în raport cu timpul (vezi problema 25.B.5).

Dacă arderea combustibilului are loc instantaneu, viteza imprimată rachetei se calculează prin aplicarea teoremei conservării cantității de mișcare (ca în cazul ciocnirilor):

$$m_f v_f - m_c v_r = 0, \text{ de unde } v_f = \frac{m_c}{m_f} v_r, \text{ în care } m_c = m_0 - m_f =$$

= masa combustibilului.

---

* Dacă $I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(\alpha, t)\,dt \rightarrow \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha}\,dt + \frac{db}{d\alpha} f(\alpha, b) - \frac{da}{d\alpha} f(\alpha, a)$.

Capitolul 26

PROBLEME GENERALE DE DINAMICĂ

26.1. Un punct material de masă m porneşte cu viteza iniţială v_0 pe porţiunea rectilinie $OA = l$ (coeficient de frecare μ), apoi continuă mişcarea pe arcul de cerc de rază R, şi unghi la centru θ, fără frecare ($\mu = 0$). Să se determine: viteza în punctul B, v_B; reacţiunea normală N_B; poziţia x în care punctul atinge suprafaţa orizontală în cădere liberă; viteza v_C cu care atinge această suprafaţă; viteza v_C' după ciocnirea suprafeţei orizontale, coeficientul de restituire e al ciocnirii fiind cunoscut; distanţa x_1 atinsă după ciocnire (fig. 26.1).

Aplicaţie numerică: $m = 1$ (kg), $v_0 = 10$ (m/s), $l = 4$(m), $\mu = 0{,}2$, $R = 2$ (m), $\theta = 60°$, $e = \frac{1}{2}$, $g = 10$ (m/s²).

Rezolvare. Se aplică teorema variaţiei energiei cinetice între poziţiile O şi B:

$$E_B - E_0 = L_{OB}; \quad \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu mgl - mgh,$$

deci:

$$v_B^2 = v_0^2 - 2\mu gl - 2gR(1 - \cos\theta); \quad \text{rezultă } v_B = 8 \text{ (m/s)}.$$

Pentru aflarea reacţiunii N_B, se proiectează ecuaţia fundamentală a dinamicii pe direcţia normalei în punctul B:

$$m\frac{v_B^2}{R} = N_B - mg\cos\theta; \quad \text{rezultă } N_B = 37 \text{ } (N).$$

Ecuaţiile parametrice ale mişcării punctului greu, pe parabola BC, considerînd axele de referinţă xBy, se scriu:

$$x = v_B t\cos\theta; \quad y = v_B t\sin\theta - \frac{gt^2}{2}; \quad y_C = -R(1 - \cos\theta).$$

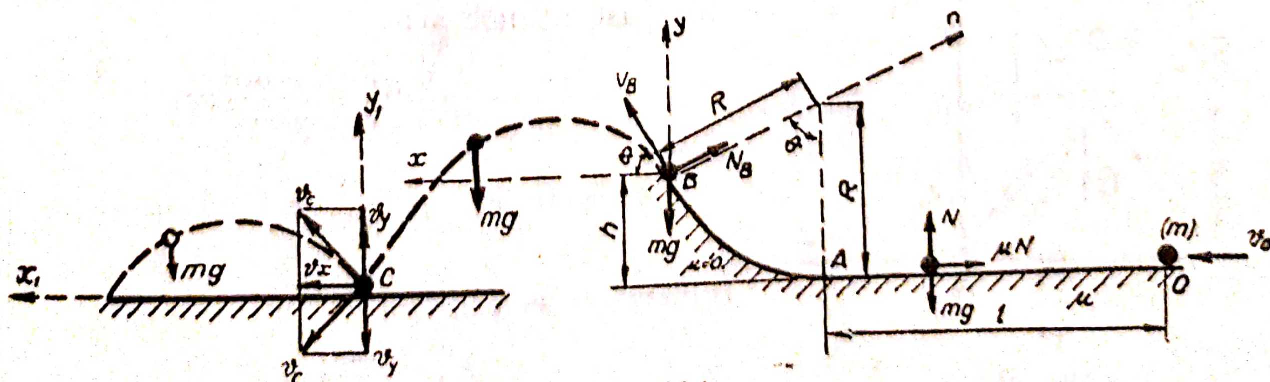


Fig. 26.1

Înlocuind cu datele numerice se obţin:

$$x = 4t; \quad y = 4\sqrt{3}t - 5t^2; \quad y_c = -1; \quad \text{rezultă } x = 6{,}08 \text{ (m)}.$$

Viteza de cădere în punctul C se obţine derivînd ecuaţiile parametrice:

$$v_x = \dot{x} = v_B \cdot \cos \theta; \quad v_y = \dot{y} = v_B t \sin \theta - gt.$$

Rezultă:

$$v_{Cx} = 4; \quad v_{Cy} = -8{,}28; \quad v_C = 9{,}1 \text{ (m/s)}.$$

După ciocnirea oblică, în C, componenta v_x rămîne neschimbată, iar componenta v_y, influenţată de ciocnire, schimbă semnul, multiplicat cu coeficientul e:

$$v'_x = v_x = v_B \cos \theta = 4$$

$$v'_y = ev_y = 4{,}14.$$

Deci, rezultă $v'_C = 4{,}3$ (m/s).

După ciocnire, ecuaţiile parametrice ale mişcării, scrise faţă de axele x_1Cy_1, devin:

$$x_1 = v'_x t_1 = 4t_1;$$

$$y_1 = v'_y t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 4{,}14t_1 - 5t_1^2 = 0.$$

Rezultă pentru punctul de cădere pe sol:

$$t_1 = 0{,}83 \text{ (s)} \quad \text{şi} \quad x_1 = 3{,}3 \text{ (m)}.$$

26.2. Se dă o bară omogenă AB de lungime l şi greutate G, care se află iniţial în repaus la $\theta = \theta_0$ (fig. 26.2, *a*). Bara începe să se mişte sub acţiunea greutăţii proprii. Neglijînd frecările, să se calculeze pentru o anumită poziţie θ valorile vitezei şi acceleraţiei instantanee de rotaţie ale barei şi reacţiunile din cele două reazeme.

Rezolvare.

Metoda I. Bara are mişcare plană, centrul instantaneu de rotaţie fiind în I. Deoarece se neglijează frecările şi singura forţă activă este greutatea barei, se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice pentru calculul valorilor instantanee ale lui ω şi $\dot{\omega}$. Pentru momentul iniţial (repaus), rezultă $E_1 = 0$.

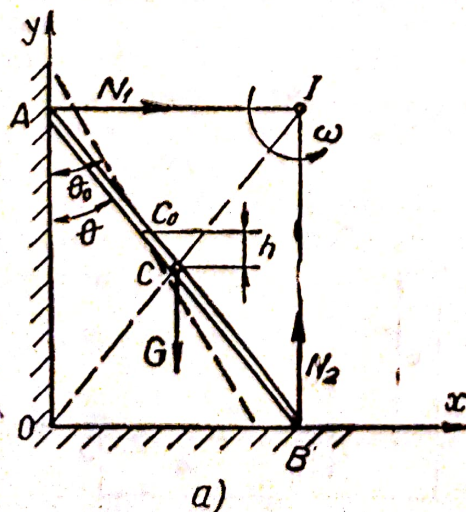


Fig. 26.2, *a*

Energia cinetică E_2 se calculează aplicînd formula lui Koenig pentru momentul în care bara are faţă de I viteza unghiulară instantanee ω:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}\frac{Gl^2}{12g}\omega^2,$$

unde:

$$v_c = IC\omega = \frac{l}{2}\omega.$$

Înlocuind, se obţine:

$$E_2 = \frac{Gl^2}{6g}\omega^2.$$

Lucrul mecanic între poziția inițială ($\theta = \theta_0$, $\omega = 0$) și cea finală (θ, ω) este $L_{12} = Gh = G\frac{l}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$.

Introducînd expresiile calculate în $E_2 - E_1 = L_{1-2}$, se obține:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}, \quad \dot{\omega} = \frac{3g}{2l}\sin\theta.$$

Pentru calculul reacțiunilor, se aplică teorema de mișcare a centrului de masă proiectată pe axele sistemului de referință fix:

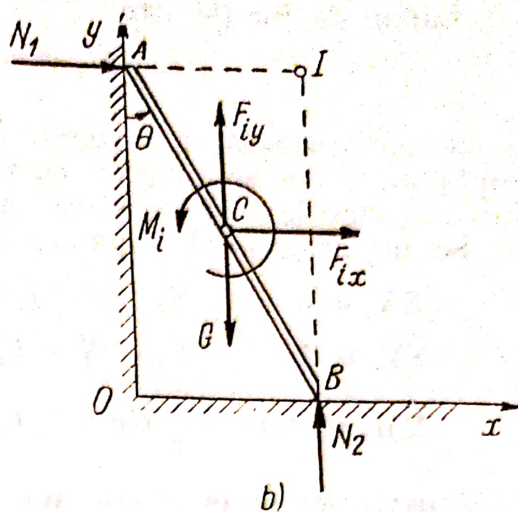


Fig. 26.2, b

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}_c) = \Sigma\bar{F}_i;$$

$$(Ox); \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega\cos\theta\right) = N_1;$$

$$(Oy); \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega\sin\theta\right) = N_2 - G.$$

Efectuînd calculele, rezultă:

$$N_1 = \frac{Gl}{2g}(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta); \quad N_2 = G - \frac{Gl}{2g}(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta).$$

Dacă se înlocuiesc valorile lui ω și $\dot{\omega}$, se obține:

$$N_1 = \frac{3G}{8}[3\sin 2\theta - 4\sin\theta\cos\theta_0];$$

$$N_2 = G\left[1 - \frac{3}{4}(1 + 2\cos\theta_0\cos\theta - 3\cos^2\theta)\right].$$

Metoda a II-a — aplicarea principiului lui d'Alembert (fig. 26.2, *b*). Coordonatele centrului de masă C sînt:

$$x_c = \frac{l}{2}\sin\theta; \quad y_c = \frac{l}{2}\cos\theta.$$

Prin derivare se deduc componentele vitezei și accelerației centrului de masă:

$$\dot{x}_c = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta; \quad \dot{y}_c = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta;$$

$$\ddot{x}_c = \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta); \quad \ddot{y}_c = -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta).$$

Forța de inerție are componentele:

$$F_{ix} = -\frac{G}{g}\ddot{x}_c = -\frac{Gl}{2g}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta);$$

$$F_{iy} = -\frac{G}{g}\ddot{y}_c = \frac{Gl}{2g}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta).$$

Cuplul de inerţie este:

$$M_i = -J_c\ddot{\theta} = -\frac{Gl^2}{12g}\ddot{\theta}.$$

Se menţionează că în figura 26.2, *b* componentele forţei de inerţie şi cuplul de inerţie s-au figurat cu sensul lor pozitiv, iar în calcule s-au introdus cu semnele respective, rezultate mai înainte.

Scriind ecuaţiile de echilibru dinamic, rezultă (fig. 26.2, *b*):

$$(\Sigma X_i = 0); \qquad N_1 + F_{ix} = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad N_2 - G + F_{iy} = 0; \qquad \text{(b)}$$

$$(\Sigma M_I = 0); \qquad \frac{Gl}{2}\sin\theta + F_{ix}\frac{l}{2}\cos\theta - F_{iy}\frac{l}{2}\sin\theta + M_i = 0. \qquad \text{(c)}$$

Ecuaţia (c) se mai scrie sub forma:

$$\frac{Gl}{2}\sin\theta - \frac{Gl^2}{4g}\ddot{\theta}\cos^2\theta + \frac{Gl^2}{4g}\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{Gl^2}{4g}\ddot{\theta}\sin^2\theta -$$

$$-\frac{Gl^2}{4g}\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{Gl^2}{12g}\ddot{\theta} = 0.$$

Efectuînd calculele se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0,$$

care coincide cu cea obţinută anterior.

Cu ecuaţiile (a) şi (b) se calculează reacţiunile:

$$N_1 = -F_{ix} = \frac{Gl}{2g}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta);$$

$$N_2 = G - F_{iy} = G - \frac{Gl}{2g}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta),$$

care coincid cu cele deduse mai înainte.

Metoda a III-a — folosind ecuaţiile Lagrange. Energia cinetică este:

$$E = \frac{Gl^2}{6g}\dot{\theta}^2.$$

Funcţia de forţă este:

$$U = mgy = -G\frac{l}{2}\cos\theta,$$

unde s-a ţinut seama că greutatea este orientată în sens opus axei Oy.

Ecuaţia lui Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$ se scrie în cazul de faţă:

$$\frac{Gl^2}{3g}\ddot{\theta} = G\frac{l}{2}\sin\theta,$$

de unde rezultă ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0.$$

Integrînd se obţine:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{3g}{2l}\cos\theta = C.$$

Constanta de integrare se calculează cu condiţiile iniţiale $t = 0$:

$$\theta = \theta_0; \quad \dot{\theta} = 0, \quad \text{deci}: \ C = \frac{3g}{2l}\cos\theta_0.$$

Prin urmare, legea de mişcare este:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

rezultat care coincide cu cel obţinut anterior:

Metoda a IV-a — folosind ecuaţiile canonice ale lui Hamilton. Impulsul generalizat este:

$$p = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Gl^2}{3g}\dot{\theta}, \quad \text{de unde} \quad \dot{\theta} = \frac{3g}{Gl^2}p.$$

Funcţia lui Hamilton calculată cu formula de definiţie este:

$$H = p\dot{\theta} - (E + U) = \frac{3g}{Gl^2}p^2 - \frac{Gl^2}{6g}\cdot\frac{9g^2}{G^2l^4}p^2 + \frac{Gl}{2}\cos\theta =$$

$$= \frac{3g}{2Gl^2}p^2 + \frac{Gl}{2}\cos\theta.$$

Ţinînd seama că legăturile sînt scleronome, funcţia lui Hamilton se mai poate calcula şi cu relaţia:

$$H = E + V = E - U = \frac{Gl^2}{6g}\frac{9g^2}{G^2l^4}p^2 + \frac{Gl}{2}\cos\theta =$$

$$= \frac{3g}{2Gl^2}p^2 + \frac{Gl}{2}\cos\theta.$$

Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\theta}; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}$$

devin, în cazul de faţă:

$$\frac{3g}{Gl^2}p = \dot{\theta}; \quad -\frac{Gl}{2}\sin\theta = -\dot{p}.$$

Din prima ecuaţie se obţine:

$$\frac{3g}{Gl^2}\dot{p} = \ddot{\theta},$$

introducînd acest rezultat în a doua ecuaţie, rezultă:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta,$$

care coincide cu ecuaţia diferenţială a mişcării stabilită anterior.

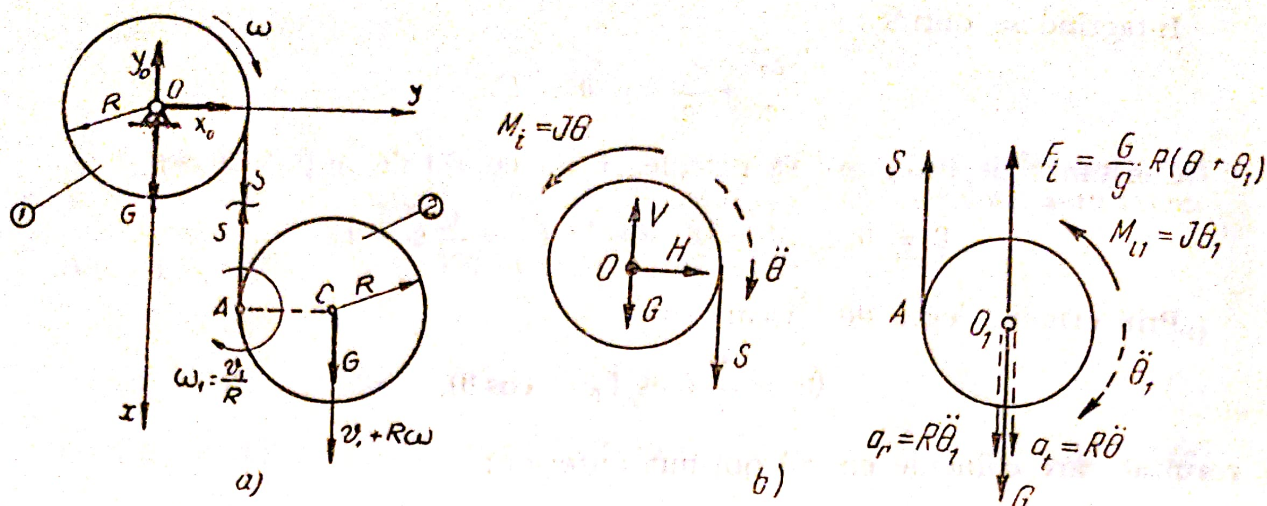


Fig. 26.3, *a*, *b*

26.3. Să se studieze mişcarea sistemului de corpuri din figura 26.3, *a* sub acţiunea greutăţii proprii a corpurilor. Firul este considerat fără greutate proprie.

Rezolvare.

Metoda I. Sistemul are două grade de libertate. Centrul C al discului (2) are faţă de fir o viteză v_1, iar firul, la rîndul lui, viteza $R\omega$ cu care se desfăşoară de pe discul (1).

Pentru corpul (1) se aplică, pentru studiul mişcării, numai teorema de variaţie a momentului cinetic:

$$(O); \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{GR^2}{2g}\omega\right) = SR.$$

Pentru corpul (2) se aplică atît teorema de mişcare a centrului de masă proiectată pe sistemul fix xOy, cît şi teorema de variaţie a momentului cinetic faţă de centrul de greutate C al discului:

$$(Ox); \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{G}{g}(v_1 + R\omega)\right] = G - S;$$

$$(C); \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{GR^2}{2g}\frac{v_1}{R}\right) = SR.$$

Rezolvînd, rezultă:

$$a_1 = \frac{2g}{5}; \qquad \dot{\omega} = \frac{2g}{5R}; \qquad S = \frac{G}{5}.$$

Metoda a II-a — prin aplicarea principiului d'Alembert. Problema avînd două grade de libertate se aleg ca parametri geometrici unghiurile θ faţă de O şi θ_1 faţă de A.

Se izolează fiecare corp şi se introduce torsorul forţelor de inerţie în centrul de masă al fiecărui corp (fig. 26.3, *b*). Pentru discul O se introduce cuplul de inerţie care are modulul $\frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta}$. Pentru discul C, care efectuează o mişcare plan paralelă, forţa de inerţie se calculează cu acceleraţia absolută,

care în cazul de față de se obține prin însumarea accelerației de transport $a_t = R\ddot{\theta}$ și a accelerației relative $a_r = R\ddot{\theta}_1$; cuplul de inerție este $\frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta}_1$.

Ecuațiile de echilibru dinamic sînt:

— pentru discul O:

$$(\Sigma M_0 = 0); \qquad \frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta} - SR = 0; \tag{a}$$

— pentru discul C

$$(\Sigma Y_i = 0); \qquad S + \frac{G}{g}R(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1) - G = 0; \tag{b}$$

$$(\Sigma M_c = 0); \qquad \frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta}_1 - SR = 0. \tag{c}$$

Din ecuațiile (a) și (c) se deduce:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1. \tag{d}$$

Ținînd seama de relația (d) și eliminînd tensiunea S între ecuațiile (a) și (b), rezultă:

$$\frac{GR}{2g}\ddot{\theta} = G - 2\frac{GR}{g}\ddot{\theta},$$

de unde se obțin:

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5}\frac{g}{R} \quad \text{și} \quad S = \frac{G}{5}.$$

Metoda III-a — prin aplicarea ecuațiilor lui Lagrange. Energia cinetică a sistemului se calculează cu vitezele absolute și are expresia, ținînd seama că discul O efectuează o mișcare de rotație, iar discul C o mișcare plan paralelă:

$$E = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}(R\dot{\theta} + R\dot{\theta}_1)^2 =$$

$$= \frac{G}{g}R^2\left(\frac{3}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}\dot{\theta}_1\right).$$

Funcția de forță este:

$$U = \Sigma m_i g y_i = G(l_0 + R\theta + R\theta_1),$$

unde l_0 este lungimea inițială a firului dintre discuri.

Forțele generalizate sînt:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial \theta} = GR; \qquad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = GR.$$

Ecuațiile lui Lagrange sînt:

$$\left(\frac{3}{2}\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1\right)\frac{GR^2}{g} = GR; \qquad \left(\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\ddot{\theta}_1\right)\frac{GR^2}{g} = GR,$$

sau:

$$\frac{3}{\;}\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 = \frac{g}{R}; \qquad \ddot{\theta} + \frac{3}{2}\ddot{\theta}_1 = \frac{g}{R}.$$



Rezolvînd acest sistem se deduc:

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5}\frac{g}{R}; \qquad \ddot{\theta}_1 = \frac{2}{5}\frac{g}{R},$$

adică aceleaşi rezultate.

26.4. În interiorul unui cilindru fix de rază R se mişcă un al doilea cilindru de greutate G şi rază r (unde $r < R$), rostogolindu-se fără alunecare (fig. 26.4, *a*). Considerînd că cilindrul mobil efectuează mici oscilaţii faţă de poziţia de echilibru, se cere să se calculeze pulsaţia acestor oscilaţii. Se neglijează frecările.

R e z o l v a r e. Din condiţia de rostogolire fără alunecare, punctul de contact A este centrul instantaneu de rotaţie.

Viteza centrului C al cilindrului mobil este:

$$v_c = (R - r)\dot{\theta} = r\Omega,$$

unde Ω este viteza unghiulară faţă de centrul instantaneu de rotaţie. Deci:

$$\Omega = \frac{R-r}{r}\dot{\theta} = \frac{R-r}{r}\omega, \quad \text{unde } \omega = \dot{\theta}.$$

Acceleraţia unghiulară a cilindrului mobil este:

$$\varepsilon = \dot{\Omega} = \frac{R-r}{r}\ddot{\theta}.$$

În continuare problema va fi rezolvată prin mai multe metode.

Fig. 26.4, *a*, *b*

Metoda I. Aplicarea teoremei conservării energiei mecanice. Energia cinetică a cilindrului care efectuează o mişcare plană este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}J_c\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2}\frac{Gr^2}{2g}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{G}{g}(R-r)^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}\frac{G}{g}(R-r)^2\omega^2. \qquad \text{(a)}$$

Energia potenţială este:

$$V = G(R-r)(1-\cos\theta).$$

Fiind un sistem conservativ, se aplică teorema conservării energiei mecanice $E + V = \text{const}$, de unde $\frac{d}{dt}(E+V) = 0$, care în cazul de faţă conduce la:

$$\frac{3G}{2g}(R-r)^2\ddot{\theta}\,\dot{\theta} + G(R-r)\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Pentru micile oscilaţii se aproximează $\sin\theta \approx \theta$, deci relaţia (b) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0, \qquad \text{(c)}$$

care reprezintă ecuaţia unei vibraţii armonice a cărei pulsaţie este:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

Metoda a II-a. Aplicarea teoremei de variaţie a energiei cinetice $dE = dL$ sau, care se mai poate scrie $\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt}$, se obţine:

$$\frac{d}{dt}(E-L) = 0.$$

Fiind sistem conservativ $(L = -V)$, rezultă:

$$\frac{d}{dt}(E+V) = 0,$$

ecuaţie care coincide cu cea scrisă mai înainte.

Metoda a III-a. Aplicarea principiului lui d'Alembert (fig. 26.4, *b*). Acceleraţia centrului de greutate G are două componente (în mişcarea faţă de O): $a_{c\nu} = (R-r)\dot{\theta}^2$ şi $a_{c\tau} = (R-r)\ddot{\theta}$. În consecinţă, torsorul forţelor de inerţie este format din:

$$F_i\begin{cases} F_{i\nu} = \frac{G}{g}(R-r)\dot{\theta}^2; \\ F_{i\tau} = \frac{G}{g}(R-r)\ddot{\theta}. \end{cases}$$

$$M_i = J_c\varepsilon = \frac{Gr^2}{2g}\frac{R-r}{r}\ddot{\theta}.$$

Scriind ecuaţia de momente faţă de A, se obţine:

$$(\Sigma M_A = 0); \quad M_i + F_{i\tau} r + Gr \sin\theta = 0,$$

sau:

$$\frac{Gr^2}{2g}\frac{R-r}{r}\ddot{\theta} + \frac{G}{g}(R-r)\ddot{\theta} + Gr\sin\theta = 0. \tag{d}$$

Pentru micile oscilaţii $\sin\theta \approx \theta$, deci ecuaţia (c) devine:

$$\frac{3}{2g}(R-r)\ddot{\theta} + \theta = 0, \quad \text{sau:} \quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0,$$

care coincide cu ecuaţia (c).

Metoda a IV-a. Aplicarea ecuaţiilor lui Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Energia cinetică a sistemului este, conform relaţiei (a):

$$E = \frac{3}{4}\frac{G}{g}(R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

Funcţia de forţă este (fig. 26.4, *a*):

$$U = mgy = G(R-r)\cos\theta.$$

Introducînd aceste rezultate în ecuaţia lui Lagrange, rezultă:

$$\frac{3G}{2g}(R-r)^2\ddot{\theta} = -G(R-r)\sin\theta.$$

Efectuînd calculele şi aproximînd $\sin\theta \approx \theta$, se obţine:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0,$$

care coincide cu ecuaţia (c).

26.5. Un automotor se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza v_0. Apoi, mărindu-se progresiv puterea motorului, viteza automotorului creşte cu acceleraţie constantă de la v_0 la v_1 în timp ce el parcurge distanţa D, iar după aceea el se deplasează cu viteza v_1 constantă. Automotorul, fără osii şi roţi, are masa M şi centrul de masă în punctul C a cărui poziţie este dată prin distanţele l_1, l_2, h (fig. 26.5, *a*). Cele două osii O_1, O_2, împre-

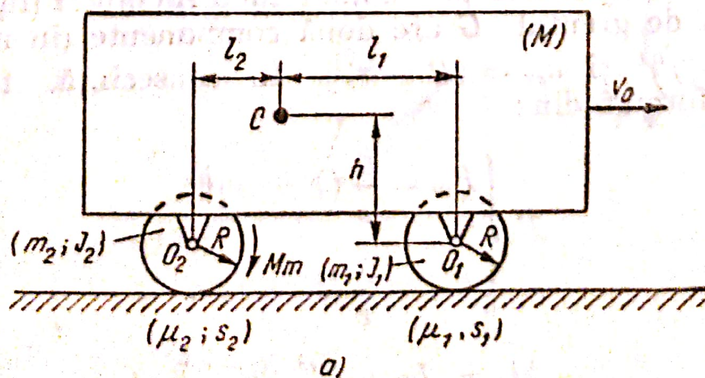


Fig. 26.5, *a*

una cu roțile fixate rigid pe fiecare din ele, au respectiv masele m_1, m_2, iar momentele lor de inerție față de axele de simetrie O_1, O_2 sînt respectiv J_1, J_2. Razele R ale celor patru roți sînt egale între ele, iar coeficienții de frecare de rostogolire între roțile O_1, O_2 și șine sînt, respectiv, s_1, s_2.

Se cere să se determine: valorile M_{m0}, M_m, M_{m1} ale momentului motor care trebuie aplicat la roata motoare O_2, situată în spate, în timpul celor trei faze ale mișcării; diagrama de variație a puterii motorului în raport cu timpul, precum și puterea maximă P_{max} pe care trebuie să o dezvolte motorul în timpul mișcării accelerate. Este dat randamentul η al mecanismului de transmitere a mișcării de la motor la roata motoare.

Fig. 26.5, b

Se cer, de asemenea, coeficienții de frecare de alunecare μ_1, μ_2 dintre roțile O_1, O_2 și șine necesari pentru ca roțile să nu patineze în timpul accelerării mișcării.

R e z o l v a r e. În timpul mișcării accelerate automotorul are accelerația $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2D}$ = constantă și viteza $v = v_0 + a(t - t_0)$, iar roțile au accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{a}{R}$ = constant și viteza unghiulară $\omega = \frac{v}{R} =$ $= \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)$.

Se separă cele două osii de restul automotorului și se aplică fiecăruia din cele trei corpuri obținute prin separare principiul lui d'Alembert (fig. 26.5, b). Scriind ecuațiile de echilibru dinamic pentru fiecare corp, se obține:

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad X_2 - X_1 - F_i = 0$, unde $F_i = Ma$; $\quad$ (a₁)

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad Y_1 + Y_2 - Mg = 0$; $\quad$ (a₂)

$(\Sigma M_{02} = 0)$; $\quad Y_1(l_1 + l_2) - Mgl_2 + F_i h = 0.$ $\quad$ (a₃)

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad X_1 - F_{i1} - T_1 = 0$, unde $F_{i1} = m_1 a$; $\quad$ (b₁)

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad N_1 - Y_1 - m_1 g = 0$; $\quad$ (b₂)

$(\Sigma M_A = 0)$; $\quad X_1 R - F_{i1} R - M_{i1} - M_{r1} = 0$, unde $M_{i1} = J_1 \varepsilon = J_1 \frac{a}{R}$. $\quad$ (b₃)

$|T_1| < \mu_1 |N_1|$; $\quad$ (b₄)

$|M_{r1}| = s_1 |N_1|$. $\quad$ (b₅)

$(\Sigma X_i = 0)$; $\quad T_2 - X_2 - F_{i2} = 0$, unde $F_{i2} = m_2 a$; $\quad$ (c₁)

$(\Sigma Y_i = 0)$; $\quad N_2 - Y_2 - m_2 g = 0$; $\quad$ (c₂)

$(\Sigma M_B = 0)$; $\quad M_m - X_2 R - F_{i2} R - M_{i2} - M_{r2} = 0$, unde $M_{i2} = J_2 \varepsilon = J_2 \frac{a}{R}$. $\quad$ (c₃)

$|T_2| < \mu_2 |N_2|$; $\quad$ (c₄)

$|M_{r2}| = s_2 |N_2|$. $\quad$ (c₅)

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii şi inegalităţi obţinute rezultă succesiv: Y_1 şi Y_2 din ecuaţiile (a_3) şi (a_2); N_1 şi N_2 din ecuaţiile (b_2) şi (c_2); X_1 şi X_2 din ecuaţiile (b_5), (b_3) şi (a_1), iar din ecuaţiile (c_5) şi (c_3) se obţine momentul motor M_m, necesar pentru antrenarea roţii motoare în timpul accelerării automotorului:

$$M_m = g\left[s_1\left(m_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} M\right) + s_2\left(m_2 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} M\right)\right] +$$

$$+ aR\left(M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{R^2} + M \frac{h}{l_1 + l_2} \cdot \frac{s_2 - s_1}{R}\right) = \text{constant.} \qquad \text{(d)}$$

În timpul mişcării uniforme a automobilului ($a = 0$) cu viteza v_0 sau v_1, momentul motor necesar este:

$$M_{m0} = M_{m1} = g\left[s_1\left(m_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} M\right) + s_2\left(m_2 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} M\right)\right]. \qquad \text{(e)}$$

Puterile dezvoltate de motor în timpul mişcărilor uniforme ale automotorului cu vitezele v_0 şi v_1 sînt constante şi date, respectiv, de relaţiile:

$$P_0 = \frac{M_{m0}\omega_0}{\eta} = \frac{M_{m9}v_0}{\eta R}; \qquad P_1 = \frac{M_{m1}v_1}{\eta R} = \frac{M_{m0}v_1}{\eta R} > P_0, \qquad \text{(f)}$$

unde $M_{m0} = M_{m1}$ este dat de relaţia (e).

În timpul mişcării uniform accelerate a automotorului, puterea motorului creşte liniar cu timpul, după relaţia:

$$P = \frac{M_m\omega}{\eta} = \frac{M_m v}{\eta R} = \frac{M_m}{\eta R}[v_0 + a(t - t_0)] = \frac{M_m}{\eta R}\left[v_0 + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2D}(t - t_0)\right], \qquad \text{(g)}$$

unde M_m este dat de relaţia (d).

Făcînd $v = v_0$ sau $v = v_1$ în relaţia (g), se obţin puterile dezvoltate de motor la începutul, respectiv, la sfîrşitul perioadei de accelerare:

$$P_0' = \frac{M_m v_0}{\eta R} > P_0 \qquad \text{(h)}$$

$$P_1' = \frac{M_m v_1}{\eta R} > P_1 > P_0. \qquad \text{(i)}$$

Diagrama de variaţie a puterii motorului cu timpul este prezentată în figura 26.5, *c*, iar puterea maximă pe care trebuie să o dezvolte motorul este $P_{max} = P_1'$.

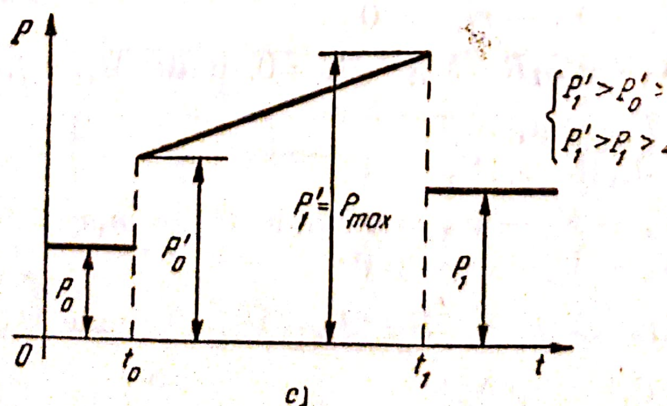


Fig. 26.5, *c*

În continuare, din ecuaţiile (b_1) şi (c_1) se obţin T_1 şi T_2, iar din inegalităţile (b_4) şi (c_4) se obţin μ_1 şi μ_2:

$$\mu_1 > \frac{|T_1|}{|N_1|} = \frac{s_1}{R} + \frac{J_1 a}{R^2\left(m_1 g + \dfrac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M\right)}; \tag{j_1}$$

$$\mu_2 > \frac{|T_2|}{|N_2|} = \frac{\left(M + m_1 + m_2 + \dfrac{J_1}{R^2}\right) a + \dfrac{s_1}{R}\left(m_1 g + \dfrac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M\right)}{m_2 g + \dfrac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M}. \tag{j_2}$$

Se menţionează că pentru ca reacţiunea N_1 să nu se anuleze şi să-şi păstreze sensul în timpul accelerării automotorului, trebuie respectată inegalitatea:

$$N_1 = m_1 g + \frac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M \geqslant 0, \text{ de unde } a \leqslant g \frac{M l_2 + m_1(l_1 + l_2)}{M h}. \tag{k}$$

O b s e r v a ţ i e.

Dacă roata motoare este situată în faţă, relaţiile (j_1) şi (j_2) devin:

$$\mu_1 > \frac{\left(M + m_1 + m_2 + \dfrac{J_2}{R^2}\right) a + \dfrac{s_2}{R}\left(m_2 g + \dfrac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M\right)}{m_1 g + \dfrac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M};$$

$$\mu_2 > \frac{s_2}{R} + \frac{J_2 a}{R^2\left(m_2 g + \dfrac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M\right)},$$

iar relaţiile (d), ..., (i) şi (k) rămîn neschimbate.

Bibliografie

1. Appel, P. *Traité de mécanique rationelle.* Ed. Gauthier—Villars. Paris, 1955.
2. Atanasiu, M. *Mecanica.* Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1973.
3. Bălan, Şt. *Culegere de probleme de mecanică.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, ed. III, 1977.
4. Bălan, Şt. *Lecţii complementare de mecanică.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, ed. II, 1975.
5. Bălan, Şt. şi Beiu-Paladi, E. *Curs de mecanică teoretică.* Editura Ministerului Învăţămîntului. Bucureşti, 1960.
6. Buchholtz, N. N., Voronkov, I. M., Minakov, I. A. *Culegere de probleme de mecanică raţională.* Editura Tehnică. Bucureşti, 1952.
7. Buzdugan, Gh. *Culegere de probleme de mecanică.* Editura Institutului Politehnic. Bucureşti, 1949.
8. Boiangiu, D. D. şi Murgulescu, S. *Mecanica.* Litografia Inst. Politehnic. Bucureşti, 1979—1981.
9. Ciorănescu, N. *Ecuaţiile mecanicii analitice.* Editura Politehnicii. Bucureşti, 1938.
10. Demian, T. *Mecanisme şi elemente constructive de mecanică fină.* Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1970.
11. Gantmacher, F. *Lectures in analytical mechanics.* Ed. Mir. Moscova, 1970.
12. Harris, C. şi Crede, C. *Şocuri şi vibraţii.* Editura Tehnică. Bucureşti, vol. I, 1968.
13. Iacob, C. *Mecanică teoretică.* Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, ed. II, 1980.
14. Ioachimescu, A. *Mecanica raţională.* Biblioteca Gazetei matematice. Imprimeria Naţională. Bucureşti, 1947.
15. Ionescu-Ghermănescu, L., Rusiu, Gh., Tiperciuc, Gh. *Mecanica tehnică.* Litografia Inst. Politehnic. Bucureşti, 1973.
16. Landau, L. şi Lifşiţ, F. *Mecanica.* Editura Tehnică. Bucureşti, 1966.
17. Livovski, L. *Mecanica şi teoria elasticităţii.* Inst. de Petrol, Gaze şi Geologie. Bucureşti, 1970.
18. Loiţianski, L. G. şi Lurie, A. I. *Kurs teoreticeskoi mehaniki. Gostehizdat,* vol. I—II, ed. V, Moscova, 1954—1955.
19. Manolescu, N., Kovacs, F., Orănescu, A. *Teoria mecanismelor şi maşinilor.* Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, 1972.
20. Méchtcherski, I. Recueil de problèmes de mecanique rationnelle. Ed. Mir. Moscova, 1973.
21. Nekrasov, A. I. *Curs de mecanică teoretică.* Editura Tehnică. Bucureşti, 1955.
22. Nihouil, I. C. J. *Cours moderne de mécanique.* Ed. Albin Michel. Paris, 1968.
23. Plăcinţeanu, I. I. *Mecanica vectorială şi analitică.* Editura Tehnică. Bucureşti, 1958.
24. Pelecudi, Chr. *Teoria mecanismelor spaţiale.* Editura Academiei R.S.R. Bucureşti, 1972.
25. Rădoi, M. şi Deciu, E. *Mecanica.* Editura Didactică şi Pedagogică. Bucureşti, ed. II, 1981.

26. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D. *Elemente de vibrații mecanice.* Editura Tehnică. București, 1973.
27. Ripianu, A. *Dinamica.* Inst. Politehnic. Cluj, 1955.
28. Ripianu, A. *Mecanica solidului rigid.* Editura Tehnică. București, 1973.
29. Sarian, M. *Mecanica și rezistența materialelor.* Vol. I, *Mecanica.* Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1965.
30. Silaș, Gh. *Mecanica. Vibrații mecanice.* Editura Didactică și Pedagogică. București, 1968.
31. Silaș, Gh. și Groșanu, I. *Mecanica.* Editura Didactică și Pedagogică. București, 1981.
32. Silaș, Gh., Rădoi, M. ș.a. *Culegere de probleme de vibrații mecanice.* Vol. I. Editura Tehnică. București, 1967.
33. Staicu, Șt. *Mecanica.* Litografia Inst. Politehnic. București, 1973.
34. Stan, A. și Grumăzescu, M. *Probleme de mecanică.* Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1973.
35. Stoenescu, A. și Silaș, Gh. *Mecanica teoretică.* Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1963.
36. Stoenescu, A., Ripianu, A., Atanasiu, M. *Culegere de probleme de mecanică.* Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. II, 1965.
37. Suslov, G. R. *Mecanică rațională.* Editura Tehnică. București, 1950.
38. Timoshenko, S. *Théorie des vibrations,* Librairie Polytechnique Béranger. Paris, 1954.
39. Timoshenko, S., și Young, D. H. *Dynamique supérieure.* Librairie Polytechnique Béranger. Paris, 1950.
40. Țițeica, G. *Probleme de mecanică.* Editura Didactică și Pedagogică. București, 1977.
41. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. *Mecanica teoretică.* Editura Tehnică. București, ed. III, 1968.
42. Voinaroski, R. *Mecanica teoretică.* Editura Didactică și Pedagogică. București, 1968.
43. Voinea, R. *Mecanica teoretică.* Tipografia și litografia învățămîntului. București, 1956.
44. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceaușu, V. *Mecanica.* Editura Didactică și Pedagogică. București, 1975.
45. Colectivul Catedrei de mecanică I.P.B. (responsabili Sarian, M. și Boiangiu, D. *Culegere de probleme de mecanică,* vol. I și II. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1962.

CUPRINS